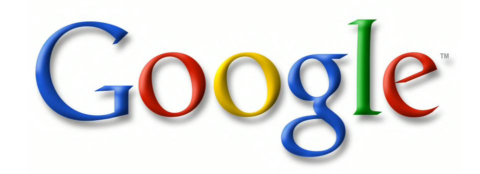
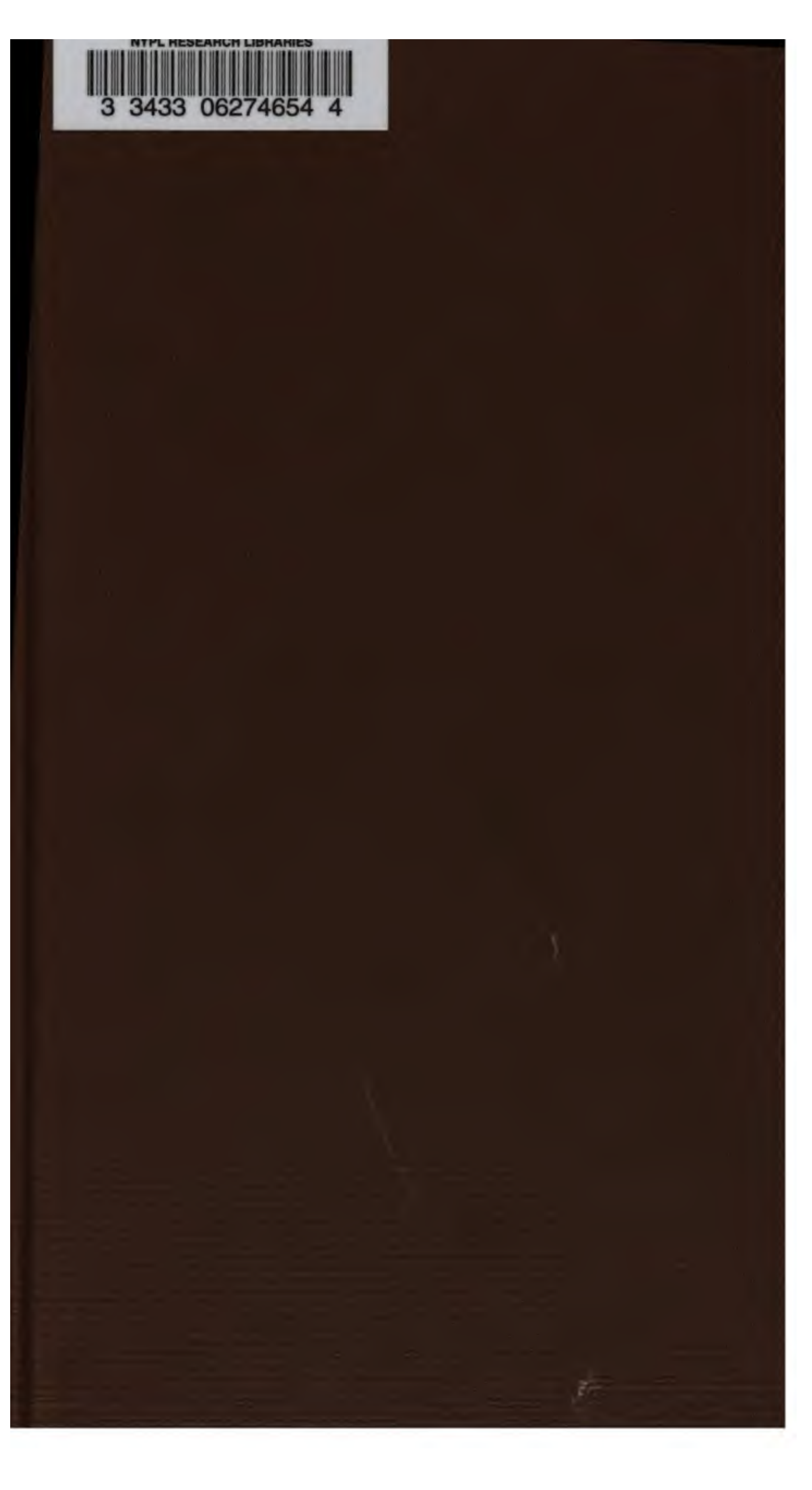
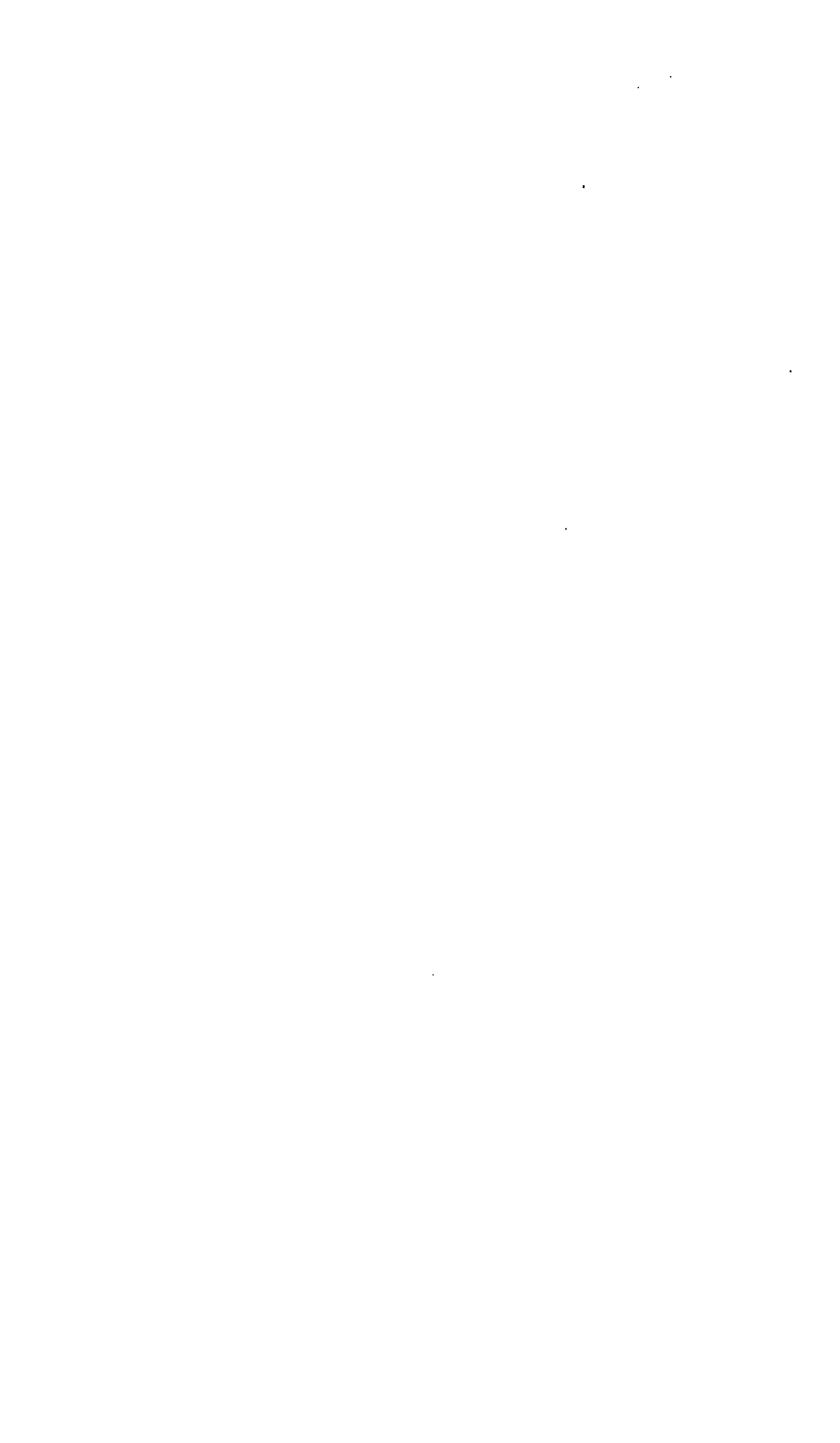
















Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Sechsunddreissigster Theil. Viertes Heft.

Mit einer lithographirten Tafel.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1861.

Druck der Königl. Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike in Greifswald.

Inhaltsverzeichniss des sechsunddreissigsten Theils.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Astronomie.

Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Ueber reciproke Linien und Flächen.

Von

Herrn *E. Bacaloglo*

in Leipzig.

Die nächste Veranlassung zu diesem Aufsatze gab eine in den Berichten der Pariser Akademie*) ausgesprochene Vermuthung, es gebe für diese Flächen eine bloss analytische, aber keine geometrische Reciprocität. Indessen führte eine nähere Untersuchung der genannten Flächen und die Ausdehnung der Reciprocität auf Linien zu einigen Resultaten, welche, indem sie die geometrische Reciprocität derselben auf's Deutlichste darthun, nicht ohne jedes Interesse zu sein scheinen.

I.

Zwei ebene Linien würden demnach reciproke sein, wenn ihre respectiven Coordinaten x und y, x_1 und y_1 durch die Relationen

$$(1) \; \ldots\ldots \quad x_1 = m\frac{dy}{dx}, \quad y_1 = x\frac{dy}{dx} - y$$

verbunden sind, woraus

$$(2) \; \ldots\ldots \quad x = m\frac{dy_1}{dx_1}, \quad y = x_1\frac{dy_1}{dx_1} - y_1.$$

---

*) Ossian Bonnet, Compt. rend. de l'Acad. des sc. de Paris, B. 42. S. 485. 1856.

Daraus folgt zunächst:

1) Einer gegebenen Linie

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x, y) = 0$$

entspricht nicht eine, sondern ein ganzes System reciproker Linien, welche sich bloss durch einen variabeln Parameter von einander unterscheiden.

2) Die Gesammtheit dieser letzteren Linien hat ein gemeinschaftliches System, von einander wieder durch einen variabeln Parameter sich unterscheidender reciproker Linien, worunter auch die gegebene Linie (3) sich befindet.

3) Da durch die Variation von m der Werth von x_1 (resp. x) allein geändert wird, so folgt, dass die einem und demselben Curvenpunkte entsprechenden Punkte des reciproken Systems auf einer zu der X-Achse parallelen Geraden sich befinden.

4) Aus der Zusammensetzung der Werthe von y_1, y lässt sich Folgendes schliessen: legt man die Berührenden an zwei sich entsprechende reciproke Punkte, so sind die Höhen, in welchen die Y-Achse von denselben geschnitten wird, den respectiven Ordinaten jener Punkte gleich, aber von entgegengesetzten Zeichen; hieraus folgt aber ferner:

5) Legt man eine beliebige der X-Achse parallele Gerade G und an den Durchschnittspunkten dieser mit jeder demselben Systeme gehörenden reciproken Curve die Tangenten an diese letztere, so laufen alle diese Berührenden in einem gewissen Punkte P der Y-Achse zusammen, dessen Ordinate, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen, selbstverständlich die gemeinschaftliche Ordinate der jenen Durchschnittspunkten entsprechenden reciproken Punkte ist. Der in den Elementen der analytischen Geometrie für die Ellipse angeführte Satz, worauf die Construction der Tangente beruht, und welcher auch für die beiden andern Kegelschnitte gilt, ist ein specieller Fall des obigen Satzes; indem ein Kegelschnitt mit einem variabeln Parameter ein reciprokes Curvensystem bildet.

6) Denkt man sich die Normalen an die oben erwähnten Durchschnittspunkte, so ist der geometrische Ort der successiven Durchschnitte derselben eine Parabel, deren Brennpunkt der Punkt P, und deren Scheiteltangente die Gerade G ist.

7) Nicht jedes System von Curven

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x_1, y_1, a) = 0,$$

welche von einander durch einen variabeln Parameter sich unterscheiden, besitzt auch eine gemeinschaftliche reciproke Curve; dies findet nur in sofern statt, als die durch Substitution der Werthe (1) von x_1, y_1 in (4) erhaltene Differentialgleichung eine reelle Curve darstellt. Da die Integration nicht immer zugänglich ist, so kann man auch zur Auffindung der gesuchten Gleichung x_1, y_1 direkt aus (2) und (4) eliminiren; lässt sich dann der Parameter a, durch gehörige Wahl von m, aus der Endgleichung fortschaffen, so stellt diese Gleichung die gesuchte reciproke Curve dar.

8) Die Ordnung einer Reciproken ist mindestens gleich der Anzahl der Maximal- und Minimalpunkte der ursprünglichen Curve, indem jedem dieser Punkte ein Durchschnitt der Reciproken mit der Y-Achse entspricht.

9) Bezeichnet x die gemeinschaftliche Abscisse zweier auf zwei reciproken Curven liegenden Punkte, x_1, y_1; x', y' die Coordinaten der diesen Punkten respective entsprechenden reciproken Punkte, so wird die Neigung der Berührenden an diese letztere respective durch die Formeln:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x}{m}, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{x}{m}$$

bestimmt, so dass dieselben als gleichgeneigt auf der X-Achse sich ergeben.

10) Es ist

$$\frac{dx}{dx_1} = m\frac{d^2y_1}{dx_1^2}, \quad \frac{dx_1}{dx} = m\frac{d^2y}{dx^2},$$

so dass

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad m^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 1.$$

Hieraus folgt, wenn ϱ, ϱ_1 die Krümmungshalbmesser, N; N_1 die Normalenlängen, ds, ds_1 die Bogenelemente zweier entsprechenden Punkte bezeichnen:

$$(6) \quad \ldots \quad \varrho\varrho_1 = m^2(1 + \frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{3}{2}}(1 + \frac{dy_1^2}{dx_1^2})^{\frac{3}{2}} = m^2 \cdot \frac{N^3}{y^3} \cdot \frac{N_1^3}{y_1^3},$$

oder auch

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho\frac{dx^3}{ds^3} \cdot \varrho_1\frac{dx_1^3}{ds_1^3} = m^2$$

und

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \varrho\frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds_1}\cdot\varrho_1\frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds_1}=\frac{m}{\frac{dx}{ds}}\cdot\frac{m}{\frac{dx_1}{ds_1}};$$

der geometrische Sinn dieser drei Gleichungen ist leicht zu sehen.

11) Es ist ferner

$$\frac{\varrho}{\varrho_1}\cdot\frac{dx}{dx_1}=\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{3}{2}}}{(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2})^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dx}{dx_1}=\frac{dx^3(1+\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{3}{2}}}{dx_1^3(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2})^{\frac{3}{2}}},$$

so dass

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \frac{ds^3}{ds_1^3}=\frac{\varrho dx}{\varrho_1 dx_1} \quad \text{oder} \quad \frac{ds^2}{ds_1^2}=\frac{\varrho\frac{dx}{ds}}{\varrho_1\frac{dx_1}{ds_1}};$$

also verhalten sich die Quadrate der Bogenelemente wie die Projectionen der Krümmungshalbmesser auf die Y-Achse.

12) Bezeichnen dF, dF_1 die entsprechenden Flächenelemente, so ergiebt sich:

$$(10) \quad \ldots \quad \frac{dF_1}{dF}=\frac{x_1dy_1}{xdy}=\frac{x_1\frac{dy_1}{dx_1}}{x\frac{dy}{dx}}\frac{dx_1}{dx}=\frac{dx_1}{dx}=m\frac{d^2y}{dx^2}.$$

13) Bezeichnen ω, ω_1 die Contingenzwinkel zweier reciproken Curven, dS, dS_1 die Flächenelemente, dV, dV_1 die Volumenelemente der durch Drehung jener Curven um die X-Achse entstandenen Rotationsflächen, so findet man

$$\frac{dV}{\omega dS^2}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dx}{\frac{ds^3}{\varrho}}=\frac{m}{4\pi dx dx_1}, \quad \frac{dV_1}{\omega_1 dS_1^2}=\frac{m}{4\pi dx dx_1},$$

woraus

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dV}{dV_1}=\frac{\omega.dS^2}{\omega_1.dS_1^2}.$$

14) Die Natur der reciproken Curven einer gegebenen Curve, steht in engem Zusammenhange mit der Lage der (rechtwinkeligen) Coordinatenachsen in Bezug auf die letztere. So findet man für die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

das System der reciproken Hyperbeln

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{mb}{a}\right)^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1;$$

indem der von der vorigen bloss durch die Vertauschung der Coordinaten-Achsen sich unterscheidenden Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

das System der reciproken Ellipsen

$$\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{\left(\frac{mb}{a}\right)^2}=1$$

entspricht. Es ist dabei zu bemerken, dass in beiden Fällen das Produkt $yy_1=\pm b^2$, was schon aus der analytischen Geometrie bekannt ist.

Das reciproke Curvensystem der Parabel $y^2=2ax$ bilden die gleichseitigen Hyperbeln $x_1y_1=-\frac{am}{2}$; der Parabel $x^2=2ay$ entsprechen aber die reciproken Parabeln $x_1^2=\frac{2a^3}{m^2}y_1$.

15) Aus (1), (2), (5) kann man auf die Natur der, singulären Punkten entsprechenden reciproken Punkte schliessen. So findet man z. B., dass im Allgemeinen einem $\frac{\text{Max.}}{\text{Min.}}$ ein Uebergang von der $\frac{\text{pos.}}{\text{neg.}}$ X-Seite auf die $\frac{\text{neg.}}{\text{pos.}}$ entspricht; einem Wendepunkt entspricht eine Spitze u. s. f. Dieselben Formeln können überhaupt dazu dienen, die Reciproke einer gegebenen Curve zu construiren, wenn die analytische Ableitung derselben unausführbar ist. So findet man für die Reciproke der Curve $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$, wenn $a>b\sqrt{2}$, die Gestalt Taf. I. Fig. 1. Die um den Winkel, dessen Tangente $=\frac{a}{m}$, gegen die X-Achse geneigten Geraden TT sind Asymptoten derselben.

II.

Zwei Flächen sind einander reciprok, wenn ihre respectiven Coordinaten durch die Relationen

$$(12) \quad \ldots \quad x_1 = mp, \quad y_1 = nq, \quad z_1 = px + qy - z$$

verbunden sind, wo p, q die partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ und m, n zwei Constanten bezeichnen. Daraus folgt:

$$(13) \quad \ldots \quad x = mp_1, \quad y = nq_1, \quad z = p_1 x_1 + q_1 y_1 - z_1;$$

p_1, q_1 bezeichnen die Differentialquotienten $\frac{dz_1}{dx_1}$, $\frac{dz_1}{dy_1}$.

Die für reciproke Linien aufgestellten Sätze 1) bis inclusive 8) lassen sich auf Flächen fast wörtlich übertragen. Es ist dabei zu bemerken, dass reciproke Flächen von zwei variabeln Parametern abhängen; dass die einem und demselben Punkte entsprechenden reciproken Punkte auf einer der XY-Ebene parallelen Ebene sich befinden; dass Tangenten durch Berührungsebenen und die Parabel von 6) durch zwei parabolische Cylinder

$$X^2 + 4px(Z - z_1) = 0, \quad Y^2 + 4qy(Z - z_1) = 0$$

zu ersetzen ist; p, q, x, y, z_1 sind als constant zu betrachten.

1) Bezeichnen ferner x, y; x_1, y_1 und x', y'; x_1', y_1' zwei reciproke Punktenpaare, so werden die Cosinus der Neigungen der Berührungsebenen an den Punkten x', y' und x_1, y_1 gegen die XY-Ebene respective durch

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p'^2 + q'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x_1'^2}{m^2} + \frac{y_1'^2}{n^2}}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2}}}.$$

ausgedrückt. Hieraus der Satz: Denkt man sich einen geraden elliptischen Cylinder

$$\frac{X^2}{m^2} + \frac{Y^2}{n^2} = C^2$$

und zu jedem Punkte der respectiven Durchschnittslinien desselben mit zwei einander reciproken Flächen den entsprechenden

reciproken Punkt, so sind die Berührungsebenen an diese letztere gleich geneigt gegen die XY-Ebene und ihre Neigung constant.

2) Die Punktenreihen mit gleichgeneigten Berührungsebenen bilden auf jeder Fläche ein besonderes, von der Lage der XY-Ebene abhängiges Curvensystem. Die gemeinschaftliche Differentialgleichung der horizontalen Projection derselben ergiebt sich durch Differentiation aus der Gleichung

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p^2+q^2 = \text{Constante}.$$

Man findet nämlich

$$(14^*) \quad \ldots\ldots \quad (ps+qt)\frac{dy}{dx}+pr+qs=0,$$

wenn $r=\frac{d^2z}{dx^2}$, $t=\frac{d^2z}{dy^2}$, $s=\frac{d^2z}{dxdy}$ gesetzt wird. Für die abwickelbaren Flächen zerlegt sich vorstehende Gleichung in die beiden folgenden:

$$p\sqrt{r}\pm q\sqrt{t}=0, \quad dx.\sqrt{r}+dy.\sqrt{t}=0,$$

wo das + oder — Zeichen zu nehmen, je nachdem s positiv oder negativ ist. Man erkennt übrigens leicht, dass diese Relationen die Erzeugenden der abwickelbaren Flächen charakterisiren, so dass für alle Punkte einer Erzeugenden $\frac{p^2}{q^2}=\frac{t}{r}=$ Constante ist.

3) Man findet nach bekannten Sätzen:

$$dx_1dy_1 = mn(rt-s^2)dxdy,$$
$$dxdy = mn(r_1t_1-s_1{}^2)dx_1dy_1;$$

woraus

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad m^2n^2(rt-s^2)(r_1t_1-s_1{}^2)=1.$$

Hieraus folgt, wenn ϱ, ϱ' und ϱ_1, ϱ_1' die Hauptkrümmungsradien der entsprechenden Punkte bezeichnen:

$$(16) \quad \ldots \quad \varrho\varrho'.\varrho_1\varrho_1' = m^2n^2(1+p^2+q^2)^2(1+p_1{}^2+q_1{}^2)^2,$$

oder auch

$$(17) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\varrho\varrho'}{(1+p^2+q^2)^2}\cdot\frac{\varrho_1\varrho_1'}{(1+p_1{}^2+q_1{}^2)^2}=m^2n^2.$$

Dies giebt die beiden Sätze:

Die beiden Hauptkrümmungsradien einer reciproken Fläche

sind gleichartig oder ungleichartig, je nachdem die entsprechenden Krümmungsradien der ursprünglichen Fläche selbst gleichartig oder ungleichartig sind;

und:

projicirt man die vier Hauptkrümmungsradien zweier sich entsprechenden Punkte auf die Z-Achse und dann auf sich selbst, so ist das Produkt der vier Projectionen constant.

4) Es ist ferner, wenn dF, dF_1 die entsprechenden Flächenelemente bezeichnen:

$$\frac{dF_1^2}{dF^2} = m^2n^2(rt-s^2)^2 . \frac{1+p_1^2+q_1^2}{1+p^2+q^2} = \frac{rt-s^2}{r_1t_1-s_1^2} . \frac{1+p_1^2+q_1^2}{1+p^2+q^2}$$

$$= \frac{\varrho_1\varrho_1'}{1+p_1^2+q_1^2} : \frac{\varrho\varrho'}{1+p^2+q^2},$$

oder, wenn $R^2 = \varrho\varrho'$, $R_1^2 = \varrho_1\varrho_1'$ gesetzt wird,

$$(18) \quad \ldots \quad dF : dF_1 = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} : \frac{R_1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}};$$

es verhalten sich demnach die Flächenelemente wie die Projectionen der geometrischen Mittel der Hauptkrümmungsradien auf die Z-Achse.

5) Bezeichnen dV, dV_1 die entsprechenden parallelepipedischen Volumenelemente, so folgt aus (18):

$$(19) \quad \ldots \quad dV : dV_1 = \frac{z . R}{1+p^2+q^2} : \frac{z_1 . R_1}{1+p_1^2+q_1^2};$$

der geometrische Sinn dieser Formel ist leicht zu fassen.

6) Für $m = n$, was der specielle Monge'sche Reciprocitäts fall ist, ergiebt sich

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{p}{q} = -\frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{y_1}{x_1} . \frac{dy}{dx} = -1,$$

und auch

$$\frac{y}{x} . \frac{dy_1}{dx_1} = -1,$$

so dass der Leitstrahl an einen reciproken Punkt senkrecht zur horizontalen Tangente an dem entsprechenden Punkte steht, oder auch, die durch jenen Leitstrahl gelegte Vertikalebene steht senk-

recht auf der Berührungsebene des entsprechenden Punktes. Betrachtet man den Coordinatenanfang als Pol, so haben die demselben Flächenpunkte entsprechenden Punkte der reciproken und der Fusspunktfläche dasselbe Azimuth.

7) Die reciproken Flächen der abwickelbaren Flächen reduciren sich auf krumme Linien; denn es findet für jene noch die Relation

$$f(p, q) = 0 \quad \text{oder} \quad f\left(\frac{x_1}{m}, \frac{y_1}{n}\right) = 0$$

statt. Für die Kegelflächen sind diese Linien ebene Curven; denn es folgt aus der Combination der Gleichung

$$p(x-\alpha) + (y-\beta) = z - \gamma$$

mit (12):

$$\frac{\alpha}{m}x_1 + \frac{\beta}{n}y_1 = z_1 + \gamma.$$

8) Den beiden Paraboloiden

$$\frac{y^2}{a} \pm \frac{z^2}{b} = 2x,$$

entsprechen respective die beiden Hyperboloide

$$\frac{ma}{n^2}y_1^2 \pm mb = -2x_1z_1,$$

oder durch gehörige Wahl der Achsen

$$\frac{ma}{n^2}y_1^2 \pm mb = -x_1'^2 + z_1'^2.$$

Zusätze. 1) Aus Formel (9) ergiebt sich, wenn dt das Zeitelement bezeichnet, woraus

$$(20) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\varrho} : \frac{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2}{\varrho_1} = \frac{dx}{ds} : \frac{dx_1}{ds_1},$$

folgende mechanische Eigenschaft der reciproken Linien:

> Bewegt sich ein materieller Punkt successive auf zwei reciproken Curven mit einer den Bogenincrementen ds, ds_1 proportionalen Geschwindigkeit, so verhalten sich die Drucke auf diese Kurven an den entsprechenden Punkten wie die Cosinus der Neigungen der respectiven Tangenten gegen die X-Achse.

2) Die durch (14), (14*) charakterisirten Kurven besitzen auch eine analoge mechanische Eigenschaft.

> Denkt man sich einen auf einer Fläche liegenden materiellen Punkt, welcher der Wirkung einer constanten, der Z-Achse parallelen Kraft, z. B. der Schwere, unterworfen ist, so ist der Druck auf jene Fläche constant, wenn der Punkt auf den Curven der gleichgeneigten Tangentialebenen sich bewegt; folglich sind auch die Drucke auf zwei reciproke Flächen, die entsprechenden Curven der gleichgeneigten Tangentialebenen entlang, einander gleich.

3) Die Gleichung (14) selbst kann als die endliche Gleichung der horizontalen Projectionen dieser letzteren Curven betrachtet werden, nachdem man den aus der Gleichung der gegebenen Fläche erhaltenen Werth von z darin substituirt hat. Man findet auf diese Weise in Bezug auf die Flächen zweiten Grades

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad Ax^2+By^2+Cz^2+2Dz=E$$

die Gleichung

$$(22) \quad \ldots \quad A(A+Ck^2)x^2+B(B+Ck^2)y^2=k^2(CE+D^2),$$

wo k^2 eine Constante bedeutet. Daraus folgt, dass die betrachteten Curven die Durchschnittslinien jener Flächen mit geraden Cylinderflächen zweiten Grades sind. Um die Natur dieser letzteren näher zu bestimmen, ist es nur nöthig in (21) die jeder Fläche zweiten Grades zukommenden Voraussetzungen zu machen. Alsdann ergeben sich für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

und die beiden Paraboloide

$$\frac{x^2}{a}\pm\frac{y^2}{b}=2z$$

respective die elliptischen Cylinder

$$\frac{a^2+k'^2}{a^4}x^2+\frac{b^2+k'^2}{b^4}y^2=1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2,$$

wenn $k'=\frac{c}{k}$ gesetzt wird. k und k' können von 0 bis ∞ wachsen. Es ist ferner zu bemerken, dass erstere Gleichung von c unabhängig ist, und, wenn A, B die beiden Halbachsen der durch dieselbe dargestellten Ellipse bezeichnen, das Verhältniss

$$\frac{A^2}{B^2}=\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{b^2+k'^2}{a^2+k'^2}<\frac{a^4}{b^4} \text{ und } >\frac{a^2}{b^2},$$

oder auch

$$\frac{a^2}{b^2}>\frac{A}{B}>\frac{a}{b}.$$

Man findet ferner für die beiden Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

die Gleichungen:

$$\frac{a^2-k'^2}{a^4}x^2+\frac{b^2-k'^2}{b^4}y^2=1, \quad \frac{k'^2-a^2}{a^4}x^2+\frac{k'^2-b^2}{b^4}y^2=1,$$

welche elliptische Cylinder darstellen, so lange $\begin{matrix}k'<b\\k'>a\end{matrix}$, hyperbolische aber, wenn $a>k'<b$, was auch mit der Natur dieser Flächen vollkommen übereinstimmt. k' kann respective von 0 bis a und von b bis ∞ wachsen. Man kann übrigens leicht einsehen, dass für beide Hyperboloide die Maximalwerthe der Neigungswinkel den Minimalwerthen von k' entsprechen und umgekehrt. Bei allem Vorangegangenen wurde $a>b$ vorausgesetzt.

4) Wenn zwei reciproke Curven sich schneiden, so haben die den Durchschnitten respeticve entsprechenden reciproken Punkte eine gemeinschaftliche Berührende. Bezeichnen nämlich x_1, y_1 und x_2, y_2 die respectiven Coordinaten dieser letzteren Punkte, x, y die des Durchschnittspunktes der reciproken Curven, so ist:

$$x=m\frac{dy_1}{dx_1}=m\frac{dy_2}{dx_2}, \quad y=x_1\frac{dy_1}{dx_1}-y_1=x_2\frac{dy_2}{dx_2}-y_2,$$

woraus die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangente:

$$Y=X\frac{dy_1}{dx_1}-(x_1\frac{dy_1}{dx_1}-y_1)=X\frac{dy_2}{dx^2}-(x_2\frac{dy_2}{dx_2}-y_2)=\frac{x}{m}X-y.$$

Aehnliches findet statt für sich schneidende reciproke Flächen. Bezeichnen wieder x, y, z die Coordinaten eines der Durchschnittspunkte dieser Flächen, $x_1y_1z_1p_1q_1$ und $x_2y_2z_2p_2q_2$ die den respectiven reciproken Punkten entsprechenden Coordinaten und partiellen Differentialquotienten, so ist:

$$x=mp_1=mp_2, \; y=nq_1=nq_2, \; z=p_1x_1+q_1y_1-z_1=p_2x_2+q_2y_2-z_2,$$

so dass die Gleichung der gemeinschaftlichen Berührungsebene

$$Z = p_1X + q_1Y - (p_1x_1 + q_1y_1 - z_1) = p_2X + q_2Y - (p_2x_2 + q_2y_2 - z_2)$$

oder

$$Z = \frac{x}{m}X + \frac{y}{n}Y - z.$$

Der geometrische Ort der successiven Durchschnittslinien dieser gemeinschaftlichen Berührungsebenen ist eine abwickelbare Fläche, welche die beiden reciproken Flächen umhüllt.

II.

Die Maxima der Function $\frac{\sin x}{x}$.

Von

Herrn *E. Bacaloglo*

in Leipzig.

Im Bd. CX. der Annalen der Physik von Poggendorff (Juliheft für 1860) habe ich gezeigt, wie sich die Maxima des gebeugten Lichtes bestimmen lassen. Die Bestimmung der Maxima der Function $\frac{\sin x}{x}$ ist dazu erforderlich, und wurde a. a. O. genügend besprochen. Dieselbe scheint mir indessen, auch vom rein mathematischen Standpunkte aus betrachtet, interessant genug zu sein, um den Gegenstand eines besonderen Aufsatzes zu bilden.

Die den Maxima der Function $\frac{\sin x}{x}$ entsprechenden Werthe des Bogens x besitzen die merkwürdige Eigen-

schaft, gleich der Tangente desselben zu sein. Denn man findet

$$\frac{d.\frac{\sin x}{x}}{dx}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

und als Bedingung des Maximums

1) . . . . $x=\operatorname{tang} x.$

Dass die entsprechenden Werthe von $\frac{\sin x}{x}$ Maximalwerthe sind, ergiebt sich aus

$$\frac{d^2.\frac{\sin x}{x}}{dx^2}=-\frac{2}{x^3}(x\cos x-\sin x)-\frac{\sin x}{x},$$

indem für $x\cos x-\sin x=0$ der zweite Differentialquotient das entgegengesetzte Vorzeichen hat von dem der Function $\frac{\sin x}{x}$.

Man wird erkennen, dass x eine gewisse Anzahl n von halben Kreisumfängen enthält, und wenn z einen Winkel $<\frac{\pi}{2}$ bezeichnet, so ist

2) . . . . $x=n\pi+z=\operatorname{tang} z.$

Um aus dieser Gleichung eine algebraische, zur Berechnung von z, zu erhalten, wird man, da $z>\frac{\pi}{4}$ ist, $\frac{\pi}{2}-z$ in eine convergente Reihe

$$\frac{\pi}{2}-z=\operatorname{cotg} z-\frac{\operatorname{cotg}^3 z}{3}+\frac{\operatorname{cotg}^5 z}{5}-\frac{\operatorname{cotg}^7 z}{7}+\ldots.$$

oder

3) . . . . $(n+\frac{1}{2})\pi-x=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{7x^7}+\ldots.$

entwickeln. Da die Reihe eine ziemlich stark fallende ist, so kann man gleich mit dem ersten Gliede abbrechen und es wird

4) . . . . $(n+\frac{1}{2})\pi-x=\frac{1}{x}.$

Hieraus mit Ausschluss der negativen Werthe von z:

$$5)\quad x=(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\sqrt{[(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^2-1}$$

$$=\left[\frac{2n+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2-0{,}4052847015}\right]\cdot\frac{\pi}{2},$$

oder, wenn man die Wurzelgrösse in eine Reihe entwickelt:

6)

$$x=(n+\tfrac{1}{2})\pi-\frac{\frac{1}{2}}{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^3}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{4.6}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^5}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{4.6.8}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^7}-\ldots$$

Um den Grad der Annäherung dieser Formel zu berechnen, darf man nur die richtige Gleichung

$$7)\;\ldots\ldots\ldots\;(n+\tfrac{1}{2})\pi-x_1=\frac{1}{x_1}-\varepsilon$$

auflösen, wo ε eine positive Zahl ist und die Summe der vernachlässigten Glieder der Reihe 3) bedeutet, d. i.

$$\varepsilon=\frac{1}{3x^3}-\left(\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{7x^7}\right)-\left(\frac{1}{9x^9}-\frac{1}{11x^{11}}\right)-\ldots.$$

$$=\left(\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}\right)+\left(\frac{1}{7x^7}-\frac{1}{9x^9}\right)+\ldots.$$

woraus

$$8)\;\ldots\ldots\ldots\;\frac{1}{3x^3}>\varepsilon>\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}.$$

Aus 7) folgt:

$$x_1=(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{[(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^2-1},$$

oder

$$x_1=(n+\tfrac{1}{2})\pi+\varepsilon-\frac{\frac{1}{2}}{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^3}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{4.6}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^5}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.6.8}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^7}-\ldots,$$

woraus in Verbindung mit 6):

$$x_1 - x = \varepsilon + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^3} - \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^3}\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{4.6}\left[\frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^2} - \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^5}\right] + \ldots.$$

Es ist demnach

$$x_1 - x < \varepsilon + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{(n+\ )\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\right]$$

$$+ \frac{1}{8[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^3}\left[1 + \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^2} + \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^4} + \ldots\right]$$

$$- \frac{1}{8[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^3}\left[1 + \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^2} + \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^4} + \ldots\right],$$

oder auch, wenn die in den Klammern stehenden geometrischen Reihen summirt werden:

$$9) \ldots\ldots x_1 - x < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{[(n+\frac{1}{2})\pi][(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon]}$$

$$+ \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\cdot\frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\pi]^2 - 4} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon}\cdot\frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon]^2 - 4}.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich:

$$x_1 - x > \varepsilon + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\right]$$

$$+ \frac{1}{8}\frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^3}\left[1 + \frac{1}{2[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^2} + \frac{1}{4[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^4} + \ldots\right]$$

$$- \frac{1}{8}\frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^3}\left[1 + \frac{1}{2[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^2} + \frac{1}{4[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}]^4} + \ldots\right],$$

oder auch

$$10) \quad \ldots\ldots \quad x_1 - x > \varepsilon + \frac{\varepsilon}{[(n+\frac{1}{2})\pi][(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon]}$$

$$+ \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\pi]^2 - 2} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon} \cdot \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon]^2 - 2}.$$

Berechnet man also ε aus der Gleichung

$$11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon = \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$$

genau bis auf 0,000005 für den ungünstigsten Fall $n = 1$, und addirt den Ausdruck

$$\varepsilon\left(1 + \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\pi][(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon]}\right)$$

zu dem aus 5) oder 6) mit derselben Schärfe gefundenen Werthe von x, so erhält man einen von dem wahren Werthe um eine Grösse differirenden Werth, welche kleiner ist als die Differenz

$$\frac{1}{\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\}\{[(n+\frac{1}{2})\pi]^2 - 4\}\{[(n+\frac{1}{2})\pi]^2 - 2\}}$$

$$- \frac{1}{\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\}\{[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon]^2 - 4\}\{[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon]^2 - 2\}}$$

der in den Ungleichungen 9) und 10) rechts stehenden Grössen, also für $n = 1$ kleiner als 2″. Es ist demnach der vollständige Ausdruck für x

$$12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = (n+\tfrac{1}{2})\pi$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^3} + \frac{\frac{1.3}{4.6}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^5} + \frac{\frac{1.3.5}{4.6.8}}{[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]^7} + \ldots\right]$$

$$+ \left(\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{[(n+\frac{1}{2})\pi][(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon]}\right)$$

$$= (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$-\left[\frac{0.6366198}{2n+1} + \frac{0.2580117}{(2n+1)^2} + \frac{0.2091368}{(2n+1)^5} + \frac{0.2118998}{(2n+1)^7} + \frac{0.2404633}{(2n+1)^9} + \ldots\right]$$

$$+ \left(\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{[(2n+1)\frac{\pi}{2}][(2n+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon]}\right).$$

Die in den Klammern stehende Reihe ist leicht zu berechnen, und da jedes Glied derselben grösser ist als die Summe sämmtlicher folgender Glieder, so kann man mit demjenigen Gliede abbrechen, welches die gewünschte Annährung giebt. Bei der Berechnung des Correctionsgliedes wendet man den aus der Reihe folgenden genäherten Werth von x und nöthigenfalls die bekannten Annäherungsmethoden an. Es braucht übrigens kaum bemerkt zu werden, dass man die gefundenen Resultate mit $\frac{180^0}{\pi}$ multipliciren muss, um dieselben in Graden ausgedrückt zu erhalten. Auf diese Weise ist folgende Tabelle berechnet.

n	Werthe von x ausgedrückt in Theilen des Halbmessers	Werthe von x ausgedrückt in Graden (mit einem Fehler < 1")	Differenzen	Entsprechende Maximalwerthe von $u=\frac{\sin x}{x}$
1	4.493408	257° 27′ 12″	185° 10′ 16″	−0.21723
2	7.725256	442° 37′ 28″	182° 8′ 8″	+0.12837
3	10.904130	624° 45′ 36″	181° 10′ 25″	−0.09132
4	14.066198	805° 56′ 1″	180° 44′ 35″	+0.07091
5	17.220760	986° 40′ 36″	180° 30′ 47″	−0.05797
6	20.371308	1167° 11′ 23″	180° 22′ 32″	+0.04903
7	23.519453	1347° 33′ 55″	180° 17′ 14″	−0.04248
8	26.666063	1527° 51′ 9″	180° 13′ 35″	+0.03747
9	29.811599	1708° 4′ 44″	180° 10′ 59″	−0.03352
10	32.956394	1888° 15′ 43″	180° 9′ 5″	+0.03033
11	36.100622	2068° 24′ 48″	180° 7′ 37″	−0.02769
12	39.244427	2248° 32′ 25″		+0.02547

Für $n > 6$ genügt schon die abgekürzte Formel

$$13)\ .\quad x=(2n+1)\frac{\pi}{2}-\left(\frac{0.6366198}{2n+1}+\frac{0.2580117}{(2n+1)^3}\right)+\frac{1}{3x^3}.$$

Es ist zu bemerken, dass die Maximalwerthe der Function $u=\frac{\sin x}{x}$ nach 1) auch durch $u=\cos x$ ausgedrückt werden können, also proportional dem Cosinus der entsprechenden Werthe von x sind.

III.

Bemerkungen über Koppe's Obelisken und Wittstein's Prismatoid.

Von

Herrn *C. A. Bretschneider,*

Prof. am Gymnasium zu Gotha.

In einer vor wenigen Wochen erschienenen kleinen Monographie hat Herr Professor Wittstein der elementaren Stereometrie eine recht schätzbare Erweiterung verliehen durch Einführung eines neuen Körpers, der von ihm Prismatoid genannt wird und noch bedeutend allgemeiner ist, als der früher von Koppe angegebene Obelisk. Die Schwierigkeiten, welche letzterer einer elementaren und dabei doch allgemeinen und strengen Behandlung entgegensetzt, sind bekannt und beruhen vornehmlich auf der Nothwendigkeit, die sogenannte Neben- oder Ergänzungsfigur in Betracht zu ziehen. Herr Professor Wittstein hat sich deshalb veranlasst gefunden, eine Darstellung aufzusuchen, bei welcher jene Figur gänzlich aus dem Spiele bleibt, und ist dadurch auf das Prismatoid geleitet worden. Auch ich habe im Unterrichte jene Schwierigkeit empfunden und daher schon seit Jahren die Inhaltsbestimmung des Obelisken auf einem ganz anderen Wege gegeben, als dem von Koppe eingeschlagenen. Der Beweis, zu dem ich gelangt war, und der für den Obelisken wie für das Prismatoid gleichmässig gilt, ist so allgemein und streng und dabei doch so äusserst einfach, dass ich es für unmöglich hielt, dass er nicht auch Anderen bekannt sein sollte. Indessen habe ich durch eine Vergleichung vieler neu erschienenen Lehrbücher der Geometrie, so wie auch durch den Inhalt des Wittstein'schen

Schriftchens, die Ueberzeugung gewonnen, dass dem nicht so ist, und theile deshalb im Folgenden meine Art der Darstellung des fraglichen Gegenstandes mit.

1.

Parallelogramme, Dreiecke und Trapeze, da sie sämmtlich aus einem Parallelstreifen geschnitten werden können, mögen der Kürze halber Streifenfiguren heissen, und die in ihnen durch die Mitten der Schenkelseiten zu den Grundlinien gezogenen Parallelen sollen Mittellinien genannt werden.

Ist nun die Grundfläche einer Pyramide eine Streifenfigur und man legt durch die Mittellinie der letzteren und die Spitze des Körpers eine Ebene, so mag die dadurch entstehende Schnittfigur die Mittelfigur des Körpers heissen, (z. B. OAB Taf. I. Fig. 2.); und es ist augenblicklich bewiesen, dass die Ebene der letzteren von den ausser ihr liegenden Kanten oder Ecken der Grundfläche (z. B. C oder EF) gleichweit absteht. Denkt man sich daher durch diese Kanten oder Ecken zwei Parallelebenen zur Mittelfigur gelegt, so ist der senkrechte Abstand derselben von einander das Doppelte von dem Abstande jeder von ihnen und der Mittelfigur, und mag die zur letzteren zugeordnete Höhe genannt werden.

2.

Jede Pyramide, welche auf einer Streifenfigur steht, ist das Doppelte einer zweiten Pyramide, welche die Mittelfigur der ersten und deren zugeordnete Höhe resp. zu ihrer Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Ist die Grundfläche der gegebenen Pyramide ein Dreieck CEF (Taf. I. Fig. 2, a)) so ist das Volumen

$$OCAB = \tfrac{1}{4}OCEF = \tfrac{1}{3}OAB.\tfrac{1}{2}h,$$

wenn man mit h die OAB zugeordnete Höhe bezeichnet. Also wird

$$OCEF = 2.\frac{OAB.h}{3}.$$

Ist aber die Grundfläche der gegebenen Pyramide ein Parallelogramm oder Trapez (Taf. I. Fig. 2, b)), so zerlege man den Körper durch die Diagonalebene OCF in zwei dreiseitige Pyramiden. Dann hat man nach dem eben Bewiesenen:

$$OCEF = 2 \cdot \frac{OAJ . h}{3}, \quad OCDF = 2 \cdot \frac{OJB . h}{3};$$

also:

$$OCDEF = 2 \cdot \frac{h}{3}(OAJ + OJB) = 2 \cdot \frac{h}{3} \cdot OAB.$$

3.

In einer Ebene sei ein beliebiges mEck gegeben ($ABCD$ Taf. I. Fig. 3.), und in einer zweiten zur vorigen parallelen Ebene ein beliebiges nEck (EFG). Beide Figuren seien mit einander durch Dreiecke verbunden, von denen jedes eine Seitenlinie des einen Vieleckes zur Grundlinie und eine Spitze des anderen Vieleckes zur Gegenspitze hat. Der auf solche Weise von den beiden Vielecken als Grundflächen und diesen Dreiecken als Seitenflächen eingeschlossene Körper wird von Wittstein **Prismatoid** genannt; der senkrechte Abstand beider Grundflächen von einander die **Höhe** desselben. Im Allgemeinen wird dieser Körper $m+n$ Seitendreiecke enthalten. Wenn aber zufällig eine oder mehrere Seiten der einen Grundfläche eben so vielen der anderen parallel werden, so fallen die zu diesen Kantenpaaren gehörigen Paare von Dreiecken in eine einzige Ebene zusammen und bilden in ihr ein Parallelogramm oder Trapez. Im Allgemeinen kann man daher sagen: „ein Prismatoid ist ein Körper, der von zwei beliebigen, einander parallelen, Vielecken als Grundflächen und von lauter Streifenfiguren als Seitenflächen eingeschlossen ist."

Wird ein Prismatoid von einer durch die Mitte seiner Höhe parallel zu den Grundflächen gelegten Ebene geschnitten, so entsteht eine Figur, welche so viele Seiten hat, als der Körper Seitenflächen, und welche Mittelfigur heissen mag.

4.

Der Inhalt des Prismatoides ist gleich der Summe eines Prisma und einer Pyramide, welche mit jenem von gleicher Höhe sind, von denen aber das Prisma die Mittelfigur, und die Pyramide den Ueberschuss der halben Summe der Grundflächen über die Mittelfigur zur Grundfläche hat.

Beweis. Man nehme in der Fläche der Mittelfigur $abcdefg$ (Taf. I. Fig. 3.) einen beliebigen Punkt O an und ziehe von ihm

nach allen Ecken des Körpers Gerade. Es entsteht dadurch eine Anzahl von ebenen Dreiecken, deren jedes eine Kante des Körpers zur Grundlinie und zwei dieser Verbindungslinien zu Schenkeln hat. Die Flächen dieser Dreiecke zerlegen das Prismatoid zunächst in so viele Pyramiden, als Grenzflächen vorhanden sind, und zwar bilden diese Grenzflächen die einzelnen Grundflächen der Pyramiden, während O die gemeinsame Spitze ist. Die Inhalte sämmtlicher Pyramiden sind aber augenblicklich gefunden. Denn zuerst haben die auf der unteren Grundfläche $ABCD = G$ und auf der oberen $EFG = g$ stehenden Pyramiden die halbe Höhe des Prismatoides. Nennt man also letztere h, so ist:

$$OABCD = \tfrac{1}{6}Gh, \quad OEFG = \tfrac{1}{6}gh.$$

Die auf den Seitenflächen stehenden Pyramiden aber werden von der Mittelfigur des Körpers so geschnitten, dass der in jede Pyramide fallende Theil derselben die Mittelfigur dieser Pyramide ist. Man hat also nach 2.:

$$OABE = \tfrac{2}{3}h.Oab,$$
$$OBEC = \tfrac{2}{3}h.Obc,$$
$$OCEF = \tfrac{2}{3}h.Ocd,$$
u. s. w.

Es ist also die Summe der auf sämmtlichen Seitenflächen stehenden Pyramiden gleich

$$\tfrac{2}{3}h(Oab + Obc + Ocd + \ldots.) = \tfrac{2}{3}h.M,$$

wenn man die Fläche der Mittelfigur $abcdefg$ mit M bezeichnet. Das ganze Prismatoid P ist demnach gleich

$$P = \tfrac{1}{3}h\left(\frac{G+g}{2} + 2M\right) = hM + \tfrac{1}{3}h\left(\frac{G+g}{2} - M\right).$$

Mit diesem Beweise, der fast unmittelbar der blossen Anschauung entnommen wird, und daher selbst niederen Lehranstalten, wie Gewerbeschulen u. s. w., zugänglich gemacht werden kann, dürfte meiner Ueberzeugung nach wohl allen Ansprüchen genügt werden, die man bei einem Gegenstande von so elementarer Natur und so weit greifender Anwendbarkeit erheben kann. Das Weitere hierüber kann in dem Wittstein'schen Schriftchen nachgesehen werden*).

---

*) Das Prismatoid. Eine Erweiterung der elementaren Stereometrie. Von Th. Wittstein. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung. 24 S. 4. (10 Gr.).

IV.

Auflösung einiger Questions der nouvelles Annales de MM. Terquem et Gerono.

Mitgetheilt von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

A. Ueber den Ort, von welchem aus ein Kegel zweiten Grades unter einem rechten Winkel gesehen wird.

O ist die Spitze des Kegels $m^2x^2+n^2y^2=z^2$; $M(\xi\eta\zeta)$ und $M'(\xi'\eta'\zeta')$ sind zwei Punkte auf demselben. Man setze zur Abkürzung:

$$m^2\frac{\xi}{\zeta}=a,\quad n^2\frac{\eta}{\zeta}=b;\quad m^2\frac{\xi'}{\zeta'}=a',\quad n^2\frac{\eta'}{\zeta'}=b';$$

so finden, weil die Punkte M und M' auf dem Kegel liegen, folgende Gleichungen statt:

$$1)\qquad \frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}=1,\quad \frac{a'^2}{m^2}+\frac{b'^2}{n^2}=1.$$

Die Gleichungen der Ebenen, welche den Kegel in den Geraden OM und OM' berühren, sind:

$$2)\qquad z=ax+by,\quad z=a'x+b'y.$$

Aus 1) und 2) erhält man durch Elimination zuerst von b und dann von a:

$$3)\qquad \frac{z^2-n^2y^2}{m^2x^2+n^2y^2}m^2-2xz\frac{m^2}{m^2x^2+n^2y^2}a+a^2=0,$$

$$4)\qquad \frac{z^2-m^2x^2}{m^2x^2+n^2y^2}n^2-2yz\frac{n^2}{m^2x^2+n^2y^2}b+b^2=0.$$

Aehnlich sind die Gleichungen für a' und b'; mithin sind die zwei Wurzeln von 3) gleich a und a', und diejenigen von 4) gleich b und b'. Wir wollen nun zunächst annehmen, dass die Tangential-Ebenen 2) auf einander senkrecht stehen, so findet die Bedingungsgleichung statt:

$$5)\qquad aa'+bb'+1=0.$$

Aus 3) erhält man für das Produkt beider Wurzeln das Glied ohne a, also:

$$aa'=\frac{z^2-n^2y^2}{m^2x^2+n^2y^2}m^2,$$

ebenso aus 4):

$$bb'=\frac{z^2-m^2x^2}{m^2x^2+n^2y^2}n^2;$$

mithin nach 5):

$$6)\qquad m^2(1-n^2)x^2+n^2(1-m^2)y^2+(m^2+n^2)z^2=0.$$

Sollen aber die Berührungslinien OM und OM' auf einander senkrecht stehen, so muss die Gleichung statt finden:

$$7)\qquad \frac{aa'}{m^4}+\frac{bb'}{n^4}+1=0,$$

oder

$$8)\qquad m^4(n^2-1)x^2+n^4(m^2-1)y^2+(m^2+n^2)z^2=0.$$

Aus 6) ergibt sich der Satz (Lehrsätze und Aufgaben von Magnus, S. 321.):

> Die Durchschnittslinie von zwei zu einander senkrechten Tangential-Ebenen eines Kegels vom zweiten Grade bewegt sich ebenfalls auf einem Kegel zweiten Grades.

Da die Tangential-Ebenen (Erzeugenden) des Erzeugungskegels senkrecht stehen auf den Erzeugenden (Tangential-Ebenen) des gegebenen Kegels, so lassen sich durch Uebertragung auf den Ergänzungskegel aus manchen Sätzen über den Kegel neue ableiten, wobei man zu berücksichtigen hat, dass einer durch die Spitze gehenden Geraden (Ebene) des ersten Kegels eine durch die

Spitze gehende Ebene (Geraden) des zweiten entspricht (Chasles, Ac. de Bruxelles 1830). Wir leiten also aus dem vorigen Satz diesen ab:

Die Ebene von zwei zu einander senkrechten Erzeugenden eines Kegels vom zweiten Grade umhüllt auch einen solchen Kegel.

Aus 8) folgt:

Die Durchschnittslinie von zwei Tangential-Ebenen eines Kegels vom zweiten Grade, deren Berührungslinien auf einander senkrecht stehen, bewegt sich auf einem Kegel zweiten Grades.

Mit Hülfe des Ergänzungskegels findet man weiter:

Die Ebene zweier Erzeugenden, deren Tangential-Ebenen auf einander senkrecht stehen, umhüllt einen Kegel zweiten Grades.

Für die sphärischen Kegelschnitte (Durchschnitte eines Kegels mit einer concentrischen Kugel) ergibt sich hiernach folgende Zusammenstellung:

Die Spitze eines von zwei Bögen grösster Kreise gebildeten rechten Winkels, welche einen sphärischen Kegelschnitt umhüllen, beschreibt einen zweiten sphärischen Kegelschnitt. Der Quadrant eines grössten Kreises, dessen Endpunkte sich auf einem sphärischen Kegelschnitt bewegen, umhüllt auch einen solchen Kegelschnitt. Zwei weitere Bögen grösster Kreise, welche den ersten sphärischen Kegelschnitt in den Endpunkten des Quadranten tangiren, schneiden sich ebenfalls auf einem sphärischen Kegeschnitt. Wenn zwei zu einander rechtwinklige Bögen grösster Kreise einen sphärischen Kegelschnitt tangiren, so umhüllt ein dritter grösster Kreis, welcher durch die Berührungspunkte geht, wieder einen sphärischen Kegelschnitt.

B. Von der Aufgabe: „den Ort zu finden, von welchem aus ein Kegel zweiten Grades unter einem gegebenen schiefen Winkel gesehen wird", theilte mir Herr Professor Baur an der polytechnischen Schule in Stuttgart folgende Lösung mit.

Gleichung des Kegels:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0;$$

Gleichung der Tangential-Ebene im Punkte xyz nach den laufenden Coordinaten x_1, y_1, z_1:

$$\frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=0,$$

oder

$$ux_1+vy_1+wz_1=0 \text{ mit der Bedingung } Au^2+Bv^2+Cw^2=0.$$

Die beiden durch einen Punkt xyz an den Kegel gelegten Tangential-Ebenen liefern also vier Gleichungen folgender Art:

$$1)\quad \begin{aligned} u_1x+v_1y+w_1z&=0,\\ u_2x+v_2y+w_2z&=0; \end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned} Au_1{}^2+Bv_1{}^2+Cw_1{}^2&=0,\\ Au_2{}^2+Bv_2{}^2+Cw_2{}^2&=0. \end{aligned}$$

Der Winkel ε zwischen beiden Ebenen wird gegeben durch folgende Gleichung:

$$\cos\varepsilon=\frac{u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2}{\sqrt{u_1{}^2+v_1{}^2+w_1{}^2}\sqrt{u_2{}^2+v_2{}^2+w_2{}^2}},$$

oder auch

$$3)\quad \begin{aligned} &(u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2)^2\operatorname{tg}^2\varepsilon\\ &=(v_1w_2-v_2w_1)^2+(w_1u_2-w_2u_1)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2. \end{aligned}$$

Aus 1) ergibt sich:

$$4)\quad \frac{v_1w_2-v_2w_1}{x}=\frac{w_1u_2-w_2u_1}{y}=\frac{u_1v_2-u_2v_1}{z};$$

ferner findet sich:

$$\begin{aligned} &C(w_1u_2-w_2u_1)^2+B(u_1v_2-u_2v_1)^2\\ &=u_1{}^2(Bv_2{}^2+Cw_2{}^2)+u_2{}^2(Bv_1{}^2+Cw_1{}^2)-2u_1u_2(Bv_1v_2+Cw_1w_2) \end{aligned}$$

oder vermöge 2):

$$\begin{aligned} &=-u_1{}^2.Au_2{}^2-u_2{}^2.Au_1{}^2-2u_1u_2(Bv_1v_2+Cw_1w_2)\\ &=\quad u_1u_2(-2Au_1u_2-2Bv_1v_2-2Cw_1w_2). \end{aligned}$$

Setzt man

$$-2Au_1u_2-2Bv_1v_2-2Cw_1w_2=P$$

und schreibt die zwei weiteren Gleichungen, welche sich aus der letzten durch Vertauschung der Buchstaben ableiten lassen, so hat man:

$$C(w_1u_2-w_2u_1)^2+B(u_1v_2-u_2v_1)^2=u_1u_2P,$$
$$A(u_1v_2-u_2v_1)^2+C(v_1w_2-v_2w_1)^2=v_1v_2P,$$
$$B(v_1w_2-v_2w_1)^2+A(w_1u_2-w_2u_1)^2=w_1w_2P$$

In Folge dessen geben die Gleichungen 4):

$$5)\quad \frac{(v_1w_2-v_2w_1)^2}{x^2}=\frac{(w_1u_2-w_2u_1)^2}{y^2}=\frac{(u_1v_2-u_2v_1)^2}{z^2}$$
$$=\frac{u_1u_2P}{Cy^2+Bz^2}=\frac{v_1v_2P}{Az^2+Cx^2}=\frac{w_1w_2P}{Bx^2+Ay^2}.$$

Die drei letzten Glieder geben, wenn

$$\pm\sqrt{-4ABC\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)}=R$$

ist:

$$\frac{u_1u_2}{Cy^2+Bz^2}=\frac{v_1v_2}{Az^2+Cx^2}=\frac{w_1w_2}{Bx^2+Ay^2}$$
$$=\frac{-2Au_1u_2-2Bv_1v_2-2Cw_1w_2}{-2A(Cy^2+Bz^2)-2B(Az^2+Cx^2)-2C(Bx^2+Ay^2)}=\frac{P}{R^2},$$

weshalb diese Glieder ersetzt werden können durch:

$$\left(\frac{u_1u_2}{Cy^2+Bz^2}R\right)^2=\left(\frac{v_1v_2}{Az^2+Cx^2}R\right)^2=\left(\frac{w_1w_2}{Bx^2+Ay^2}R\right)^2.$$

Hiernach verwandelt sich 5) in

$$\frac{v_1w_2-v_2w_1}{x}=\frac{w_1u_2-w_2u_1}{y}=\frac{u_1v_2-u_2v_1}{z}$$
$$=\frac{u_1u_2}{Cy^2+Bz^2}R=\frac{v_1v_2}{Az^2+Cx^2}R=\frac{w_1w_2}{Bx^2+Ay^2}R.$$

Ersetzt man demgemäss in 3) die Ausdrücke mit u, v, w durch ihre Proportionalen, so erhält man als Gleichung des verlangten Orts:

$$0=\frac{1}{R^2}\{(B+C)x^2+(C+A)y^2+(A+B)z^2\}^2\operatorname{tg}^2\varepsilon-x^2-y^2-z^2$$

oder nach der Bedeutung von R:

$$6)\quad 0=\{(A+B+C)(x^2+y^2+z^2)-Ax^2-By^2-Cz^2\}^2$$
$$+4ABC\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)(x^2+y^2+z^2)\operatorname{cotg}^2\varepsilon.$$

Der Kegel ist also vom vierten Grade, weil er ebensowohl dem Winkel $\pi-\varepsilon$ als dem Winkel ε genügt.

C. Eine Ellipse erzeugt durch Drehung um eine in ihrer Ebene befindliche Gerade einen Wulst, dessen Schnitt mit einer doppelten Berührungs-Ebene sich auf einer zur Drehungsaxe senkrechten Ebene in zwei Ellipsen projicirt, welche einen gemeinschaftlichen Brennpunkt in der Drehungsaxe haben.

Beweis. (Von Herrn Professor Baur). Der Kegelschnitt

$$1) \qquad 0=Ax^2+Bz^2+2Cxz+2Dx+2Ez+K$$

wird von der Geraden $z=mx$ berührt, wenn die Gleichung

$$(A+2Cm+Bm^2)x^2+2(D+Em)x+K=0$$

zwei gleiche und reelle Wurzeln hat, d. h. wenn

$$(D+Em)^2=K(A+2Cm+Bm^2);$$

und beide Werthe von m, welche aus letzterer Gleichung folgen, werden gleich gross aber entgegengesetzten Zeichens, wenn $ED=KC$; es wird nämlich:

$$m^2=\frac{AK-D^2}{E^2-BK}=\frac{AKC-CD^2}{CE^2-CBK}=\frac{AED-CD^2}{CE^2-BED}=\frac{D}{E}\cdot\frac{AE-CD}{CE-BD}.$$

Unter dieser Voraussetzung erhalten die beiden aus dem Ursprung an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten von entgegengesetzten Seiten her gleiche Neigung gegen die x-Axe. Die Halbmesser der Parallelkreise, in welchen der Wulst von einer im Abstand z von der xy-Ebene zu letzterer parallelen Ebene geschnitten wird, werden durch die Wurzeln folgender Gleichung nach r angegeben:

$$Ar^2+Bz^2+2Crz+2Dr+2Ez+K=0.$$

Setzt man $z=mx$ und $x=r\cos u$, so ergibt sich als Polargleichung der Projektion der Schnittkurve der Ebene $z=mx$ mit dem Wulst folgende zwischen r und u:

$$0=(A+2Cm\cos u+Bm^2\cos^2 u)r^2+2(D+Em\cos u)r+K.$$

indem man in 1) $x=r\cos u$ und $z=mr\cos u$ setzt.

Man setze

$$p=-\frac{E}{C},\quad e^2=\frac{BE}{CD}m^2=\frac{B}{C}\cdot\frac{AE-CD}{CE-BD}$$

und

$$e^2\cos^2\alpha = \frac{E^2}{D^2}m^2 = \frac{E}{D}\cdot\frac{AE-CD}{CE-BD},$$

wodurch

$$e^2\sin^2\alpha = \frac{AE-CD}{CE-BD}\left(\frac{B}{C}-\frac{E}{D}\right) = 1-\frac{AE}{CD}$$

wird, so verwandelt sich die vorige Gleichung in folgende:

$$0 = (1-e^2\sin^2\alpha+2e\cos\alpha\cos u+e^2\cos^2 u)r^2-2pr(1+e\cos\alpha\cos u)+p^2$$

$$=\{(1+e\cos\alpha\cos u)^2-e^2\sin^2\alpha\sin^2 u\}r^2$$

$$-pr\{1+e\cos\alpha\cos u+e\sin\alpha\sin u+1+e\cos\alpha\cos u-e\sin\alpha\sin u\}+p^2$$

$$=\{r(1+e\cos(\alpha-u))-p\}\{r(1+e\cos(\alpha+u))-p\},$$

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\alpha\mp u)}.$$

Diess ist die Gleichung zweier Kegelschnitte mit gemeinschaftlichem Brennpunkt im Ursprung, deren Axen mit der $+x$-Axe nach entgegengesetzten Seiten hin den Winkel α machen.

D. **Eine Figur bewegt sich ohne Veränderung ihrer Gestalt so, dass drei Gerade derselben je eine Kreis-Evolvente umhüllen; alsdann ist diess auch bei jeder weiteren Geraden in der Figur der Fall.**

1. **Wenn sich ein Polygon ohne Veränderung seiner Gestalt (wohl aber seiner Grösse) so bewegt, dass von drei nicht in Einer Ecke zusammenstossenden Linien desselben (Seiten oder Diagonalen) sich jede um einen in ihr befindlichen festen Punkt dreht; so dreht sich auch jede andere Linie des Polygons um einen in ihr befindlichen festen Punkt. Die Drehungspunkte sämmtlicher in Einer Ecke zusammenstossenden Linien liegen auf einem Kreis, der durch diese Ecke geht. Man erhält somit für jede Ecke des Polygons einen Kreis; alle diese Kreise haben einen gemeinsamen Durchschnittspunkt.**

Man nehme zunächst an, dass zwei durch die Ecke A des Polygons gehende Linien sich um feste Punkte drehen; da bei der angegebenen Bewegung das Polygon seine Gestalt beibehalten soll, so müssen die Winkel aller in A zusammenstossenden Linien konstant bleiben, woraus mit Hülfe des Satzes, dass gleichen Peripheriewinkeln gleiche Bögen entsprechen, sogleich folgt,

dass alle durch A gehende Linien sich um feste Punkte drehen müssen, welche auf der Peripherie eines Kreises durch A liegen. Wenn sich nun eine durch eine andere Ecke B des Polygons gehende Linie ebenfalls um einen festen Punkt dreht, so müssen, da nach dem Vorhergehenden auch AB sich um einen festen Punkt dreht, alle in B zusammenstossenden Linien sich um feste Punkte drehen, die ebenfalls auf Einem durch B gehenden Kreise liegen. Es sei C eine dritte Ecke. Die Linien CA und CB drehen sich um feste Punkte, also thun es auch alle übrigen durch C gehenden Linien u. s. f. Man nehme irgend drei von den durch die Ecken des Polygons gehenden Kreisen; dass sich dieselben in Einem Punkte schneiden, lässt sich sehr leicht beweisen. Zwei derselben und ein vierter Kreis schneiden sich somit auch in Einem Punkte, mithin schneiden sich alle vier Kreise in Einem Punkte u. s. w.

2. Dreht sich bei der im vorigen Satz genannten Bewegung des Polygons beim Uebergang von einer Lage in die andere eine Linie um einen Winkel α, so dreht sich auch jede andere Linie um den Winkel α. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man durch einen festen Punkt Parallelen mit allen Linien des Polygons zieht. Die Winkel, welche diese Parallelen unter einander bilden, müssen konstant bleiben, weil das Polygon seine Gestalt nicht ändert; dreht sich also Eine solche Parallele um den Winkel α, so drehen sich auch alle andern um diesen Winkel.

3. Es seien r, r', r'' drei konstante Grössen; man ziehe mit drei Linien des Polygons Parallelen in den Abständen $r\alpha$, $r'\alpha$, $r''\alpha$, welche ein Dreieck bilden. Durch weitere Ziehung von Parallelen, zunächst durch die Ecken dieses Dreiecks und dann durch die neuen sich ergebenden Schnittpunkte mit den entsprechenden Linien des gegebenen Polygons, erhält man ein zweites, dem ersten ähnliches und für jeden Werth von α vollständig bestimmtes Polygon. Der Abstand irgend einer vierten Seite oder ihres Drehungspunkts im gegebenen Polygon von der ihr entsprechenden parallelen Seite im zweiten Polygon ist gegeben durch einen Ausdruck von der Form

$$a.r\alpha + br'\alpha + cr''\alpha = \alpha(ar + br' + cr''),$$

in welchem a, b, c konstante, nur von den Winkeln des gegebenen Polygons abhängende Grössen sind. Der allgemeine Ausdruck des Abstands irgend einer Seite des zweiten Polygons von dem festen Drehungspunkte der parallelen Seite ist somit

$$k.\alpha,$$

wo k eine Konstante bedeutet.

4. Wenn eine gerade Linie in einer Ebene sich so bewegt, dass ihr Abstand von einem festen Punkte proportional ihrem Drehungswinkel ist, so umhüllt sie die Evolvente eines Kreises, dessen Mittelpunkt der feste Punkt ist. Unter Drehungswinkel ist der Winkel verstanden, welchen die Gerade in irgend einer Lage mit ihrer ursprünglichen Richtung bildet, wo sie durch den festen Punkt ging.

5. Wenn sich die beiden in 3. betrachteten Polygone drehen, so umhüllen die Seiten des zweiten Evolventen von Kreisen, welche in den festen Drehungspunkten der Seiten des gegebenen Polygons ihre Mittelpunkte haben; denn die Abstände $r\alpha$, $r'\alpha$, $r''\alpha$, $k\alpha$ sind dem Drehungswinkel α proportional. Da nun durch die Bestimmung der Constanten r, r', r'' und also der Abstände $r\alpha$, $r'\alpha$, $r''\alpha$ dreier Seiten des zweiten Polygons von den entsprechenden Drehungspunkten auch der Abstand $k.\alpha$ irgend einer weiteren Seite von dem entsprechenden Drehungspunkt gegeben ist, so folgt hieraus der oben unter D. mitgetheilte Satz.

Aus der obigen Darstellung geht noch weiter hervor: **Die Mittelpunkte aller Kreise, deren Evolventen von solchen Geraden des Polygons umhüllt werden, die in einer Ecke convergiren, liegen je auf Einem Kreise. Jeder Ecke des Polygons entspricht also ein derartiger Kreis. Alle diese Kreise haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.**

6. Es ist nicht nothwendig, dass die Abstände $r\alpha$, $r'\alpha$, $r''\alpha$, $k\alpha$ alle mit α verschwinden, oder dass die Geraden des Polygons zugleich durch den Ursprung der Kreisevolventen gehen. Man kann z. B. statt $r\alpha$ auch $r(\alpha-\alpha')$ setzen, wo α' ein konstanter Winkel ist; dann verwandelt sich $k\alpha$ in $k\alpha - r\alpha'$; die Polygonseiten, deren Abstände von den Kreismittelpunkten $r(\alpha-\alpha')$ und $k\alpha - r\alpha'$ sind, umhüllen auch jetzt noch Kreisevolventen.

7. Man nehme an, die Grössen r, r', r'', seien nicht konstant, sondern Functionen des Drehungswinkels α, z. B. $=\alpha^m.\text{const.}$, so ist auch $k=\alpha^m.\text{const.}$ Hierauf beruht der Satz: **Wenn ein Polygon ohne Veränderung seiner Gestalt (aber seiner Grösse) sich so bewegt, dass drei seiner Seiten Curven umhüllen, bei welchen der Abstand der Tangente von einem festen Punkt der $m$ten Potenz des Winkels proportional ist, welchen die Tangente mit einer festen Geraden bildet, so umhüllen auch alle übrigen Seiten des Polygons derartige Curven.** Die festen Punkte liegen auf Kreisen, wie in 5.

Eine weitere Verallgemeinerung ist diese: Wenn die Functionen r, r', r'' die Form haben $\alpha^m.\mathrm{const.}+\alpha^n.\mathrm{const.}+\ldots$, so hat auch k diese Form.

8. Bei Anwendung der Transformation durch reciproke Radienvektoren auf die Figur des ersten Satzes verwandelt sich die Ebene in eine Kugel, die Seiten des Polygons werden zu Kreisen, die einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt O haben, die Winkel zwischen zwei Polygonseiten und den entsprechenden Kreisbögen bleiben sich gleich, mithin hat man den Satz: Auf einer Kugel bilden mehrere, durch Einen Punkt O gehende Kreise mit ihren übrigen Durchschnitten ein Kreisbogenvieleck, welches sich so bewegt, dass die Winkel, die je zwei Kreisbögen in ihrem Durchschnitt mit einander bilden, konstant sind, und dass von drei nicht in Einer Ecke zusammenstossenden Seiten des Vielecks sich jede um einen in ihr liegenden festen Punkt (ausser O) dreht, so dreht sich auch jede andere Linie des Vielecks um einen in ihr liegenden festen Punkt. Die Drehungspunkte sämmtlicher in Einer Ecke zusammenstossenden Linien liegen auf einem Kreise, der durch diese Ecke geht. Man erhält somit für jede Ecke des Vielecks einen Kreis, welche alle einen gemeinsamen Durchschnittspunkt haben.

V.

Ueber die Rektifikation der Linien auf den Flächen.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

---

1. Gegeben sind zwei Flächen und auf einer derselben liegt ein fester Punkt, von welchem ein Faden von unveränderlicher Länge ausgeht, der über beide Flächen gespannt ist, so dass er auf der ersten eine geodätische Linie, dann eine gemeinschaftliche Tangente der zwei Flächen und endlich wieder eine geodätische Linie auf der zweiten Fläche bildet. Wenn sich nun der Faden um den festen Punkt dreht, so beschreibt sein beweglicher Endpunkt auf der zweiten Fläche eine Curve, die der Faden überall rechtwinklig schneidet. A sei der feste Punkt, AB und AC sind zwei sehr nahe Lagen des Fadens; wäre der Winkel bei B schief, so könnte man CD senkrecht auf BC ziehen; dann wäre in dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck BCD, BD die Hypotenuse, somit grösser als CD; mithin würde $AD+DC <$ als $AD+DB$, $<AB$, $<AC$ sein, was sich mit der Bedingung nicht vereinigen lässt, dass AC ein gespannter Faden sein soll. Dieser Satz hat auch dann noch seine Geltung, wenn sich die erste Fläche auf einen Punkt reducirt; man erhält dann folgendes Corollar:

2. Wenn einer Fläche ein Berührungskegel umschrieben ist, und jede Erzeugende des Kegels auf der Fläche durch eine geodätische Linie verlängert wird, so dass die Länge der Erzeugenden und der geodäti-

schen Linie zusammen konstant ist, so schneiden die geodätischen Linien die Verbindungslinie ihrer Endpunkte auf der Fläche rechtwinklig. Liegt aber der feste Punkt auf der zweiten Fläche selbst, so ergibt sich der bekannte Satz von Gauss (Disquisitiones): Die von einem Punkt einer Fläche aus gezogenen gleich langen geodätischen Linien schneiden die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig.

Die Converse des ersten Satzes lautet so:

3. Gegeben sind zwei Flächen und auf einer derselben ein fester Punkt, von welchem ein Faden von unveränderlicher Länge ausgeht, der über beide Flächen so gespannt ist, dass er auf der ersten eine geodätische Linie, dann eine gemeinschaftliche Tangente beider Flächen und endlich auf der zweiten auch eine geodätische Linie bildet. Wenn sich nun der Endpunkt des Fadens auf der zweiten Fläche so bewegt, dass die von ihm beschriebene Curve überall von dem Faden senkrecht geschnitten wird, so hat der letztere eine unveränderliche Länge. AB und AC sind zwei sehr nahe Lagen des Fadens und die Winkel bei B und C rechte. Wäre nun $AB > AC$, so könnte man auf AB den Punkt D annehmen, so dass $AD = AC$. Dann müsste nach 1. der Winkel DCA ein rechter sein, was mit der Bedingung nicht übereinstimmt, dass Winkel $BCA = 90^0$ sein soll. Dieser Satz gilt auch dann noch, wenn sich die erste Fläche auf einen Punkt reducirt; es ergibt sich dann die Converse von 2.:

4. Man verlängere alle Erzeugenden eines Berührungskegels einer Fläche durch geodätische Linien, so dass sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte senkrecht treffen; dann ist die Summe jeder Erzeugenden und ihrer geodätischen Verlängerung konstant. Liegt der feste Punkt endlich auf der zweiten Fläche, so folgt dieser Satz: Wenn die von einem Punkt auf einer Fläche aus gezogenen geodätischen Linien die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig treffen, so sind sie gleich lang.

Die genannten Theoreme lassen sich noch auf zwei Arten verallgemeinern, die aber bloss angedeutet werden mögen: wir können in 1. statt des festen Punkts A eine beliebige Curve annehmen, von deren einzelnen Punkten unter rechten Winkeln gespannte Fäden von unveränderlicher Länge ausgehen. Ferner bleibt die Beweisführung dieselbe, ob der gespannte Faden direkt auf die zweite Fläche übergeht, oder ob er vorher eine Reihe

von zwischen liegenden Flächen, jede in einer geodätischen Linie, überschreitet; die allgemeinste Fassung des ersten Satzes und seiner Converse 3. lautet also:

5. Gegeben ist eine Reihe von Flächen, und auf der ersten eine Curve, von deren einzelnen Punkten unter rechten Winkeln gespannte Fäden von unveränderlicher Länge ausgehen, die über die anderen Flächen hingehen bis zur letzten, so dass sie auf jeder Fläche eine geodätische Linie und zwischen je zwei Flächen eine gemeinsame Tangente bilden. Diese Fäden schneiden die Verbindungslinie ihrer Endpunkte auf der letzten Fläche rechtwinklig. Umgekehrt: schneiden sie diese Verbindungslinie rechtwinklig, so sind sie von gleicher Länge.

6. Es sind zwei Flächen gegeben und auf der ersten zwei feste Punkte A und B. Ein Faden ist durch einen Stift, dessen Spitze über die zweite Fläche hingleitet, so gespannt, dass er von A aus gehend sich über die erste Fläche in einer geodätischen Linie biegt, hierauf eine gemeinschaftliche Tangente beider Flächen und dann wieder eine geodätische Linie auf der zweiten Fläche bis zum Stift bildet. Der andere Theil des Fadens besteht von da aus wieder aus einer geodätischen Linie auf der zweiten Fläche, aus einer gemeinschaftlichen Tangente beider Flächen und aus einer geodätischen Linie bis B. Wenn sich der Stift bewegt, so dass der Faden gespannt bleibt, so bildet die von ihm beschriebene Curve mit den beiden in jedem ihrer Punkte zusammenlaufenden Fadenstücken gleiche Winkel. Um diess zu beweisen, nehmen wir (Taf. I. Fig. 4.) zwei sehr nahe Punkte o und o' auf der vom Stift beschriebenen Curve an, so dass also oo' eine Tangente ist, und ziehen om senkrecht auf Ao', $o'm'$ senkrecht auf Bo; nun ist:

$$Ao + Bo = Ao' + Bo', \quad Bo = Bm' + m'o, \quad Ao' = Am + mo';$$

mithin:

$$Ao + Bm' + m'o = Am + mo' + Bo'.$$

Nach 1. aber ist:

$$Ao = Am \text{ und } Bm' = Bo', \text{ also } m'o = mo'.$$

Die beiden unendlich kleinen Dreiecke $oo'm$ und $oo'm'$ haben also die Hypotenuse oo' gemeinschaftlich, und die Catheten om'

und $o'm$ gleich, mithin sind sie kongruent, woraus sofort die Gleichheit der Winkel $m'oo'$ und $mo'o$ folgt.

Dieser Satz lässt sich sehr leicht umkehren, wenn man annimmt, dass die Curve auf der zweiten Fläche gegeben ist und von derselben unter gleichen Winkeln die beiden Fadenstücke nach den festen Punkten A und B der zweiten Fläche so ausgehen, dass jedes Stück zwei geodätische Linien auf den Flächen und zwischen beiden eine gemeinsame Tangente bildet; es muss nun die Summe der beiden Fadenstücke konstant sein. Der Beweis folgt aus dem dritten Satze.

Mit Rücksicht auf 5. gelangen wir zu folgender Verallgemeinerung von 6.:

7. Es ist eine Anzahl von Flächen gegeben, und auf der ersten und letzten liegen zwei Curven; ein Faden geht von der ersten Curve rechtwinklig aus, so dass das eine Stück über mehrere der gegebenen Flächen gespannt ist, abwechslungsweise aus geodätischen Linien und gemeinschaftlichen Tangenten bestehend; das andere Stück geht von der zweiten Curve rechtwinklig aus und ist auf ähnliche Weise über die andern Flächen gespannt; der Punkt, in welchem beide Fadenstücke zusammentreffen, beschreibt auf einer der genannten Flächen eine Curve, mit welcher die beiden Theile des Fadens gleiche Winkel bilden.

Bei der Bewegung eines gespannten Fadens, der von einem festen Punkte A einer Fläche ausgeht, sind zwei Fälle zu unterscheiden: der gewöhnlichste Fall ist der, wo der Faden in jeder Lage eine andere von A ausgehende geodätische Linie bildet; die Bewegung kann aber auch so sein, dass der Faden auf der Fläche nur Eine von A ausgehende geodätische Linie bildet. Dann ist die Ebene, welche durch zwei auf einander folgende Lagen desjenigen Theils des Fadens bestimmt wird, der eine gemeinschaftliche Tangente beider Flächen ist, eine Oskulations-Ebene im Endpunkt der geodätischen Linie auf der ersten Fläche, also normal auf dieser, und eine Tangential-Ebene im Anfangspunkt der geodätischen Linie auf der zweiten Fläche. Dieser spezielle Fall trifft zu, wenn beide Flächen die Krümmungsmittelpunkte Einer dritten Fläche enthalten; alsdann stehen ihre scheinbaren Umrisse, von jedem Punkte des Raumes aus gesehen, auf einander senkrecht. Die Tangenten aller geodätischen Linien, welche die gemeinschaftliche Durchschnitts- (und Krümmungslinie) beider Flächen berühren, tangiren die zweite Fläche. Der in 1. gege-

bene Beweis passt auf alle Fälle; mithin gilt diess auch von dem Beweis des Satzes 6.

8. Gegeben sind zwei Flächen, und auf der ersten zwei feste Punkte A und C. Auf der zweiten ist eine Curve gezogen, welche die Eigenschaft hat, dass die Differenz der Längen von den beiden Fäden, die sich von jedem ihrer Punkte aus nach A und C hin spannen lassen, konstant ist. Alsdann wird die Curve den Winkel der von irgend einem ihrer Punkte ausgehenden Fäden halbiren. Es seien (Taf. I. Fig. 5.) o und o' zwei sehr nahe Punkte der Curve, mithin ist oo' eine Tangente. Wir ziehen om senkrecht auf Ao', und $o'm'$ senkrecht auf Co; nun ist:

$$Ao - Co = Ao' - Co', \quad Co = Cm' + m'o, \quad Ao' = Am - mo';$$

somit:

$$Ao - Cm' - m'o = Am - mo' - Co'.$$

Nach 1. ist:

$$Ao = Am \text{ und } Cm' = Co', \text{ also auch } m'o = mo'.$$

Die unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecke $oo'm$ und $oo'm'$ haben somit die Hypotenuse oo' gemein, und die Catheten $m'o$ und mo' gleich, sind also kongruent, woraus sich sofort die Gleichheit der Winkel $m'oo'$ und $mo'o$ ergibt.

Es leuchtet von selbst ein, dass dieser Satz sich ebenso umkehren lässt wie 6. und verallgemeinern wie 7.

9. Die Sätze 6. und 8. gelten auch dann noch, wenn sich die erste Fläche auf zwei feste Punkte A und B reducirt. Diese Punkte können entweder ausserhalb der zweiten Fläche oder auf derselben liegen. (Der letzte Fall wurde vom Verfasser früher behandelt bei Schlömilch III., welcher Aufsatz in die nouv. Annales von Terquem und Gérono, 1859, überging.)

10. Auf einer Fläche ist eine Curve gegeben; einen Theil dieser Curve umfasst ein geschlossener Faden von unveränderlicher Länge, welcher durch einen Stift gespannt ist, dessen Endpunkt auf einer zweiten Fläche sich bewegt und auf derselben eine Curve beschreibt, welche die Eigenschaft hat, dass sie mit den in jedem ihrer Punkte zusammenstossenden Theilen des Fadens gleiche Winkel bildet. Um sich hiervon zu überzeugen, wende man den Beweis des Satzes 6. auf Taf. I.

Fig. 4. an. Die Curve AB ist gegeben; der gespannte Faden beschreibt auf der zweiten Fläche die Curve oo'.

Zu bemerken ist, dass die Summe der von o ausgehenden Fadenstücke weniger der Summe der von o' ausgehenden gleich der Differenz der umspannten Bögen der gegebenen Curve ist, oder

$$oA + oC - (o'B + o'D) = ADC - BCD;$$

diese Gleichung gilt nicht bloss, wenn die Punkte o und o' unendlich nahe bei einander sind, sondern für eine beliebige Lage derselben auf der Curve. In Taf. I. Fig. 5. ist die Curve oo' auf der zweiten Fläche so beschrieben, dass die Differenz der von o' ausgehenden gleich der Differenz der umspannten Bögen der gegebenen Curve ist, oder:

$$oA - oC - (o'D - o'B) = ADB - DBC;$$

man erhält dann folgenden leicht zu beweisenden Satz:

11. Gegeben sind zwei Flächen, und auf jeder eine Curve. Wenn die letztere die Eigenschaft hat, dass, wenn man von zwei beliebigen Punkten derselben aus gespannte Fäden zieht, welche die erste Curve tangiren, die Differenz der vom ersten Punkt ausgehenden Fadenstücke weniger der Differenz der vom zweiten Punkt ausgehenden gleich der Differenz der umspannten Bögen ist, so halbirt sie den Winkel beider Fadenstücke. Die Umkehrung von 10. und 11. ergibt sich, wenn vorausgesetzt wird, dass die in o zusammentreffenden Fadenstücke gleiche Winkel mit der Curve oo' bilden.

Wenn man den gespannten Fäden verschiedene Längen gibt, so entsteht eine Reihe von Curven oo', die sich aus Einer Curve AB ableiten lassen. Die nach 10. abgeleiteten Curven bilden Ein System und die nach 11. abgeleiteten das andere. Beide Systeme sind orthogonal. Wenn beide Curven AB und oo' auf Einer Fläche liegen, so liefern die Sätze 10. und 11. mit ihren Umkehrungen diese Theoreme:

12. Wenn ein Theil einer Curve auf einer Fläche von einem durch einen Stift gespannten Faden umschlossen wird, so beschreibt dieser Stift auf derselben Fläche eine Curve, welche den Nebenwinkel der Fadenstücke halbirt, umgekehrt: halbirt eine Curve den Nebenwinkel der geodätischen Tangenten, die sich von jedem ihrer Punkte an eine zweite Curve ziehen lassen, so ist die Summe dieser Tangenten und

des von ihnen nicht umschlossenen Theils der zweiten Curve konstant.

13. Auf einer Fläche liegen zwei Curven; letztere hat die Eigenschaft, dass, wenn man von zwei beliebigen Punkten derselben aus an die erste geodätische Tangenten zieht, die Differenz der vom ersten Punkt ausgehenden Tangenten weniger der Differenz der vom zweiten Punkt ausgehenden gleich der Differenz der umspannten Bögen der Curve ist. Dann halbirt die zweite Curve den Winkel der von jedem ihrer Punkte ausgehenden geodätischen Tangenten. Umgekehrt: halbirt die zweite Curve den Winkel der von einem ihrer Punkte an die erste gezogenen geodätischen Tangenten, so ist die Differenz der von irgend einem ihrer Punkte ausgehenden geodätischen Tangenten weniger der Differenz der von einem zweiten Punkte ausgehenden gleich der Differenz der umspannten Bögen der ersten Curve.

Wir wollen zunächst die Sätze 10.—13. auf die Flächen zweiten Grades anwenden; und zwar sei die erste Fläche ein Ellipsoid (ϱ) und die zweite ein einmantliges Hyperboloid (μ), welchen diese Gleichungen entsprechen:

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1, \quad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1.$$

Das homofokale zweimantlige Hyperboloid (ν) entspricht der Formel

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1.$$

Die Gleichung der geodätischen Linien auf (ϱ) ist (siehe den Aufsatz des Verfassers über elliptische Coordinaten, Archiv. Thl. XXXIV. Nr. XIX. Seite 312.):

$$\mu^2\cos^2 i+\nu^2\sin^2 i=\alpha^2,$$

i ist der Winkel, welchen die geodätische Linie im Punkt ($\varrho\mu\nu$) mit der Krümmungslinie $\mu=$ const. auf (ϱ) macht; α ist die grosse Halbaxe des einmantligen Hyperboloids (α), welches alle Tangenten der geodätischen Linie berühren. Die vorige Gleichung gibt:

$$\cos i=\pm\sqrt{\frac{\alpha^2-\nu^2}{\mu^2-\nu^2}},$$

mithin gehen durch den Punkt ($\varrho\mu\nu$) auf (ϱ) zwei geodätische Linien, welche mit der Krümmungslinie $\mu=$ const. gleiche Win-

kel bilden und deren Tangenten das homofokale Hyperboloid (α) berühren; gehörig verlängert werden also diese zwei geodätischen Linien den Durchschnitt der Flächen (α) und (ϱ), oder die Krümmungslinie $\alpha =$ const. auf (ϱ) berühren, somit können wir den Satz 12. anwenden und erhalten nachstehendes Theorem von Chasles:

13. Wenn ein Theil von einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades durch einen geschlossenen Faden von unveränderlicher Länge umspannt wird, der durch einen Stift gespannt ist, so beschreibt der Endpunkt dieses Stifts auf derselben Fläche eine andere die erste einschliessende Krümmungslinie desselben Systems.

Wir wollen annehmen, $ADCB$ (Taf. I. Fig. 4.) sei die erste und oo' die zweite Krümmungslinie, welche nach 13. beschrieben ist. Beide liegen auf (ϱ). $ADCB$ ist der Durchschnitt des Ellipsoids (ϱ) und des homofokalen Hyperboloids (α). Da sämmtliche Tangenten der geodätischen Linie oA (α) berühren, so lässt sich auf oA ein Punkt finden, so dass, wenn man in demselben die Tangente von oA zieht und dieselbe von ihrem Berührungspunkt auf (α) aus durch eine zweite geodätische Linie von (α) verlängert, letztere durch einen festen und gegebenen Punkt a auf (α) geht. Ebenso lässt sich auf der geodätischen Linie oC ein anderer Punkt bestimmen, welcher die Eigenschaft hat, dass, wenn man in ihm die Tangente von oC zieht und dieselbe von ihrem Berührungspunkt auf (α) auch durch eine geodätische Linie verlängert, letztere durch einen zweiten festen und gegebenen Punkt b auf (α) geht. Das gleiche Verfahren lässt sich auf jede, $ADCB$ berührende geodätische Linie von (ϱ) ausdehnen, man kann also von einem Punkt auf $o'D$ ($o'B$) durch eine gemeinschaftliche Tangente dieser Linien und der Fläche (α) und durch eine vom Berührungspunkt auf (α) ausgehende geodätische Linie nach dem nämlichen festen Punkt a (b) gelangen. Es lässt sich nun die Umkehrung des Satzes 6. anwenden, und wir haben folgendes Theorem (welches Chasles aufgestellt, aber anders bewiesen hat, Liouville 1846):

14. Es sind zwei homofokale Flächen (ϱ) und (α) gegeben. Auf (α) liegen zwei feste Punkte a und b, und ein Faden ist durch einen Griffel s, dessen Spitze über (ϱ) hingleitet, so gespannt, dass er, von a ausgehend, sich über (α) in einer geodätischen Linie biegt, dann eine gemeinschaftliche Tangente beider Flächen und hierauf auf (ϱ) eine geodätische Linie bildet bis s. Der zweite Theil des Fadens zwischen s und b besteht ebenso der Reihe nach

aus einer geodätischen Linie von (ϱ), einer gemeinsamen Tangente von (ϱ) und (α) und einer geodätischen Linie auf (α) bis b. Wenn sich der Griffel s auf (ϱ) bewegt, so dass der Faden immer gespannt bleibt, so beschreibt der Punkt s eine Krümmungslinie auf (ϱ), welche den Nebenwinkel der beiden in s zusammenlaufenden Fadenstücke halbirt.

Die verschiedenen Consequenzen dieses Satzes findet man am angegebenen Orte und in der analytischen Geometrie des Verfassers S. 213. Aus der Umkehrung des Satzes 8. geht hervor, dass die Krümmungslinien des andern Systems auf (ϱ) beschrieben werden durch zwei von irgend einem Punkt derselben ausgehenden gespannten Fäden, welche (α) berühren und deren Winkel (nicht Nebenwinkel) von der Krümmungslinie halbirt wird.

Man kann den vorhergehenden Satz auf folgende Art verallgemeinern: Auf einer beliebigen Fläche A ist eine Krümmungslinie gegeben; man ziehe alle diejenigen geodätischen Linien, welche diese Krümmungslinie tangiren; die Tangenten von jeder solchen geodätischen Linie bilden eine entwickelbare Fläche; alle diese entwickelbaren Flächen umhüllen eine zweite Fläche B, welche zu der gegebenen Fläche A in einer merkwürdigen Beziehung steht. A und B enthalten beide die Krümmungsmittelpunkte von einer und derselben dritten Fläche; die scheinbaren Umrisse von A und B stehen auf einander senkrecht, von welchem Punkt des Raumes aus sie auch gesehen werden mögen. (Analytische Geometrie des Verfassers, S. 58.) Diess vorausgesetzt, lege man um die Krümmungslinie auf A einen durch einen Stift gespannten Faden; letzterer beschreibt sodann auf A eine zweite Curve. Diese lässt sich nun noch auf unendlich viele andere Arten beschreiben, indem man auf B zwei beliebige feste Punkte annimmt, und zwischen ihnen durch einen Stift einen Faden spannt, dessen beide Theile, wie vorhin bei (α) und (ϱ), so jetzt zwischen B und A, je eine geodätische Linie, eine gemeinschaftliche Tangente und wieder eine geodätische Linie bilden. Der Endpunkt des Stifts, in welchem beide Theile auf A zusammenstossen, beschreibt die genannte Curve. Der Beweis ist dem obigen des Chasles'schen Satzes durchaus ähnlich und die Verallgemeinerung besteht darin, dass an die Stelle von zwei homofokalen Flächen zweiten Grades, die sich gegenseitig in einer Krümmungslinie schneiden, überhaupt zwei solche orthogonale Flächen gesetzt werden, welche die Krümmungsmittelpunkte Einer dritten Fläche enthalten. Nur sind jetzt die durch den gespannten Faden beschriebenen Linien keine Krümmungslinien mehr. Die Verallgemeinerung lässt sich übrigens noch weiter treiben, indem

alle angeführten Schlüsse und Ausführungen unverändert bleiben, selbst dann, wenn die ursprüngliche Curve auf der Fläche A keine Krümmungslinie ist. Hieraus ergibt sich nachstehender Satz:

14^a. Auf einer Fläche ist eine beliebige Curve gegeben; ein um sie gelegter Faden ist durch einen Stift gespannt, welcher eine zweite Curve auf der nämlichen Fläche beschreibt. Diese letztere Curve lässt sich noch auf unendlich viele verschiedene Arten beschreiben mittelst eines durch einen Stift zwischen zwei festen Punkten gespannten Fadens, welche festen Punkte beliebig angenommen werden können auf einer von entwickelbaren Flächen umhüllten orthogonalen Fläche. Die entwickelbaren Flächen werden gebildet von den Tangenten aller die gegebene Curve auf der Fläche berührenden geodätischen Linien.

Die Sätze 12. und 13. nebst ihren Umkehrungen führen auf einige Fragen, welche mit der Rektifikation der Curven zusammenhängen. Wenn nämlich auf einer Fläche eine Curve gegeben ist, und es lässt sich eine zweite Curve auf der Fläche bestimmen, welche die Eigenschaft hat, dass sie den Nebenwinkel der von irgend einem ihrer Punkte an die erste Curve gezogenen geodätischen Tangenten halbirt, so lässt sich zu jedem Bogen derselben auf unendlich viele Arten ein zweiter Bogen finden, von der Art, dass die Differenz beider Bögen durch die Längen geodätischer Linien ausgedrückt ist. Die Rektifikation der gegebenen Curve ist somit auf die Rektifikation geodätischer Linien der Fläche zurückgeführt. Ist z. B. AB (Taf. I. Fig. 4.) die gegebene Curve und oo' die zweite oder abgeleitete Curve, welche die Eigenschaft besitzt, dass sie den Nebenwinkel der geodätischen Tangenten oA, oC halbirt, so kann man zu einem gegebenen Bogen AC der ersten Curve auf unendlich viele Arten einen zweiten, etwa DB, finden, so dass die Differenz der Bögen AC und DB gleich der Differenz geodätischer Linien ist. Zu diesem Zwecke ziehe man in A und C die geodätischen Tangenten, welche sich in o schneiden, konstruire die durch o gehende abgeleitete Curve oo', nehme auf ihr irgend einen andern Punkt o' an, ziehe die geodätischen Tangenten $o'B$ und $o'D$, so ist

$$\text{Bogen } AC - \text{Bogen } BD = oA + oC - (o'B + o'D).$$

Um diess zu beweisen, verlängern wir die Curve über A und B hinaus, bis sie sich schliesst, oder, wenn es eine nicht geschlossene Curve ist, bis in's Unendliche, und nennen m das endliche oder unendliche Stück der Fortsetzung zwischen A und B, so ist nach 12.:

$$m + oA + oC + CB = m + AD + o'D + o'B,$$

also

$$oA + oC - (o'B + o'D) = AD - CB = \text{Bogen } AC - \text{Bogen } BD.$$

Wenden wir dieselben Betrachtungen auf Taf. I. Fig. 5. an, so finden wir, dass, wenn sich die Curve oo' konstruiren lässt, welche den Winkel (nicht Nebenwinkel) der von irgend einem ihrer Punkte an eine gegebene Curve AC gezogenen geodätischen Tangenten halbirt, man zu dem Bogen AC auf unendlich viele Arten einen zweiten DB bestimmen kann, so dass die Differenz beider Bögen gleich der Differenz von geodätischen Linien ist. Man hat nämlich:

$$\text{Bogen } AC - \text{Bogen } BD = oA + oC - (o'B + o'D).$$

Der Beweis ist dem vorigen durchaus ähnlich. Angenommen, die abgeleitete Curve oo' schneide die gegebene in x (Taf. I. Fig. 7.), so sind die von x an gezogenen geodätischen Tangenten gleich Null, wie auch der von ihnen eingeschlossene Bogen gleich Null ist, mithin hat man in diesem speziellen Fall die Gleichung:

$$\text{Bogen } xA - \text{Bogen } xC = oA - oC.$$

Die Curve oo' in Taf. I. Fig. 5. liefert also nach 13. nicht bloss das Mittel zu jedem Bogen der gegebenen Curve einen zweiten zu finden, dessen Differenz vom ersten sich durch geodätische Linien ausdrücken lässt, sondern man kann auch jeden Bogen der ersten Curve in zwei Theile theilen, deren Differenz gleich dem Unterschiede zweier geodätischen Linien ist. Wir haben sonach diesen Satz:

15. Gegeben ist eine beliebige Curve auf einer Fläche und ein Bogen derselben; man ziehe die geodätischen Tangenten an seine Endpunkte und durch ihren Schnittpunkt die Curve, welche den Winkel der von jedem ihrer Punkte an die ersten gezogenen geodätischen Tangenten halbirt; so theilt die zweite Curve den Bogen der ersten in zwei Theile, deren Differenz gleich dem Unterschiede der an seine Endpunkte gezogenen geodätischen Tangenten ist.

A und B in Taf. I. Fig. 6. sind zwei feste Punkte auf einer Fläche, von welchen geodätische Linien ausgehen; $Ad + Bd = Ab + Bb$; dann liegen nach dem Vorhergehenden die Punkte b und d auf einer Curve, welche den Nebenwinkel der von b oder d ausgehenden geodätischen Radien-Vektoren halbirt, und die wir Curve des ersten Systems nennen. Wegen der Gleichheit der Winkel cbd und cdb ist in dem unendlich kleinen Dreieck

cbd, $cb=cd$; ebenso ist $ab=ad$; zieht man also ac, so haben die Dreiecke abc und adc die Seiten gleich und sind kongruent, also halbirt ac die Winkel bei a und c, somit ist $Ba-Aa=Bc-Ac$, d. h. ac ist ein Element der Curve, für welche die Differenz der nach A und B gezogenen geodätischen Radien-Vektoren konstant ist und die wir Curve des zweiten Systems nennen. Nun ziehe man die Linie bb', welche den Winkel AbB halbirt, und verlängere Ab' nach c', so halbirt die Verbindungslinie cc' ebenfalls die Winkel bei c und c'; durch e ziehe man die Radien-Vektoren Aeg und Bef, so lässt sich durch Congruenz von unendlich kleinen Dreiecken auf ähnliche Art nachweisen, dass die Durchschnittspunkte l und n; i, d und d'; h, a, c und e; k, b und b' auf Curven des zweiten Systems, und andererseits die Punkte d' und b'; n, c und c'; f, d, b und g; l, a und m; i und k auf Curven des ersten Systems liegen. Hieraus folgt dieser Satz:

16. Zieht man auf einer Fläche ein vollständiges geodätisches Viereck $ABghfe$, so dass $Bh-Ah=Be-Ae$ ist, so findet die Relation statt:

$$Af+Bf=Ag+Bg.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar:

$$hg-hf=eg-ef,$$

d. h. die Punkte h und e liegen auf einer Curve des zweiten Systems nicht bloss für A und B als Brennpunkte (Convergenzpunkte der geodätischen Radien-Vektoren), sondern auch für f und g als Brennpunkte.

Man kann dem Satz 16. eine allgemeinere Fassung geben, wenn man statt der Punkte A und B eine beliebige Curve auf der Fläche und statt der nach ihnen gezogenen Radien-Vektoren annimmt, dass die Verlängerungen der Seiten des Vierecks $eghf$ geodätische Tangenten dieser Curve sind; lässt man ferner zwei Seiten des Vierecks in Eine zusammenfallen, so ergibt sich folgende Erweiterung von 15.:

17. Wenn man (Taf. I. Fig. 7.) an die Endpunkte eines beliebigen Curvenbogens auf einer Fläche die geodätischen Tangenten oA und oC zieht, durch o die Curve des zweiten Systems ox (welche den Winkel der von jedem ihrer Punkte an die Curve AC gezogenen geodätischen Tangenten halbirt) und endlich die geodätische Tangente fxg, so liegen die Punkte f und g auf einer Curve des ersten Systems (welche den Nebenwinkel der von jedem ihrer Punkte

an die Curve AC gezogenen geodätischen Tangenten halbirt). Also ist (12):

$$\text{Bogen } Ax - \text{Bogen } Cx = Af + fx - (Cg + gx).$$

In 15. ist das Problem der Bisection der Curvenbögen auf den Flächen aufgelöst; durch fortgesetzte Theilung erhält man die Lösung der Aufgabe, einen Bogen in 2, 4, 8, 16.... Theile zu theilen, so dass die Differenz je zweier solcher Theile sich durch geodätische Linien ausdrücken lässt. Liegt die Curve auf einer Fläche, deren geodätische Linien rektificabel sind, wie die Ebene, die entwickelbaren Flächen, so haben wir, algebraisch ausgedrückt, folgende Aufgabe behandelt: Ein Integral von gegebenen Grenzen in zwei andere zu zerfällen, deren Differenz eine algebraische Grösse m ist. Oder, wenn man das Element der Curve mit ds bezeichnet, mit a und b die gegebenen Grenzen, und x diejenige Grenze ist, welche der Bisection entspricht:

$$\int_a^b ds = \int_a^x ds + \int_x^b ds \pm m.$$

In Satz 17. ist sodann eine weitere Eigenschaft derjenigen Punkte angegeben, in denen sich die geodätischen Tangenten der Theilpunkte des Curvenbogens schneiden. Es folgt daraus unmittelbar, dass, wenn man einen Curvenbogen in 4, 8, 16.... Theile theilt, durch fortgesetzte Bisection die Durchschnittspunkte der geodätischen Tangenten, welche je zwei auf einander folgenden Theilpunkten entsprechen, gleichfalls auf einer Curve des zweiten Systems liegen.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich ferner, dass die beiden Arten der Krümmungslinien einer centrischen Fläche zweiten Grades nach unserer Benennung Curven des ersten und zweiten Systems sind. Betrachten wir z. B. auf dem Ellipsoid eine Krümmungslinie, welche die beiden Nabelpunkte, die auf Einer Seite der grossen Axe liegen, einschliesst, und sei AC ein Bogen derselben (Taf. I. Fig. 7.); um diesen Bogen zu theilen, ziehe man die geodätischen Tangenten Ao und Co; durch o eine Krümmungslinie des zweiten Systems ox, so ist

$$Ax - Cx = Ao - Co;$$

zieht man ferner die geodätische Tangente fxg, so ist auch

$$Ax - Cx = Af + fx - Cg - gx.$$

Es liegt hier nahe, A und C als Endpunkte eines Quadranten der Krümmungslinie zu wählen. Man erhält durch diese Con-

struktion auf jedem Quadranten einen Punkt x; die geodätischen Tangenten der Krümmungslinie in diesen vier Punkten bilden ein geodätisches Vierseit, welches der Krümmungslinie umschrieben ist und dessen Ecken auf Einer zweiten Krümmungslinie liegen. Ueberhaupt lassen sich der ersten Krümmungslinie unendlich viele geodätische Vierseite umschreiben, deren Ecken alle auf der zweiten Krümmungslinie liegen und welche isoperimetrisch sind.

Es kann ferner AC der Quadrant eines sphärischen Kegelschnitts sein, so sind oA und oC Bögen grösster Kreise, und die Gleichung

$$Ax - Cx = Ao - Co$$

löst die Aufgabe, auf dem Quadranten eines sphärischen Kegelschnitts einen Punkt zu bestimmen, welcher denselben in zwei Theile trennt, deren Differenz sich durch Kreisbögen ausdrücken lässt. Durch fortgesetzte Bisection erhält man die Theilung des Quadranten in 4, 8.... Theile, so dass die Differenz je zweier sich auf cyclische Integrale reducirt. Dehnt man diese Theilung auf alle vier Quadranten aus, so gelangt man zu den dem sphärischen Kegelschnitte umschriebenen Vier-, Acht-, etc. Seiten, deren Ecken jedesmal auf einem zweiten homofokalen sphärischen Kegelschnitt liegen, auf dessen Umfang die Ecken aller isoperimetrischen Vier-, Acht-, etc. Seiten liegen, welche sich dem gegebenen sphärischen Kegelschnitte umschreiben lassen.

Wenn AC (Taf. I. Fig. 7.) der Quadrant einer Ellipse ist, so verwandeln sich die geodätischen Linien in Gerade; die Linie ox ist eine homofokale Hyperbel und

$$Ax - Cx = Ao - Co = \text{der Differenz der Halbaxen.}$$

(Satz von Fagnani). Zieht man weiter durch f und g die homofokalen Hyperbeln, so ergibt sich die Theilung des Quadranten der Ellipse in vier Theile, und so kann man weiter fortfahren. (Siehe den Aufsatz des Verfassers im Archiv „Ueber eine Eigenschaft der Ellipse, Thl. XXX. Nr. XLI.)

Ferner wollen wir annehmen (Taf. I. Fig. 7.) A sei der Scheitel einer Hyperbel, oC die Asymptote, also o ihr Durchschnitt mit der Scheiteltangente; ferner sei ox die durch o gehende homofokale Ellipse, so erhält man gleichfalls den ausgezeichneten Punkt x; zieht man dessen Tangente fxg und durch f und g zwei weitere homofokale Ellipsen, so ergibt sich eine ähnliche Theilung der Hyperbel, wie bei der Ellipse. Ueberhaupt lässt sich mittelst homofokaler Kegelschnitte eine Reihe von Aufgaben lösen, wie folgende:

Zu jedem Bogen eines Kegelschnitts einen andern zu bestimmen, so dass die Differenz beider Bögen rektifikabel ist. Algebraisch ausgedrückt: Die Addition (Subtraktion etc.) elliptischer Integrale zweiter Art auszuführen. Einen Kegelschnittsbogen in 2, 4, 8,.... Theile zu theilen, so dass die Differenz je zweier rektifikabel ist. Diess ist die Bisection der elliptischen Integrale, wie man sie analytisch behandelt findet in den Recherches sur les fonctions elliptiques von Abel (Crelle II. S. 126.). — Einem Kegelschnitt isoperimetrische Vielseite zu umschreiben (Liouville, 1856. S. 7.). (Archiv, 7. Bd., Sätze von Chasles.) — Ein interessanter Aufsatz von Zehfuss (Schlömilch V.) über ein gewisses mathematisches Prinzip ist auch anzuführen.

Die hier angedeuteten Lösungen von Aufgaben beschränken sich aber nicht bloss auf die Kegelschnitte, sondern sie dehnen sich auf alle diejenigen Curven aus, in welche sich homofokale Kegelschnitte verwandeln, wenn man die Ebene derselben auf irgend eine entwickelbare Fläche biegt. Ebenso lassen sich die genannten Probleme über Krümmungslinien von Flächen zweiten Grades über sphärische Kegelschnitte auf sämmtliche Curven ausdehnen, in welche sie sich verwandeln, wenn ihre Flächen gebogen werden. S. den Aufsatz des Verfassers im Archiv, Thl. XXXII. Nr. III. über drei geometrische Transformationen (Transformation durch Biegung der Flächen).

Schliesslich mögen noch an einem speziellen Beispiel einige Andeutungen gegeben werden, wie die hier mitgetheilte Methode der Rektifikation von Linien sich verallgemeinern und vielleicht auf die Complanation der Flächen übertragen lässt. Einem Sphäroid sei ein Berührungskegel umschrieben, der Mantel dieses Kegels und der von ihm nicht eingeschlossene Theil der Oberfläche des Sphäroids von der Berührungscurve an sollen zusammen aus einem unendlich dünnen, unausdehnbaren, aber vollkommen biegsamen Stoff bestehen, welcher also eine geschlossene Fläche bildet, die das Sphäroid wie ein Beutel umhüllt. Diese einhüllende und geschlossene Fläche soll an der Spitze des Kegels durch einen Stift gespannt sein, der sich bewegt, so lässt sich offenbar mit Hülfe der vom Stift beschriebenen Fläche zu jedem Abschnitt der sphäroidischen Fläche, welcher ausserhalb des Berührungskegels liegt, auf unendlich viele Arten ein zweiter Abschnitt finden, so dass die Differenz beider Abschnitte gleich dem Unterschied der Mäntel von den betreffenden Berührungskegeln ist. Es handelt sich also nur darum, die vom Stift beschriebene Fläche zu finden. Bewegt sich derselbe in einer durch die Axe des Sphäroids gehenden Ebene, so beschreibt er vermöge der Symmetrie der

beiden Theile, in welche diese Ebene die genannte einhüllende und gespannte Fläche theilt, eine der entsprechenden Meridiankurve homofokale Ellipse; mithin beschreibt der Stift überhaupt ein homofokales Sphäroid, woraus der Satz folgt:

18. G e g e b e n s i n d z w e i h o m o f o k a l e S p h ä r o i d e; i r g e n d z w e i P u n k t e d e s g r ö s s e r e n s i n d d i e S p i t z e n v o n K e g e l n, w e l c h e d a s k l e i n e r e b e r ü h r e n; d a n n i s t d i e D i f f e r e n z d e r h i e r d u r c h a u f d e r O b e r f l ä c h e d e s k l e i n e r e n g e b i l d e t e n ä u s s e r e n A b s c h n i t t e g l e i c h d e r D i f f e r e n z d e r K e g e l m ä n t e l.

Für weitere Betrachtungen in dieser Richtung dürfte folgender Satz von Werth sein: Bewegt sich die Spitze des Berührungskegels eines Ellipsoids auf einem zweiten homofokalen Ellipsoid, so ist die Normale des letzteren die Axe des Berührungskegels. Denn legt man durch die Kegelspitze das homofokale einmantlige Hyperboloid, so sind dessen Erzeugende die Fokallinien des Berührungskegels. (C h a s l e s, A p e r ç u h i s t o r i q u e, übersetzt v o n S o h n k e, S. 425. und J a c o b i b e i L i o u v i l l e.)

VI.

A. Nothgedrungene Abwehr.

Von Herrn Hofrath Professor Doctor O e t t i n g e r an der Universität zu F r e i b u r g i. B.

Herr Dr. S c h l e c h t e r, Lehrer am Gymnasium zu B r u c h s a l, gibt im d r i t t e n H e f t e T h e i l XXXIV. dieses A r c h i v s Nr. XVI. S. 291 u. ff. eine Methode über Bestimmung der Zeit für mittlere Zahlungstermine an, und vindicirt ihr die Eigenschaft, dass sie die einzig richtige sei. Er nimmt Gelegenheit, dabei über mein Werk über politische Arithmetik (Anleitung zu finanziellen und juridischen Rechnungen) zu sprechen, und sagt, da ich nicht so

glücklich war, die von ihm angeblich richtige Auflösung zu finden, dass ich einerseits einen „Verstoss" und andererseits eine Sonderbarkeit begangen habe, weil ich, zwar das Richtige andeutend und erkennend, doch nicht die Schlusskraft gehabt habe, das Richtig-Erkannte durchzuführen.

Ich habe in der That nimmermehr geglaubt, je in die Lage zu kommen, mich nothgedrungen gegen einen derartigen, durch nichts hervorgerufenen Angriff vertheidigen zu müssen, und sehe mich daher veranlasst, Folgendes zu entgegnen.

Als Minimum der Forderung sollte man mit Recht an Jeden, der wie Herr Dr. Schlechter in einer wissenschaftlichen Zeitschrift belehrend und bahnbrechend aufzutreten gewillt ist, zu stellen befugt sein, dass er einerseits die Literatur desjenigen Gegenstandes, worin er belehrend und tonangebend auftritt, genau kennt, wenigstens so vollständig, dass ihm die wichtigeren Vorarbeiten nicht unbekannt sind, andererseits, dass er den Inhalt der Schriften, über die er schreibt, gelesen und richtig aufgefasst habe und möglichst genau wiedergebe.

Ueber diese einfachen Vorbedingungen scheint sich aber Herr Dr. Schlechter ohne Weiteres wegzusetzen, denn er scheint in der That die einschlagenden und von mir theilweise besonders hervorgehobenen Momente, ja sogar den Paragraphen meines Werkes, worin die von ihm so sehr betonte Aufgabe abgehandelt wird, gar nicht zu kennen.

Hätte nun Herr Dr. Schlechter §§. 28.—30. meines Werkes gelesen, worin das Verhältniss der Rechnung mit einfachen Zinsen zu der mit Zinses-Zinsen ausführlich behandelt und durch den Calcul nachgewiesen wird, dass so oft die Werthe zu verschiedenen Zeiten fälliger Capitalien unter einander verglichen, oder auf irgend einen beliebigen Zeitpunkt (also auf mittlere Zahlungstermine) zurückgeführt werden sollen, nur dann richtige Resultate gewonnen werden, wenn die Rabattirung oder Admassirung durch Zinses-Zinsen geschieht, und dass die Rechnung mit einfachen Zinsen unrichtige Resultate liefere und liefern müsse; hätte er den Inhalt der §§. 44.—49. beachtet, wo die verschiedenen Methoden (Pinkhard'sche, Hoffmann'sche und Leibnitz'sche) sorgfältig geprüft und die Richtigkeit des Ebengesagten an ausführlichen Beispielen verdeutlicht und namentlich das Unsichere und Schwankende in den Begriffen der frühern Mathematiker über diesen Punkt (§. 49.) nachgewiesen wird; hätte er das, was ich in der Vorrede S. 6. u. ff. über Anwendung der Rechnung mit einfachen Zinsen und Zinses-Zinsen besonders hervorhob,

verglichen, so hätte er sich nimmermehr zu den von ihm gemachten Aeusserungen hinreissen lassen können. Diese Aeusserungen sind aber in der That um so unerklärlicher, als in § 40. S. 97. meines Werkes die von ihm so sehr belobte Aufgabe zwar kurz, aber ganz vollständig durch Zinses Zins-Rechnung behandelt und bemerkt ist, dass der mittlere Zahlungstermin (x) aus der Gleichung

$$\frac{T_1}{1{,}0p}+\frac{T_2}{1{,}0p^2}+\frac{T_3}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{T_n}{1{,}0p^n}=\frac{T_1+T_2+T_3\ldots T_n}{1{,}0p^x}$$

bestimmt werden müsse (und auch bestimmt ist), wenn ein richtiges Resultat erhalten werden soll, wobei $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$ die einzeln fälligen Summen und p den Zinsfuss bedeutet. Zugefügt ist noch in's Besondere, dass nur die eben angegebene Methode ein richtiges, dagegen die in §. 15. meines Werkes angegebene ein unrichtiges Resultat liefere.

Angesichts dieser Thatsachen scheint Herr Dr. Schlechter die einschlagenden Stellen und Paragraphen meines Werkes, worüber er ein so unliebsames und schnellfertiges Urtheil fällt, gar nicht zu kennen.

Schliesslich glaube ich bemerken zu sollen, dass wenn Herr Dr. Schlechter sich die Mühe geben wollte, die angeführten Stellen und Paragraphen meines Werkes zu lesen und richtig aufzufassen, er zu einem andern Resultate und zu der Ansicht gelangen wird, dass die von ihm gegebene Auflösung eben so falsch und unrichtig, als die von ihm bekämpfte ist, denn sie beruht auf demselben unrichtigen Princip, nämlich auf der Rechnung mit einfachen Zinsen, die ungeachtet der von ihm aufgeführten angeblich innern Gründe in der gebrauchten Anwendung auf ein unrichtiges Resultat führen muss.

Freiburg i. B. im Juli 1860.

Dr. L. Oettinger.

B. Auszug aus einem Schreiben des Herrn Gymnasiallehrer Beschorner in Glatz an den Herausgeber.

So eben habe ich den Aufsatz des Herrn Gymnasiallehrers Dr. Schlechter in Heft 3. Theil XXXIV. Ihres geschätzten Archivs: „Ueber mittlere Zahlungstermine mit ein-

fachen Zinsen" durchgelesen, worin der geehrte Verfasser p. 293. sagt: „Man erkennt also aus dieser Entwickelung, dass der mittlere Zahlungstermin nicht allein von der Zeit, nach welcher die Kapitalien zu entrichten sind, und von ihrer Grösse, sondern auch vom Zinsfusse abhängt." — — — „Gegen diese Wahrheit werden Verstösse gemacht in allen mir hierüber bekannten Schriften."

Ich bin erfreut, Herrn Dr. Schlechter ein Werk, und zwar eins der bedeutendsten der hier berührten Gattung von Werken nennen zu können, in welchem der von ihm mit Recht gerügte Verstoss nicht gemacht wird. Dr. Schellen *) behandelt in Abschnitt IX. §. 22., 2. seines ausgezeichneten Handbuches: „Methodisch geordnete Materialien für den Unterricht im theoretischen und praktischen Rechnen" die Aufgaben über den mittleren Zahlungstermin vollkommen richtig, indem er den Schüler zuerst aus den Kapitalien k_1, k_2, $k_3 \ldots$, welche nach resp. a, b, $c \ldots$ Jahren zu zahlen sind, die baaren Werthe x_1, x_2, $x_3 \ldots$ berechnen und sodann folgendermaassen schliessen lässt:

x_1	bringt in a Jahr. dieselb. Zins. wie	ax_1	in 1 Jahre;
x_2	„ „ b „ „ „ „	bx_2	„ 1 „
x_3	„ „ c „ „ „ „	cx_3	„ 1 „
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_1+x_2+x_3+\ldots$	„ x „ „ „ „	$ax_1+bx_2+cx_3+\ldots$	„ 1 „

Dies giebt:

$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + \ldots}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}.$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$x = \frac{100k}{100+np}, \text{ also } x_1 = \frac{100k_1}{100+ap} \text{ u. s. w.,}$$

so erhält man die Gleichung 10) pag. 292., wie sie Herr Doctor Schlechter hergeleitet hat.

Glatz, den 10. August 1860.

Beschorner, Gymnasiallehrer.

---

*) Director der Realschule zu Cöln.

VII.

Lagenbestimmungen auf der Kugel, eine Ergänzung der sphärischen Trigonometrie, mit besonderer Rücksicht auf Geodäsie.

Von
dem Herausgeber.

I.

Die Lage eines Punktes auf einer mit dem Halbmesser r um den Mittelpunkt O beschriebenen Kugelfläche, den wir durch A bezeichnen wollen, wird bestimmt durch seine drei Coordinaten x, y, z in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt O als Anfang gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem; oder durch die drei, 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ, welche der von dem Mittelpunkte O aus nach dem Punkte A gezogene Halbmesser $\overline{OA}$ der Kugel respective mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst; oder endlich durch seine Länge und Breite L, B, wo die Länge in der Ebene der xy von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° gezählt wird, die Breite dagegen absolut nicht grösser als 90° genommen, aber als positiv oder negativ betrachtet wird, jenachdem der Punkt A auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy liegt.

Alle drei Lagenbestimmungen kommen im Wesentlichen auf Dasselbe hinaus, und die Bestimmungsstücke nach der einen Methode lassen sich immer leicht aus den Bestimmungsstücken nach einer der beiden anderen Methoden ableiten, weil zwischen den Grössen

$$x, y, z; \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad L, B$$

die folgenden Gleichungen bestehen, von deren ganz allgemeinen Gültigkeit man sich auf der Stelle überzeugt:

1)

$$x = r\cos\alpha,\quad x = r\cos L\cos B,\quad \cos\alpha = \cos L\cos B,$$
$$y = r\cos\beta,\quad y = r\sin L\cos B,\quad \cos\beta = \sin L\cos B,$$
$$z = r\cos\gamma;\quad z = r\sin B;\quad \cos\gamma = \sin B;$$

wo man also zur Bestimmung von L, B aus x, y, z oder α, β, γ die Formeln:

2)

$$\sin B = \frac{z}{r} = \cos\gamma;$$

$$\cos L = \frac{x}{r\cos B} = \frac{\cos\alpha}{\cos B},\quad \sin L = \frac{y}{r\cos B} = \frac{\cos\beta}{\cos B},$$

$$\operatorname{tang} L = \frac{y}{x} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

hat, bei denen man nicht ausser Acht lassen darf, dass die Breite B durch die erste Formel jederzeit vollkommen und ohne alle Zweideutigkeit bestimmt wird, weil nach der Voraussetzung

$$-90^0 < B < +90^0$$

ist, dass man sich aber bei der Bestimmung der Länge L an die folgenden Regeln zu halten hat:

Wenn

x oder $\cos\alpha$	und	y oder $\cos\beta$
positiv		positiv
negativ		positiv
negativ		negativ
positiv		negativ

ist, so ist respective:

$$0 < L < 90^0,$$
$$90^0 < L < 180^0,$$
$$180^0 < L < 270^0,$$
$$270^0 < L < 360^0.$$

In dieser Abhandlung habe ich nun lediglich die Lagenbestimmungen auf der Kugel im Auge, welche die Geodäsie unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde sich zur Aufgabe macht. Bei diesen Lagenbestimmungen, die natürlich wie alle Lagenbestimmungen nur relative sein können, werden im Allgemeinen

immer zwei Punkte auf der Kugel ihrer Lage nach als gegeben oder bekannt angenommen und durch geeignete Messungen die Lage eines dritten Punktes bestimmt, worüber hier die folgenden näheren Erläuterungen nöthig sein dürften. Bezeichnen wir die beiden gegebenen Punkte durch A_0 und A_1, und den seiner Lage nach zu bestimmenden Punkt durch A_2; so sind für die beiden ersten Punkte A_0 und A_1 die Grössen

$$x_0, y_0, z_0; \quad \alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \quad L_0, B_0$$

und

$$x_1, y_1, z_1; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad L_1, B_1$$

gegeben, und aus denselben sollen für den dritten Punkt A_2, die Grössen

$$x_2, y_2, z_2; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad L_2, B_2$$

auf Grund geeigneter Messungen abgeleitet oder bestimmt werden. Diese Messungen werden aber immer in oder an dem durch die drei Punkte A_0, A_1, A_2 bestimmten sphärischen Dreieck $\overline{A_0A_1A_2}$, dessen Winkel und gegenüberstehende Seiten wir im Folgenden durch

$$\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \quad \text{und} \quad a_0, a_1, a_2$$

bezeichnen wollen, vorgenommen, und können nur Winkel und Seiten dieses Dreiecks sein. Da aber die Lage der beiden Punkte A_0 und A_1 als gegeben betrachtet wird, so ist in dem Dreiecke $\overline{A_0A_1A_2}$ die Seite a_2 jederzeit gegeben, weil nach einer bekannten Formel

$$3) \qquad \cos a_2 = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

oder nach dem Obigen:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \cos a_2 = \frac{x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1}{r^2},$$

oder, wie leicht erhellet:

$$5) \qquad \cos a_2 = \sin B_0 \sin B_1 + \cos(L_0 - L_1)\cos B_0 \cos B_1$$

ist; und es brauchen also in dem Dreiecke $\overline{A_0A_1A_2}$ immer nur noch zwei Stücke gemessen werden, um in Verbindung mit der bekannten Seite a_2 die zur Lagenbestimmung des Punktes A_2 erforderlichen Elemente

$$x_2, y_2, z_2; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad L_2, B_2$$

berechnen zu können. Auf diese Weise ergeben sich überhaupt sechs hierher gehörende Aufgaben, weil die zwei gemessenen Stücke nur die folgenden sein können:

1. A_0 und A_1;
2. a_0 „ a_1;
3. A_0 und a_1 oder A_1 und a_0;
4. A_0 „ A_2 „ A_1 „ A_2;
5. A_0 „ a_0 „ A_1 „ a_1;
6. a_0 „ A_2 „ a_1 „ A_2.

Zur Auflösung aller dieser Aufgaben reichen allerdings die bekannten Hülfsmittel der sphärischen Trigonometrie vollständig hin; aber es ist dazu stets die Verbindung mehrerer sphärischer Dreiecke und also auch die Anwendung mehrerer Aufgaben der sphärischen Trigonometrie nöthig; auch muss man dabei meistens eine Figur vor Augen haben, weil immer eine grössere Anzahl verschiedener Fälle eintreten kann, deren gehörige Unterscheidung nicht wohl anders möglich ist, als durch den Anschluss an eine Figur, was jedenfalls wenigstens für den, der im Geiste der neueren Wissenschaft an ganz allgemeine analytische Betrachtungen und überall an ganz allgemeine, alle Fälle umfassende Rechnungen gewöhnt ist, und dieselben allen übrigen Betrachtungsweisen vorzieht, sehr störend und lästig, auch dem Geiste des neueren Calculs wenig entsprechend ist. Ich bin daher geneigt, es für eine nicht unwesentliche Vervollständigung der sphärischen Trigonometrie zu halten, wenn es möglich sein sollte, zweckmässige und elegante, ganz allgemein gültige analytische Formeln zu entwickeln, durch welche die obigen Aufgaben aufgelöst werden, ohne eine Verbindung mehrerer sphärischer Dreiecke und ohne den Anschluss an eine Figur nöthig zu machen, und zugleich auf eine solche Weise, dass die gesuchten Grössen

$$x_2,\ y_2,\ z_2;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad L_2,\ B_2$$

so viel als möglich ganz unmittelbar und völlig independent aus den gegebenen Stücken abgeleitet werden können. Solche Formeln, die ich in mehrfacher Beziehung für merkwürdig und wichtig halte, beabsichtige ich in dieser Abhandlung zu entwickeln.

Dabei ist es aber keineswegs meine Absicht, die obigen sechs Aufgaben in der angegebenen Weise hier vollständig aufzulösen, was in Weitläufigkeiten führen würde und auch völlig unnöthig ist, indem es vielmehr vollständig genügt, nur eine dieser sechs Aufgaben auf die in Rede stehende Art zu lösen. Denn wenn man diese eine Aufgabe gelöst hat, so hat es keine Schwierig-

keit, alle übrigen auf dieselbe zurückzuführen, weil man aus den beiden gegebenen oder vielmehr gemessenen Stücken des sphärischen Dreiecks $\overline{A_0 A_1 A_2}$ in Verbindung mit der gegebenen Seite a_2 immer die beiden Stücke, welche in Verbindung mit der ein für alle Mal bekannten Seite a_2 die Grundlage der in Rede stehenden Aufgabe bildeten, nach den bekannten allgemeinen Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten und in ganz allgemeinen analytischen Ausdrücken darstellen kann, wobei eine Unterscheidung verschiedener Fälle und ein Anschliessen an eine Figur eben so wenig wie eine Verbindung mehrerer sphärischer Dreiecke erforderlich ist, weil man ja nur das eine sphärische Dreieck $\overline{A_0 A_1 A_2}$ in Betrachtung zu ziehen hat. Zu der einen Fundamental-Aufgabe, auf welche alle unsere obigen Aufgaben auf die so eben angegebene Weise zurückgeführt werden können, wähle ich hier nun die erste dieser Aufgaben, wenn nämlich in dem sphärischen Dreiecke $\overline{A_0 A_1 A_2}$ die beiden an der gegebenen Seite oder Basis a_2 liegenden Winkel A_0 und A_1 gemessen worden sind, welche bekanntlich besonders für die Geodäsie von der grössten Wichtigkeit, ja eigentlich die Aufgabe ist, auf welche alle geodätischen Messungen und Rechnungen zurückkommen.

Wenn, wie in der zweiten Aufgabe, die beiden Seiten a_0 und a_1 gegeben sind, so werden die beiden Winkel A_0 und A_1 mittelst der bekannten, ganz allgemein gültigen Formeln

6)

$$\cos A_0 = \frac{\cos a_0 - \cos a_1 \cos a_2}{\sin a_1 \sin a_2}, \quad \cos A_1 = \frac{\cos a_1 - \cos a_0 \cos a_2}{\sin a_0 \sin a_2}$$

oder durch andere, aus der sphärischen Trigonometrie bekannte Formeln bestimmt; wodurch dann die zweite Aufgabe auf die erste zurückgeführt ist.

Wenn, wie in der dritten Aufgabe, die Stücke A_0 und a_1 oder A_1 und a_0 gegeben sind, so hat man zur Bestimmung des Winkels A_1 oder A_0 die bekannten Formeln:

$$7) \quad \ldots \quad \cot A_1 = \frac{\cot a_1 \sin a_2 - \cos A_0 \cos a_2}{\sin A_0}$$

oder

$$7^*) \quad \ldots \quad \cot A_0 = \frac{\cot a_0 \sin a_2 - \cos A_1 \cos a_2}{\sin A_1};$$

durch welche die dritte Aufgabe wiederum auf die erste zurückgeführt ist.

Wenn, wie in der vierten Aufgabe, die Stücke A_0 und A_2 oder A_1 und A_2 gegeben sind, so werden die Winkel A_1 oder A_0 durch Auflösung der Gleichung

$$8) \quad \ldots \cos A_2 = \cos a_2 \sin A_0 . \sin A_1 - \cos A_0 . \cos A_1$$

oder der Gleichung

$$8^*) \quad \ldots \cos A_2 = \cos a_2 \sin A_1 . \sin A_0 - \cos A_1 . \cos A_0$$

gefunden und dadurch die vierte Aufgabe auf die erste zurückgeführt.

Wenn, wie in der fünften Aufgabe, die Stücke A_0 und a_0 oder A_1 und a_1 gegeben sind, so findet man A_1 oder A_0 durch Auflösung der Gleichung

$$9) \quad \ldots \cot a_0 \sin a_2 = \cot A_0 . \sin A_1 + \cos a_2 . \cos A_1$$

oder der Gleichung

$$9^*) \quad \ldots \cot a_1 \sin a_2 = \cot A_1 . \sin A_0 + \cos a_2 . \cos A_0,$$

wo nun wieder die erste Aufgabe unmittelbar Anwendung finden kann.

Wenn, wie in der sechsten Aufgabe, die Stücke a_0 und A_2 oder a_1 und A_2 gegeben sind, so findet man die zur Zurückführung auf die erste Aufgabe nöthigen Winkel A_0 und A_1 mittelst der Gleichungen:

10)

$$\sin A_0 = \frac{\sin a_0 \sin A_2}{\sin a_2}, \quad \sin a_0 \cot a_2 = \cot A_2 . \sin A_1 + \cos a_0 . \cos A_1$$

oder

10*)

$$\sin A_1 = \frac{\sin a_1 \sin A_2}{\sin a_2}, \quad \sin a_1 \cot a_2 = \cot A_2 . \sin A_0 + \cos a_1 . \cos A_0.$$

Welche von diesen Aufgaben völlig bestimmt und welche theilweise unbestimmt sind, ist aus der sphärischen Trigonometrie bekannt genug und hier nicht weiter zu erläutern; eben so wenig ist hier noch etwas zu sagen über die vielfachen anderen Hülfsmittel, welche die sphärische Trigonometrie zur Auflösung der vorstehenden Aufgaben an die Hand giebt. Wir haben es von jetzt an nur mit der Lösung der folgenden Aufgabe zu thun:

Wenn die Lage der beiden Punkte A_0 und A_1 auf der Kugel bekannt ist, und in dem durch diese beiden Punkte und einen dritten Punkt A_2 bestimmten sphäri-

schen Dreiecke $\overline{A_0 A_1 A_2}$ die beiden Winkel $\angle \overline{A_1 A_0 A_2} = \mathrm{A}_0$ und $\angle \overline{A_0 A_1 A_2} = \mathrm{A}_1$ gemessen worden sind: die Lage des Punktes A_2 auf der Kugel zu bestimmen.

Zur Lösung dieser Aufgabe durch ganz allgemein gültige, eine völlig directe Bestimmung der Lage des unbekannten Punktes aus den gegebenen Elementen gestattende Formeln wollen wir im Folgenden nun übergehen, indem wir der Meinung sind, dass diese durch ihre Eleganz sich auszeichnenden Formeln als eine nicht unwesentliche Ergänzung der sphärischen Trigonometrie betrachtet werden dürfen und für die Geodäsie nicht ohne Bedeutung sind.

II.

Die Auflösung der zweiten unter unseren sechs Aufgaben, der wir zuvörderst unsere Aufmerksamkeit zuwenden, ist offenbar in den drei Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \cos a_0 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2, \\ \cos a_1 = \cos\alpha_0 \cos\alpha_2 + \cos\beta_0 \cos\beta_2 + \cos\gamma_0 \cos\gamma_2, \\ \cos\alpha_2^2 + \cos\beta_2^2 + \cos\gamma_2^2 = 1 \end{cases}$$

enthalten, mittelst welcher die drei gesuchten Grössen α_2, β_2, γ_2 bestimmt werden müssen. Um diese Bestimmung mit möglichster Leichtigkeit auszuführen, setzen wir der Kürze wegen:

$$2)$$

$$A = \frac{(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos a_2)\cos a_0 + (\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1 \cos a_2)\cos a_1}{\sin a_2^2},$$

$$B = \frac{(\cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos a_2)\cos a_0 + (\cos\beta_0 - \cos\beta_1 \cos a_2)\cos a_1}{\sin a_2^2},$$

$$C = \frac{(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos a_2)\cos a_0 + (\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 \cos a_2)\cos a_1}{\sin a_2^2};$$

wo natürlich A, B, C bekannte Grössen sind. Weil nun offenbar nach I. 3) und bekannten Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha_0(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos a_2) \\ +\cos\beta_0(\cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos a_2) \\ +\cos\gamma_0(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos a_2) \end{array}\right\} = \cos a_2 - \cos a_2 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha_0(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1 \cos a_2) \\ +\cos\beta_0(\cos\beta_0 - \cos\beta_1 \cos a_2) \\ +\cos\gamma_0(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 \cos a_2) \end{array}\right\} = 1 - \cos a_2^2 = \sin a_2^2$$

und ganz eben so:

$$\left.\begin{array}{r}\cos\alpha_1(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos a_2)\\+\cos\beta_1(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos a_2)\\+\cos\gamma_1(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos a_2)\end{array}\right\}=\cos a_2-\cos a_2=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\cos\alpha_1(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos a_2)\\+\cos\beta_1(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos a_2)\\+\cos\gamma_1(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos a_2)\end{array}\right\}=1-\cos a_2{}^2=\sin a_2{}^2$$

ist; so hat man nach 2) offenbar die zwei folgenden Gleichungen:

$$3)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0=\cos a_1,\\A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1=\cos a_0.\end{array}\right.$$

Ferner setze man jetzt:

$$4)\quad\ldots\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_2=A+X,\\\cos\beta_2=B+Y,\\\cos\gamma_2=C+Z;\end{array}\right.$$

so ist nach 1) und 3) offenbar:

$$5)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0.X+\cos\beta_0.Y+\cos\gamma_0.Z=0,\\\cos\alpha_1.X+\cos\beta_1.Y+\cos\gamma_1.Z=0.\end{array}\right.$$

Multiplicirt man die Ausdrücke 2) von A, B, C respective mit X, Y, Z und addirt die Producte zu einander, so erhält man mit Rücksicht auf die beiden vorstehenden Gleichungen die Gleichung:

$$6)\quad\ldots\ldots\quad AX+BY+CZ=0.$$

Wenn man nun die drei Gleichungen 4) quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man wegen vorstehender Gleichung auf der Stelle die Gleichung:

$$7)\quad\ldots\quad(A^2+B^2+C^2)+(X^2+Y^2+Z^2)=1,$$

und hat also jetzt nach 5) und 7) zur Bestimmung von X, Y, Z die drei Gleichungen:

$$8)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0.X+\cos\beta_0.Y+\cos\gamma_0.Z=0,\\\cos\alpha_1.X+\cos\beta_1.Y+\cos\gamma_1.Z=0,\\X^2+Y^2+Z^2=1-(A^2+B^2+C^2).\end{array}\right.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen dieses Systems erhält man, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$9) \quad \begin{cases} X = G(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1), \\ Y = G(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1), \\ Z = G(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1); \end{cases}$$

also, wenn man diese Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt, nach einer bekannten Transformation der Summe dreier Quadrate von der sich hieraus ergebenden Form, mit Rücksicht auf I. 3):

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = G^2 \sin a_2{}^2,$$

also wegen der dritten der Gleichungen 8):

$$G^2 \sin a_2{}^2 = 1 - (A^2 + B^2 + C^2),$$

woraus sich

$$10) \quad G = \pm \frac{\sqrt{1-(A^2+B^2+C^2)}}{\sin a_2},$$

und folglich nach 9):

$$11) \quad \begin{cases} X = \pm \dfrac{(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)\sqrt{1-(A^2+B^2+C^2)}}{\sin a_2}, \\ Y = \pm \dfrac{(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\sqrt{1-(A^2+B^2+C^2)}}{\sin a_2}, \\ Z = \pm \dfrac{(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\sqrt{1-(A^2+B^2+C^2)}}{\sin a_2}; \end{cases}$$

also endlich nach 4):

12)

$$\cos\alpha_2 = A \pm \frac{(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)\sqrt{1-(A^2+B^2+C^2)}}{\sin a_2},$$

$$\cos\beta_2 = B \pm \frac{(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\sqrt{1-(A^2+B^2+C^2)}}{\sin a_2},$$

$$\cos\gamma_2 = C \pm \frac{(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\sqrt{1-(A^2+B^2+C^2)}}{\sin a_2}$$

ergiebt, mittelst welcher Formeln, in denen, so wie in allen unseren Formeln, sich natürlich die oberen und unteren Zeichen auf einander beziehen, die unbekannten Grössen α_2, β_2, γ_2 zu bestimmen sind.

Wir wollen nun die durch A, B, C bezeichneten Grössen in 2) etwas näher betrachten.

Zuerst findet man mittelst leichter Rechnung aus 2):

$$A-\cos\alpha_0\cos a_1=\frac{(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos a_2)(\cos a_0-\cos a_1\cos a_2)}{\sin a_2{}^2},$$

$$B-\cos\beta_0\cos a_1=\frac{(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos a_2)(\cos a_0-\cos a_1\cos a_2)}{\sin a_2{}^2},$$

$$C-\cos\gamma_0\cos a_1=\frac{(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos a_2)(\cos a_0-\cos a_1\cos a_2)}{\sin a_2{}^2};$$

so wie:

$$A-\cos\alpha_1\cos a_0=\frac{(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos a_2)(\cos a_1-\cos a_0\cos a_2)}{\sin a_2{}^2},$$

$$B-\cos\beta_1\cos a_0=\frac{(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos a_2)(\cos a_1-\cos a_0\cos a_2)}{\sin a_2{}^2},$$

$$C-\cos\gamma_1\cos a_0=\frac{(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos a_2)(\cos a_1-\cos a_0\cos a_2)}{\sin a_2{}^2};$$

und hat also für A, B, C auch die folgenden Ausdrücke:

13)

$$A=\cos\alpha_0\cos a_1+\frac{(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos a_2)(\cos a_0-\cos a_1\cos a_2)}{\sin a_2{}^2},$$

$$B=\cos\beta_0\cos a_1+\frac{(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos a_2)(\cos a_0-\cos a_1\cos a_2)}{\sin a_2{}^2},$$

$$C=\cos\gamma_0\cos a_1+\frac{(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos a_2)(\cos a_0-\cos a_1\cos a_2)}{\sin a_2{}^2};$$

und

14)

$$A=\cos\alpha_1\cos a_0+\frac{(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos a_2)(\cos a_1-\cos a_0\cos a_2)}{\sin a_2{}^2},$$

$$B=\cos\beta_1\cos a_0+\frac{(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos a_2)(\cos a_1-\cos a_0\cos a_2)}{\sin a_2{}^2},$$

$$C=\cos\gamma_1\cos a_0+\frac{(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos a_2)(\cos a_1-\cos a_0\cos a_2)}{\sin a_2{}^2}.$$

Nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ist bekanntlich:

15) . . . $\begin{cases} \cos A_0 = \dfrac{\cos a_0 - \cos a_1 \cos a_2}{\sin a_1 \sin a_2}, \\ \cos A_1 = \dfrac{\cos a_1 - \cos a_2 \cos a_0}{\sin a_2 \sin a_0}, \\ \cos A_2 = \dfrac{\cos a_2 - \cos a_0 \cos a_1}{\sin a_0 \sin a_1}; \end{cases}$

also:

16) . . $\begin{cases} \cos a_0 - \cos a_1 \cos a_2 = \sin a_1 \sin a_2 \cos A_0, \\ \cos a_1 - \cos a_2 \cos a_0 = \sin a_2 \sin a_0 \cos A_1, \\ \cos a_2 - \cos a_0 \cos a_1 = \sin a_0 \sin a_1 \cos A_2; \end{cases}$

und folglich nach 13) und 14):

17)

$$A = \cos\alpha_0 \cos a_1 + \frac{\sin a_1}{\sin a_2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos a_2)\cos A_0,$$

$$B = \cos\beta_0 \cos a_1 + \frac{\sin a_1}{\sin a_2}(\cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos a_2)\cos A_0,$$

$$C = \cos\gamma_0 \cos a_1 + \frac{\sin a_1}{\sin a_2}(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos a_2)\cos A_0$$

und:

18)

$$A = \cos\alpha_1 \cos a_0 + \frac{\sin a_0}{\sin a_2}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1 \cos a_2)\cos A_1,$$

$$B = \cos\beta_1 \cos a_0 + \frac{\sin a_0}{\sin a_2}(\cos\beta_0 - \cos\beta_1 \cos a_2)\cos A_1,$$

$$C = \cos\gamma_1 \cos a_0 + \frac{\sin a_0}{\sin a_2}(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 \cos a_2)\cos A_1;$$

welche Formeln auch auf folgende Art geschrieben werden können:

19)

$$A \sin a_2 = (\cos a_1 \sin a_2 - \sin a_1 \cos a_2 \cos A_0)\cos\alpha_0 + \sin a_1 \cos A_0 \cos\alpha_1,$$

$$B \sin a_2 = (\cos a_1 \sin a_2 - \sin a_1 \cos a_2 \cos A_0)\cos\beta_0 + \sin a_1 \cos A_0 \cos\beta_1,$$

$$C \sin a_2 = (\cos a_1 \sin a_2 - \sin a_1 \cos a_2 \cos A_0)\cos\gamma_0 + \sin a_1 \cos A_0 \cos\gamma_1$$

und:

20)

$$A \sin a_2 = (\cos a_0 \sin a_2 - \sin a_0 \cos a_2 \cos \mathrm{A}_1) \cos\alpha_1 + \sin a_0 \cos \mathrm{A}_1 \cos\alpha_0,$$
$$B \sin a_2 = (\cos a_0 \sin a_2 - \sin a_0 \cos a_2 \cos \mathrm{A}_1) \cos\beta_1 + \sin a_0 \cos \mathrm{A}_1 \cos\beta_0,$$
$$C \sin a_2 = (\cos a_0 \sin a_2 - \sin a_0 \cos a_2 \cos \mathrm{A}_1) \cos\gamma_1 + \sin a_0 \cos \mathrm{A}_1 \cos\gamma_0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich sehr leicht die folgenden Relationen:

21)

$$(B \cos\alpha_0 - A \cos\beta_0) \sin a_2 = \sin a_1 \cos \mathrm{A}_0 (\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1),$$
$$(C \cos\beta_0 - B \cos\gamma_0) \sin a_2 = \sin a_1 \cos \mathrm{A}_0 (\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos\beta_1),$$
$$(A \cos\gamma_0 - C \cos\alpha_0) \sin a_2 = \sin a_1 \cos \mathrm{A}_0 (\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos\gamma_1)$$

und:

22)

$$(A \cos\beta_1 - B \cos\alpha_1) \sin a_2 = \sin a_0 \cos \mathrm{A}_1 (\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1),$$
$$(B \cos\gamma_1 - C \cos\beta_1) \sin a_2 = \sin a_0 \cos \mathrm{A}_1 (\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos\beta_1),$$
$$(C \cos\alpha_1 - A \cos\gamma_1) \sin a_2 = \sin a_0 \cos \mathrm{A}_1 (\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos\gamma_1);$$

welche Formeln man nach einem einfachen Satze der sphärischen Trigonometrie auch auf folgende Art schreiben kann:

21*)

$$(B \cos\alpha_0 - A \cos\beta_0) \sin \mathrm{A}_2 = \cos \mathrm{A}_0 \sin \mathrm{A}_1 (\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1),$$
$$(C \cos\beta_0 - B \cos\gamma_0) \sin \mathrm{A}_2 = \cos \mathrm{A}_0 \sin \mathrm{A}_1 (\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos\beta_1),$$
$$(A \cos\gamma_0 - C \cos\alpha_0) \sin \mathrm{A}_2 = \cos \mathrm{A}_0 \sin \mathrm{A}_1 (\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos\gamma_1)$$

und:

22*)

$$(A \cos\beta_1 - B \cos\alpha_1) \sin \mathrm{A}_2 = \sin \mathrm{A}_0 \cos \mathrm{A}_1 (\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1),$$
$$(B \cos\gamma_1 - C \cos\beta_1) \sin \mathrm{A}_2 = \sin \mathrm{A}_0 \cos \mathrm{A}_1 (\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos\beta_1),$$
$$(C \cos\alpha_1 - A \cos\gamma_1) \sin \mathrm{A}_2 = \sin \mathrm{A}_0 \cos \mathrm{A}_1 (\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos\gamma_1).$$

Multiplicirt man die Ausdrücke 2) nach der Reihe mit A, B, C und addirt sie dann zu einander, so erhält man mit Rücksicht auf 3):

23) $$A^2 + B^2 + C^2$$
$$= \frac{(\cos a_0 - \cos a_1 \cos a_2) \cos a_0 + (\cos a_1 - \cos a_0 \cos a_2) \cos a_1}{\sin a_2^2},$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$24) \quad \ldots\ldots \quad 1-(A^2+B^2+C^2)$$

$$=\frac{1-\cos a_0{}^2-\cos a_1{}^2-\cos a_2{}^2+2\cos a_0\cos a_1\cos a_2}{\sin a_2{}^2}.$$

Nun ist aber nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie bekanntlich:

25)

$$\sin a_1 \sin a_2 \sin A_0 = \sin a_2 \sin a_0 \sin A_1 = \sin a_0 \sin a_1 \sin A_2$$

$$=\sqrt{1-\cos a_0{}^2-\cos a_1{}^2-\cos a_2{}^2+2\cos a_0\cos a_1\cos a_2},$$

also:

$$26) \quad \ldots\ldots \quad \sqrt{1-(A^2+B^2+C^2)}$$

$$=\sin a_1 \sin A_0 = \sin a_0 \sin A_1 = \frac{\sin a_0 \sin a_1}{\sin a_2}\sin A_2.$$

Weil nach der sphärischen Trigonometrie

$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2}=\frac{\sin A_1}{\sin A_2}, \quad \frac{\sin a_0}{\sin a_2}=\frac{\sin A_0}{\sin A_2}$$

ist, so ist nach den Formeln 17) und 18):

$$A=(\cos a_1-\cos a_2\frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2})\cos\alpha_0+\frac{\cos A_0\sin A_1}{\sin A_2}\cos\alpha_1,$$

$$B=(\cos a_1-\cos a_2\frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2})\cos\beta_0+\frac{\cos A_0\sin A_1}{\sin A_2}\cos\beta_1,$$

$$C=(\cos a_1-\cos a_2\frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2})\cos\gamma_0+\frac{\cos A_0\sin A_1}{\sin A_2}\cos\gamma_1$$

und

$$A=(\cos a_0-\cos a_2\frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2})\cos\alpha_1+\frac{\sin A_0\cos A_1}{\sin A_2}\cos\alpha_0,$$

$$B=(\cos a_0-\cos a_2\frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2})\cos\beta_1+\frac{\sin A_0\cos A_1}{\sin A_2}\cos\beta_0,$$

$$C=(\cos a_0-\cos a_2\frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2})\cos\gamma_1+\frac{\sin A_0\cos A_1}{\sin A_2}\cos\gamma_0.$$

Bekanntlich ist aber nach der sphärischen Trigonometrie:

$$27) \dots \begin{cases} \cos a_0 = \dfrac{\cos A_0 + \cos A_1 \cos A_2}{\sin A_1 \sin A_2}, \\ \cos a_1 = \dfrac{\cos A_1 + \cos A_2 \cos A_0}{\sin A_2 \sin A_0}, \\ \cos a_2 = \dfrac{\cos A_2 + \cos A_0 \cos A_1}{\sin A_0 \sin A_1}; \end{cases}$$

also, wie sogleich erhellet:

$$\cos a_1 - \cos a_2 \frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2} = \frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2},$$

$$\cos a_0 - \cos a_2 \frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2} = \frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2};$$

und folglich nach dem Obigen:

$$28) \begin{cases} A = \dfrac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2} \cos \alpha_0 + \dfrac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2} \cos \alpha_1, \\ B = \dfrac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2} \cos \beta_0 + \dfrac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2} \cos \beta_1, \\ C = \dfrac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2} \cos \gamma_0 + \dfrac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2} \cos \gamma_1. \end{cases}$$

Für die Cosinus der Winkel α_2, β_2, γ_2 erhalten wir nun die folgenden Ausdrücke.

Nach 12) und 26) ist:

$$29) \begin{cases} \cos \alpha_2 = A \pm \dfrac{\sin a_1}{\sin a_2} (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \sin A_0, \\ \cos \beta_2 = B \pm \dfrac{\sin a_1}{\sin a_2} (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \sin A_0, \\ \cos \gamma_2 = C \pm \dfrac{\sin a_1}{\sin a_2} (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \sin A_0 \end{cases}$$

und:

$$30) \begin{cases} \cos \alpha_2 = A \pm \dfrac{\sin a_0}{\sin a_2} (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \sin A_1, \\ \cos \beta_2 = B \pm \dfrac{\sin a_0}{\sin a_2} (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \sin A_1, \\ \cos \gamma_2 = C \pm \dfrac{\sin a_0}{\sin a_2} (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \sin A_1; \end{cases}$$

folglich nach diesen beiden Systemen auch:

$$
31)\quad \begin{cases}
\cos\alpha_2 = A \pm \dfrac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2}(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1), \\[2ex]
\cos\beta_2 = B \pm \dfrac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2}(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1), \\[2ex]
\cos\gamma_2 = C \pm \dfrac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2}(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1).
\end{cases}
$$

Wendet man auf diese Formeln die Relationen 21*) und 22*) an, so erhält man:

$$
32)\ .\ .\ \begin{cases}
\cos\alpha_2 = A \pm (C\cos\beta_0 - B\cos\gamma_0)\tang A_0, \\
\cos\beta_2 = B \pm (A\cos\gamma_0 - C\cos\alpha_0)\tang A_0, \\
\cos\gamma_2 = C \pm (B\cos\alpha_0 - A\cos\beta_0)\tang A_0
\end{cases}
$$

und:

$$
33)\ .\ .\ \begin{cases}
\cos\alpha_2 = A \pm (B\cos\gamma_1 - C\cos\beta_1)\tang A_1, \\
\cos\beta_2 = B \pm (C\cos\alpha_1 - A\cos\gamma_1)\tang A_1, \\
\cos\gamma_2 = C \pm (A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1)\tang A_1.
\end{cases}
$$

Führt man aber in die Formeln 31) die Ausdrücke 28) ein, so erhält man:

34)

$$
\begin{aligned}
\sin A_2\cos\alpha_2 = {} & \sin A_0\cos A_1\cos\alpha_0 + \cos A_0\sin A_1\cos\alpha_1 \\
& \pm \sin A_0\sin A_1(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1), \\
\sin A_2\cos\beta_2 = {} & \sin A_0\cos A_1\cos\beta_0 + \cos A_0\sin A_1\cos\beta_1 \\
& \pm \sin A_0\sin A_1(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1), \\
\sin A_2\cos\gamma_2 = {} & \sin A_0\cos A_1\cos\gamma_0 + \cos A_0\sin A_1\cos\gamma_1 \\
& \pm \sin A_0\sin A_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1);
\end{aligned}
$$

also:

35)

$$
\begin{aligned}
\sin A_2\cos\alpha_2 = {} & \sin A_0(\cos A_1\cos\alpha_0 \pm \sin A_1\cos\beta_0\cos\gamma_1) \\
& + \sin A_1(\cos A_0\cos\alpha_1 \mp \sin A_0\cos\beta_1\cos\gamma_0), \\
\sin A_2\cos\beta_2 = {} & \sin A_0(\cos A_1\cos\beta_0 \pm \sin A_1\cos\gamma_0\cos\alpha_1) \\
& + \sin A_1(\cos A_0\cos\beta_1 \mp \sin A_0\cos\gamma_1\cos\alpha_0), \\
\sin A_2\cos\gamma_2 = {} & \sin A_0(\cos A_1\cos\gamma_0 \pm \sin A_1\cos\alpha_0\cos\beta_1) \\
& + \sin A_1(\cos A_0\cos\gamma_1 \mp \sin A_0\cos\alpha_1\cos\beta_0);
\end{aligned}
$$

oder:

36)

$$\cos\alpha_2 = \frac{\sin A_0}{\sin A_2}(\cos A_1 \cos\alpha_0 \pm \sin A_1 \cos\beta_0 \cos\gamma_1)$$
$$+ \frac{\sin A_1}{\sin A_2}(\cos A_0 \cos\alpha_1 \mp \sin A_0 \cos\beta_1 \cos\gamma_0),$$

$$\cos\beta_2 = \frac{\sin A_0}{\sin A_2}(\cos A_1 \cos\beta_0 \pm \sin A_1 \cos\gamma_0 \cos\alpha_1)$$
$$+ \frac{\sin A_1}{\sin A_2}(\cos A_0 \cos\beta_1 \mp \sin A_0 \cos\gamma_1 \cos\alpha_0),$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{\sin A_0}{\sin A_2}(\cos A_1 \cos\gamma_0 \pm \sin A_1 \cos\alpha_0 \cos\beta_1)$$
$$+ \frac{\sin A_1}{\sin A_2}(\cos A_0 \cos\gamma_1 \mp \sin A_0 \cos\alpha_1 \cos\beta_0).$$

Mittelst dieser eleganten Formeln können α_2, β_2, γ_2 unmittelbar aus den gegebenen Stücken berechnet werden. Allerdings kommt in diesen Formeln auch der Winkel A_2 vor, der eigentlich nicht als unmittelbar gegeben betrachtet wurde, da wir ausser der ein für alle Mal gegebenen Seite a_2 nur noch die Winkel A_0, A_1 als gegeben annahmen. Man hat aber zur Berechnung des Winkels A_2 aus A_0, A_1, a_2 nach der sphärischen Trigonometrie die ganz allgemein gültige Formel:

37) . . . $\cos A_2 = \sin A_0 \sin A_1 \cos a_2 - \cos A_0 \cos A_1$,

und andere bekannte Hülfsmittel in grosser Anzahl. Auch könnte man anführen, dass in der Geodäsie meistens alle drei Winkel der Dreiecke gemessen werden, was aber, von dem hier festgehaltenen theoretischen Standpunkte aus betrachtet, nicht hierher gehört und noch weiterer Erläuterung bedürfen würde.

Dass man in die obigen Formeln statt der Winkel

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

auch die Längen und Breiten

$$L_0, B_0; \quad L_1, B_1; \quad L_2, B_2$$

mittelst der Formeln:

38)

$$\cos\alpha_0 = \cos L_0 \cos B_0, \quad \cos\alpha_1 = \cos L_1 \cos B_1, \quad \cos\alpha_2 = \cos L_2 \cos B_2,$$
$$\cos\beta_0 = \sin L_0 \cos B_0, \quad \cos\beta_1 = \sin L_1 \cos B_1, \quad \cos\beta_2 = \sin L_2 \cos B_2,$$
$$\cos\gamma_0 = \sin B_0; \quad \cos\gamma_1 = \sin B_1; \quad \cos\gamma_2 = \sin B_2$$

einführen kann, versteht sich von selbst. Dadurch erhält man:

39)

$$\cos L_2 \cos B_2 = \frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2} \cos L_0 \cos B_0 + \frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2} \cos L_1 \cos B_1$$
$$\pm \frac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2} (\sin L_0 \cos B_0 \sin B_1 - \sin L_1 \sin B_0 \cos B_1),$$

$$\sin L_2 \cos B_2 = \frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2} \sin L_0 \cos B_0 + \frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2} \sin L_1 \cos B_1$$
$$\mp \frac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2} (\cos L_0 \cos B_0 \sin B_1 - \cos L_1 \sin B_0 \cos B_1),$$

$$\sin B_2 = \frac{\sin A_0 \cos A_1}{\sin A_2} \sin B_0 + \frac{\cos A_0 \sin A_1}{\sin A_2} \sin B_1$$
$$\mp \frac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2} \sin (L_0 - L_1) \cos B_0 \cos B_1.$$

III.

Das Vorkommen doppelter Zeichen in den vorher entwickelten Formeln liegt, wie man sogleich übersieht, ganz in der Natur der Sache, weil es offenbar im Allgemeinen immer zwei Auflösungen der Aufgabe geben wird. Welche Zeichen man zu nehmen hat, muss in jedem einzelnen Falle besonders ermittelt werden; wichtig ist es aber, hiefür ein möglichst allgemeines Kriterium zu haben, zu dessen Entwickelung wir nun übergehen wollen.

Zu dem Ende denken wir uns durch die beiden bekannten Punkte A_0, A_1 und den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene gelegt, welche die Kugel in zwei Hälften theilt, in deren einer der positive Theil, in der anderen der negative Theil der Axe der z liegt, weshalb wir mit Rücksicht hierauf diese beiden Hälften in der Kürze beziehungsweise die positive und die negative Hälfte, nämlich in Bezug auf die in Rede stehende Ebene, nennen wollen. Bezeichnen wir die Gleichung unserer durch den Anfang der Coordinaten gehenden Ebene durch

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z = 0,$$

so kann, weil die Ebene auch durch die Punkte A_0 und A_1 geht, deren Coordinaten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 sind, offenbar

$$2) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A} = y_0z_1 - z_0y_1, \\ \mathfrak{B} = z_0x_1 - x_0z_1, \\ \mathfrak{C} = x_0y_1 - y_0x_1 \end{array}\right.$$

gesetzt werden. Denken wir uns nun durch den Punkt A_2 oder $(x_2y_2z_2)$ eine auf der Ebene der xy senkrecht stehende Gerade gezogen, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit der durch die Gleichung 1) charakterisirten Ebene durch $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$; so ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = 0,$$

also, weil offenbar

$$\mathfrak{x} = x_2, \quad \mathfrak{y} = y_2$$

ist:

$$\mathfrak{A}x_2 + \mathfrak{B}y_2 + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = 0,$$

woraus sich

$$3) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{z} = -\frac{\mathfrak{A}x_2 + \mathfrak{B}y_2}{\mathfrak{C}},$$

folglich nach 2)

$$4) \quad \ldots \quad \mathfrak{z} = -\frac{(y_0z_1 - z_0y_1)x_2 + (z_0x_1 - x_0z_1)y_2}{x_0y_1 - y_0x_1}$$

ergiebt. Jenachdem nun der Punkt A_2 in der positiven oder negativen Hälfte liegt, ist offenbar $z_2 > \mathfrak{z}$ oder $z_2 < \mathfrak{z}$.

Es ist

$$\frac{y_0z_1 - z_0y_1}{r^2} \cdot \frac{x_2}{r} + \frac{z_0x_1 - x_0z_1}{r^2} \cdot \frac{y_2}{r}$$

$$= (\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)\cos\alpha_2 + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\cos\beta_2,$$

und nach II. 34)—36) erhält man leicht:

$$(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)\cos\alpha_2 + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\cos\beta_2$$

$$= -\frac{\sin A_0\cos A_1}{\sin A_2}\cos\gamma_0(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)$$

$$-\frac{\cos A_0\sin A_1}{\sin A_2}\cos\gamma_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)$$

$$\pm\frac{\sin A_0\sin A_1}{\sin A_2}\left\{\begin{array}{c}(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)^2 \\ +(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2\end{array}\right\},$$

Fügt man nun auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die verschwindende Grösse

$$\mp \frac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2}(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)^2$$

$$\pm \frac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2}(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)^2$$

bei, und überlegt, dass

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)^2\\ &\qquad + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2\\ &= 1 - (\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2 = \sin a_2^2\end{aligned}$$

ist, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$\begin{aligned}&(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)\cos\alpha_2 + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\cos\beta_2\\ &= -(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin A_0}{\sin A_2}(\cos A_1\cos\gamma_0 \pm \sin A_1\cos\alpha_0\cos\beta_1)\\ + \frac{\sin A_1}{\sin A_2}(\cos A_0\cos\gamma_1 \mp \sin A_0\cos\alpha_1\cos\beta_0)\end{array}\right\}\\ &\pm \frac{\sin A_0\sin A_1}{\sin A_2}\sin a_2^2,\end{aligned}$$

also nach II. 36):

$$\begin{aligned}&(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)\cos\alpha_2 + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\cos\beta_2\\ &\qquad = -(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\cos\gamma_2 \pm \frac{\sin A_0\sin A_1}{\sin A_2}\sin a_2^2,\end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen auch:

$$\begin{aligned}&\frac{y_0z_1 - z_0y_1}{r^2}\cdot\frac{x_2}{r} + \frac{z_0x_1 - x_0z_1}{r^2}\cdot\frac{y_2}{r}\\ &\qquad = -(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\cos\gamma_2 \pm \frac{\sin A_0\sin A_1}{\sin A_2}\sin a_2^2.\end{aligned}$$

Nach 4) ist:

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{z}}{r} &= -\frac{\frac{y_0z_1 - z_0y_1}{r^2}\cdot\frac{x_2}{r} + \frac{z_0x_1 - x_0z_1}{r^2}\cdot\frac{y_2}{r}}{\frac{x_0y_1 - y_0x_1}{r^2}}\\ &= -\frac{\frac{y_0z_1 - z_0y_1}{r^2}\cdot\frac{x_2}{r} + \frac{z_0x_1 - x_0z_1}{r^2}\cdot\frac{y_2}{r}}{\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1},\end{aligned}$$

also nach dem Vorstehenden:

$$\frac{\mathfrak{z}}{r}=\cos\gamma_2\mp\frac{\sin A_0\sin A_1}{\sin A_2}\cdot\frac{\sin a_2{}^2}{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1},$$

woraus sich unmittelbar

$$\frac{z_2}{r}=\frac{\mathfrak{z}}{r}\pm\frac{\sin A_0\sin A_1}{\sin A_2}\cdot\frac{\sin a_2{}^2}{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}$$

ergiebt.

Weil die Grösse

$$\frac{\sin A_0\sin A_1}{\sin A_2}\sin a_2{}^2$$

stets positiv ist, so ergiebt sich hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, Folgendes:

Wenn A_2 in der positiven Hälfte liegt, also $z_2>\mathfrak{z}$ ist, so muss man die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1$$

positiv oder negativ ist; wenn dagegen A_2 in der negativen Hälfte liegt, also $z_2<\mathfrak{z}$ ist, so muss man die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1$$

negativ oder positiv ist.

Dies lässt sich in folgende allgemeine Regel zusammenfassen:

Man muss die oberen oder die unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Hälfte, in welcher der Punkt A_2 liegt, und die Grösse

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Bekanntlich ist aber

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1=\sin(L_1-L_0)\cos B_0\cos B_1,$$

so dass also, weil das Product $\cos B_0\cos B_1$ stets positiv ist, die Grössen

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1 \text{ und } \sin(L_1-L_0)$$

immer gleiche Vorzeichen haben. Daher lässt sich die obige Regel auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Man muss die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Hälfte, in welcher der Punkt A_2 liegt, und die Grösse $\sin(L_1-L_0)$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Bei geodätischen Messungen wird man mit Rücksicht auf die bekannte Lage des sichtbaren Himmelspols immer leicht zu beurtheilen im Stande sein, ob der Punkt A_2 in der positiven oder negativen Hälfte liegt, und weiter braucht man aus der blossen Anschauung nichts zu entnehmen, um mittelst des vorher ausgesprochenen Kriteriums entscheiden zu können, welche Zeichen man in den Formeln 36) oder 39) zu nehmen hat.

Anhang.

Aehnliche allgemeine Formeln, wie wir im Vorhergehenden für die Kugel entwickelt haben, wollen wir jetzt in der Kürze auch noch für die Ebene entwickeln, welche bei Rechnungen der Geodäsie der Ebene gleichfalls treffliche Dienste leisten.

Man habe, ein rechtwinkliges Coordinaten-System der xy zu Grunde legend, in der Ebene der xy drei Punkte A_0, A_1, A_2, welche das Dreieck $A_0A_1A_2$ bilden. Die an den Spitzen A_0, A_1, A_2 liegenden Winkel dieses Dreiecks bezeichnen wir respective durch A_0, A_1, A_2; und die Seiten A_1A_2, A_2A_0, A_0A_1 mögen beziehungsweise durch a_0, a_1, a_2 bezeichnet werden. Die Coordinaten der Punkte A_0 und A_1, welche wir durch x_0, y_0 und x_1, y_1 bezeichnen, werden als gegeben betrachtet; die beiden Winkel A_0 und A_1 sind gemessen worden; die Coordinaten x_2, y_2 sollen berechnet werden. Dazu hat man die beiden Gleichungen:

$$1) \quad \ldots \quad \begin{cases} a_0{}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2, \\ a_1{}^2=(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2; \end{cases}$$

aus denen x_2, y_2 zu bestimmen sind. Zu dem Ende setzen wir:

$$2) \quad u_0=x_0-x_2,\ v_0=y_0-y_2; \quad x_2=x_0-u_0,\ y_2=y_0-v_0;$$

also:

$$x_1-x_2=u_0-(x_0-x_1), \quad y_1-y_2=v_0-(y_0-y_1);$$

so dass wir nach 1) die folgenden Gleichungen haben:

$$3) \quad \ldots \quad \begin{cases} \{u_0-(x_0-x_1)\}^2+\{v_0-(y_0-y_1)\}^2=a_0{}^2, \\ u_0{}^2+v_0{}^2=a_1{}^2; \end{cases}$$

aus denen sich, weil

$$4) \quad \ldots \quad (x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2=a_2^2$$

ist, sehr leicht die Gleichung

$$(x_0-x_1)u_0+(y_0-y_1)v_0=\frac{a_1^2+a_2^2-a_0^2}{2}$$

ergiebt. Nach den Lehren der ebenen Trigonometrie ist aber:

$$a_1^2+a_2^2-a_0^2=2a_1a_2\cos A_0;$$

also hat man zur Bestimmung von u_0, v_0 die beiden folgenden Gleichungen:

$$5) \quad \ldots \quad \begin{cases} (x_0-x_1)u_0+(y_0-y_1)v_0=a_1a_2\cos A_0, \\ u_0^2+v_0^2=a_1^2; \end{cases}$$

deren Auflösung keiner Schwierigkeit unterliegt.

Um uns dieselbe jedoch möglichst zu erleichtern, setzen wir, indem $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ und G_0 noch unbestimmte Grössen bezeichnen:

$$6) \quad \ldots \quad u_0=\mathfrak{A}_0+G_0(x_0-x_1), \quad v_0=\mathfrak{B}_0+G_0(y_0-y_1);$$

so wird die zweite der Gleichungen 5):

$$\{\mathfrak{A}_0+G_0(x_0-x_1)\}^2+\{\mathfrak{B}_0+G_0(y_0-y_1)\}^2=a_1^2,$$

und führt nach gehöriger Entwickelung sogleich zu der Gleichung:

$$\mathfrak{A}_0^2+\mathfrak{B}_0^2+2\{\mathfrak{A}_0(x_0-x_1)+\mathfrak{B}_0(y_0-y_1)\}G_0+a_2^2G_0^2=a_1^2.$$

Denkt man sich aber die bis jetzt noch unbestimmten Grössen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ so bestimmt, dass

$$7) \quad \ldots \quad \mathfrak{A}_0(x_0-x_1)+\mathfrak{B}_0(y_0-y_1)=0$$

ist, so nimmt vorstehende Gleichung die einfachere Form

$$8) \quad \ldots \quad \mathfrak{A}_0^2+\mathfrak{B}_0^2+a_2^2G_0^2=a_1^2$$

an. Die erste der beiden Gleichungen 5) wird nach 6):

$$(x_0-x_1)\{\mathfrak{A}_0+G_0(x_0-x_1)\}+(y_0-y_1)\{\mathfrak{B}_0+G_0(y_0-y_1)\}=a_1a_2\cos A_0,$$

also:

$$\mathfrak{A}_0(x_0-x_1)+\mathfrak{B}_0(y_0-y_1)+\{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2\}G_0=a_1a_2\cos A_0,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

9) . . . . $G_0 = \frac{a_1}{a_2} \cos A_0$,

wie sogleich erhellet.

Aus der Gleichung 7) folgt:

10) . . . . . . $\mathfrak{B}_0 = -\frac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1} \mathfrak{A}_0$,

also wegen der Gleichung 8) mit Rücksicht auf die Gleichung 4):

$$\frac{a_2^2}{(y_0 - y_1)^2} \mathfrak{A}_0^2 + a_2^2 G_0^2 = a_1^2,$$

woraus sich nach 9) sogleich die Gleichung

$$a_2^2 \mathfrak{A}_0^2 = a_1^2 (y_0 - y_1)^2 \sin A_0^2$$

ergiebt. Hieraus aber, in Verbindung mit 10), erhält man die Formeln:

11) $\mathfrak{A}_0 = \pm \frac{a_1 (y_0 - y_1)}{a_2} \sin A_0$, $\mathfrak{B}_0 = \mp \frac{a_1 (x_0 - x_1)}{a_2} \sin A_0$;

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Führt man nun diese Ausdrücke von $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ und den obigen Ausdruck von G_0 in die Formeln 6) ein, so erhält man leicht:

12) . . $\begin{cases} u_0 = \frac{a_1}{a_2} \{(x_0 - x_1) \cos A_0 \pm (y_0 - y_1) \sin A_0\}, \\ v_0 = \frac{a_1}{a_2} \{(y_0 - y_1) \cos A_0 \mp (x_0 - x_1) \sin A_0\}. \end{cases}$

Weil bekanntlich

13) . . . . $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin A_1}{\sin A_2}$

ist, so ist auch:

14) $\begin{cases} u_0 = \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \{(x_0 - x_1) \cos A_0 \pm (y_0 - y_1) \sin A_0\}, \\ v_0 = \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \{(y_0 - y_1) \cos A_0 \mp (x_0 - x_1) \sin A_0\}; \end{cases}$

oder nach 2):

15)

$$x_0 - x_2 = \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \{(x_0 - x_1) \cos A_0 \pm (y_0 - y_1) \sin A_0\},$$

$$y_0 - y_2 = \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \{(y_0 - y_1) \cos A_0 \mp (x_0 - x_1) \sin A_0\}.$$

Weil

$$x_1 - x_2 = (x_0 - x_2) - (x_0 - x_1), \quad y_1 - y_2 = (y_0 - y_2) - (y_0 - y_1)$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\sin A_2 = \sin(A_0 + A_1) \text{ *)}$$

aus den vorstehenden Gleichungen 15) leicht:

$$16)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sin A_0}{\sin A_2}\{(x_1 - x_0)\cos A_1 \mp (y_1 - y_0)\sin A_1\},$$

$$y_1 - y_2 = \frac{\sin A_0}{\sin A_2}\{(y_1 - y_0)\cos A_1 \pm (x_1 - x_0)\sin A_1\};$$

wobei wir ausdrücklich bemerken, dass in den Formeln 15) und 16) sich überall die oberen und unteren Zeichen auf einander beziehen.

Setzen wir

$$17) \quad . \quad . \quad x_0 - x_1 = a_2 \cos P, \quad y_0 - y_1 = a_2 \sin P;$$

was wegen der Gleichung 4) verstattet ist, so nehmen die Gleichungen 15) und 16) die folgende Form an:

$$18) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x_0 - x_2 = a_2 \dfrac{\sin A_1 \cos(P \mp A_0)}{\sin A_2}, \\ y_0 - y_2 = a_2 \dfrac{\sin A_1 \sin(P \mp A_0)}{\sin A_2} \end{cases}$$

und:

$$19) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -a_2 \dfrac{\sin A_0 \cos(P \pm A_1)}{\sin A_2}, \\ y_1 - y_2 = -a_2 \dfrac{\sin A_0 \sin(P \pm A_1)}{\sin A_2}; \end{cases}$$

immer mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander. Die Grössen P und a_2, letztere Grösse natürlich als positiv vorausgesetzt, berechnet man am leichtesten mittelst der Formeln:

---

*) Es wird angenommen, dass in dem Dreieck $A_0A_1A_2$ alle drei Winkel gemessen und auf bekannte Weise so corrigirt worden sind, dass ihre Summe genau 180° beträgt. Diese corrigirten Werthe der drei Winkel bezeichnen dann A_0, A_1, A_2, so dass also

$$A_0 + A_1 + A_2 = 180^\circ$$

ist.

$$20) \quad . \; . \; \tan P = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}, \quad a_2 = \frac{x_0 - x_1}{\cos P} = \frac{y_0 - y_1}{\sin P};$$

nur muss man darauf achten, den Winkel P so zu nehmen, dass auch wirklich die Gleichungen 17) beide erfüllt werden, wobei man sich an die folgenden Regeln zu halten hat:

Wenn

$x_0 - x_1$	$y_0 - y_1$
positiv	positiv
negativ	positiv
negativ	negativ
positiv	negativ

ist, so muss man beziehungsweise P so nehmen, dass

$$0 < P < 90^\circ,$$
$$90^\circ < P < 180^\circ,$$
$$180^\circ < P < 270^\circ,$$
$$270^\circ < P < 360^\circ$$

ist.

Leicht erhält man auch die folgenden Formeln:

$$21) \quad x_2 = \frac{(x_0 \cos A_1 \mp y_0 \sin A_1) \sin A_0 + (x_1 \cos A_0 \pm y_1 \sin A_0) \sin A_1}{\sin A_2},$$

$$y_2 = \frac{(y_0 \cos A_1 \pm x_0 \sin A_1) \sin A_0 + (y_1 \cos A_0 \mp x_1 \sin A_0) \sin A_1}{\sin A_2};$$

welche aber zur Berechnung der Coordinaten x_2, y_2 bei Weitem nicht so bequem sind, wie die obigen Formeln.

Im Allgemeinen lässt unsere Aufgabe, wie dies auch ganz in der Natur der Sache liegt, zwei Auflösungen zu; bei praktischen Anwendungen bedarf man nun aber eines möglichst einfachen Kriteriums, welches zu beurtheilen verstattet, wie in den obigen Formeln die Zeichen zu nehmen sind; ein solches Kriterium kann man auf folgende Art entwickeln.

Die durch die beiden Punkte A_0 und A_1 gehende Gerade, deren Gleichung

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0) \quad \text{oder} \quad y - y_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_1)$$

ist, theilt die Ebene der xy in zwei Theile. Denkt man sich nun durch einen beliebigen Punkt dieser Geraden als Anfang ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinaten-System gelegt, so wird immer in dem einen der beiden in Rede stehenden Theile der Ebene der xy der positive, in dem anderen Theile der negative Theil der zweiten Axe dieses neuen Coordinaten-Systems liegen, insofern die durch A_0 und A_1 gehende Gerade nicht der Axe der y parallel ist, wie wir für jetzt annehmen wollen; mit Rücksicht hierauf wollen wir daher diese beiden Theile der Ebene der xy beziehungsweise in der Kürze den positiven und negativen Theil dieser Ebene nennen. Legen wir jetzt durch den Punkt A_2 oder $(x_2 y_2)$ eine auf der Axe der x senkrecht stehende Gerade und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit der durch A_0 und A_1 gehenden Geraden durch $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$; so ist klar, dass, jenachdem der Punkt A_2 in dem positiven oder negativen Theile der Ebene der xy liegt, $y_2 > \mathfrak{y}$ oder $y_2 < \mathfrak{y}$ ist. Zur Bestimmung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ hat man nach dem Obigen offenbar die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = x_2, \quad \mathfrak{y} - y_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x_2 - x_0);$$

aus denen man leicht

$$\mathfrak{x} = x_2, \quad y_2 - \mathfrak{y} = \frac{(y_0 - y_1)(x_0 - x_2) - (x_0 - x_1)(y_0 - y_2)}{x_0 - x_1}$$

erhält; nun ist aber nach 15):

$$(y_0 - y_1)(x_0 - x_2) = \frac{\sin A_1}{\sin A_2}\{(x_0 - x_1)(y_0 - y_1)\cos A_0 \pm (y_0 - y_1)^2 \sin A_0\},$$

$$(x_0 - x_1)(y_0 - y_2) = \frac{\sin A_1}{\sin A_2}\{(x_0 - x_1)(y_0 - y_1)\cos A_0 \mp (x_0 - x_1)^2 \sin A_0\};$$

also:

$$(y_0 - y_1)(x_0 - x_2) - (x_0 - x_1)(y_0 - y_2)$$

$$= \pm \frac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2}\{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\} = \pm a_2^2 \frac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$y_2 = \mathfrak{y} \pm \frac{\sin A_0 \sin A_1}{\sin A_2} \cdot \frac{a_2^2}{x_0 - x_1},$$

woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, unmittelbar Folgendes ergiebt:

Wenn A_2 im positiven Theile der Ebene der xy liegt, also $y_2 > \mathfrak{y}$ ist, so muss man die oberen oder unteren Zeichen neh-

men, jenachdem $x_0 - x_1$ positiv oder negativ ist; wenn dagegen A_2 im negativen Theile der Ebene der xy liegt, also $y_2 < \mathfrak{y}$ ist, so muss man die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem $x_0 - x_1$ negativ oder positiv ist.

Dies lässt sich kürzer in der folgenden Regel zusammenfassen:

Man muss die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem der Theil der Ebene der xy, in welchem der Punkt A_2 liegt, und die Grösse $x_0 - x_1$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Wäre die durch A_0 und A_1 gehende Gerade der Axe der y parallel, so würde man bei Anwendung dieser Regel an die Stelle der Axe der y die Axe der x setzen müssen, was natürlich im Wesentlichen gar keinen Unterschied macht.

Mittelst der vorhergehenden Formeln kann man verschiedene praktisch wichtige Aufgaben auflösen, was wir jedoch hier nicht weitläufiger ausführen wollen, indem wir uns begnügen, Folgendes zu bemerken. Hat man, so wie die Lage des Punktes A_2 aus den Punkten A_0, A_1 durch Messung der Winkel A_0, A_1 bestimmt worden ist, aus denselben Punkten A_0, A_1 die Lage eines zweiten Punktes A_2' durch Messung der Winkel A_0', A_1' bestimmt, so kann man nach der Entfernung E der beiden Punkte A_2 und A_2' von einander fragen, welche natürlich immer leicht zu bestimmen ist, wenn man nach dem Vorhergehenden die Coordinaten x_2, y_2 und x_2', y_2' dieser Punkte berechnet hat. Man kann aber auch einen allgemeinen Ausdruck dieser Entfernung unmittelbar durch die bekannten Elemente a_2; A_0, A_1; A_0', A_1' auf folgende Art entwickeln.

Man setze der Kürze wegen:

$$22) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \dfrac{\cos \mathrm{A}_0 \sin \mathrm{A}_1}{\sin \mathrm{A}_2}, \quad S = \dfrac{\sin \mathrm{A}_0 \sin \mathrm{A}_1}{\sin \mathrm{A}_2}; \\[2ex] C' = \dfrac{\cos \mathrm{A}_0' \sin \mathrm{A}_1'}{\sin \mathrm{A}_2'}, \quad S' = \dfrac{\sin \mathrm{A}_0' \sin \mathrm{A}_1'}{\sin \mathrm{A}_2'}; \end{array} \right.$$

und unterscheide nun zunächst die beiden folgenden Fälle.

I. Die Punkte A_2, A_2' liegen auf derselben Seite der durch die Punkte A_0, A_1 gehenden Geraden.

Wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Theil der Ebene der xy, in welchem A_2 liegt, und die Grösse $x_0 - x_1$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben; so ist nach dem Obigen:

$$x_0 - x_2 = C(x_0 - x_1) \pm S(y_0 - y_1),$$
$$y_0 - y_2 = C(y_0 - y_1) \mp S(x_0 - x_1)$$

und

$$x_0 - x_2' = C'(x_0 - x_1) \pm S'(y_0 - y_1),$$
$$y_0 - y_2' = C'(y_0 - y_1) \mp S'(x_0 - x_1);$$

also:

$$x_2' - x_2 = (C - C')(x_0 - x_1) \pm (S - S')(y_0 - y_1),$$
$$y_2' - y_2 = (C - C')(y_0 - y_1) \mp (S - S')(x_0 - x_1);$$

folglich, wie man sogleich übersieht:

$$E^2 = a_2^2\{(C - C')^2 + (S - S')^2\}.$$

II. Die Punkte A_2, A_2' liegen auf entgegengesetzten Seiten der durch die Punkte A_0, A_1 gehenden Geraden.

Wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Theil der Ebene der xy, in welchem A_2 liegt, und die Grösse $x_0 - x_1$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, so ist nach dem Obigen:

$$x_0 - x_2 = C(x_0 - x_1) \pm S(y_0 - y_1),$$
$$y_0 - y_2 = C(y_0 - y_1) \mp S(x_0 - x_1)$$

und

$$x_0 - x_2' = C'(x_0 - x_1) \mp S'(y_0 - y_1),$$
$$y_0 - y_2' = C'(y_0 - y_1) \pm S'(x_0 - x_1);$$

also:

$$x_2' - x_2 = (C - C')(x_0 - x_1) \pm (S + S')(y_0 - y_1),$$
$$y_2' - y_2 = (C - C')(y_0 - y_1) \mp (S + S')(x_0 - x_1);$$

folglich, wie man sogleich übersieht:

$$E^2 = a_2^2\{(C - C')^2 + (S + S')^2\}.$$

Also ist nach I. und II.:

$$23) \quad . \; . \; . \quad E^2 = a_2^2\{(C - C')^2 + (S \mp S')^2\},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Punkte A_2 und A_2' auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Punkte A_0 und A_1 gehenden Geraden liegen.

Führt man die obigen Ausdrücke von C, S und C', S' in die Formel 23) ein, so erhält man mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens wie vorher:

24)

$$E = a_2\sqrt{\left(\frac{\sin A_1}{\sin A_2}\right)^2 + \left(\frac{\sin A_1'}{\sin A_2'}\right)^2 - 2\frac{\sin A_1 \sin A_1'}{\sin A_2 \sin A_2'}\cos(A_0 \mp A_0')}$$

und natürlich ganz eben so:

24*)

$$E = a_2 \sqrt{\left(\frac{\sin A_0}{\sin A_2}\right)^2 + \left(\frac{\sin A_0'}{\sin A_2'}\right)^2 - 2\frac{\sin A_0 \sin A_0'}{\sin A_2 \sin A_2'}\cos(A_1 \mp A_1')}.$$

Diese Formeln sind allerdings schon bekannt, lassen sich aber aus unseren obigen Ausdrücken mit besonderer Leichtigkeit und Allgemeinheit ableiten.

VIII.

Ueber Länge und Breite, reducirte Länge und reducirte Breite auf dem dreiaxigen Ellipsoid.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wenn es künftig nöthig werden sollte, die Erde nicht mehr als ein Rotations-Ellipsoid, sondern als ein dreiaxiges Ellipsoid zu betrachten, so würde sich daraus auch von selbst die Nothwendigkeit ergeben, die bis jetzt bloss für das Rotations-Ellipsoid geltenden Begriffe von Länge und Breite auf das dreiaxige Ellipsoid zu erweitern, ferner zu zeigen, was man auf einem solchen Ellipsoid unter reducirter Länge und reducirter Breite zu verstehen hat, so wie möglichst elegante Formeln zu entwickeln, welche die zwischen diesen verschiedenen geographischen Elementen Statt findenden Relationen ausdrücken, wobei wir rücksichtlich der reducirten Länge und reducirten Breite zu erinnern

nicht unterlassen wollen, dass die erste dieser beiden sehr wichtigen Hülfsgrössen nur bei dem dreiaxigen Ellipsoid vorkommt und demselben eigenthümlich ist, indem bei dem Rotations-Ellipsoid Länge und reducirte Länge identisch sind oder mit einander zusammenfallen, weshalb man auch bekanntlich bei dem Rotations-Ellipsoid bis jetzt nur die reducirte Breite gekannt und stets nur von einer solchen gesprochen hat. Die vorliegende Abhandlung ist bestimmt, die erwähnten neuen Begriffe für das dreiaxige Ellipsoid gehörig festzustellen, und die zwischen den durch dieselben bezeichneten Grössen Statt findenden Beziehungen im Allgemeinen zu entwickeln.

§. 2.

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen über die Normalen des dreiaxigen Ellipsoids, dessen Gleichung, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die veränderlichen oder laufenden Coordinaten bezeichnen,

$$1) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{z}}{c}\right)^2=1$$

sein mag.

Bezeichnet (xyz) einen beliebigen, aber bestimmten Punkt dieses Ellipsoids, so dass also auch

$$2) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

ist, so sind bekanntlich nach den Lehren der höheren Geometrie die Gleichungen der diesem Punkte entsprechenden Normale des Ellipsoids:

$$3) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{z}{c^2}}.$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die beiden von dem Punkte (xyz) ausgehenden Theile dieser Normale mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einschliessen, im Allgemeinen durch α, β, γ; so ist bekanntlich, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet,

$$\cos\alpha=G\frac{x}{a^2},\quad \cos\beta=G\frac{y}{b^2},\quad \cos\gamma=G\frac{z}{c^2};$$

folglich:

$$G^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}=1,$$

also:

$$G=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

und daher nach den obigen Formeln:

$$4)\quad\ldots\quad\begin{cases}\cos\alpha=\pm\dfrac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\[2ex]\cos\beta=\pm\dfrac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\[2ex]\cos\gamma=\pm\dfrac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};\end{cases}$$

wo es sich nun hauptsächlich um eine Bestimmung handelt, wie in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen sind.

Offenbar entsprechen die in den vorstehenden Formeln vorkommenden doppelten Zeichen, oder die von denselben gelieferten doppelten Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, den beiden Theilen der Normale, welche von dem Punkte (xyz) aus nach dem äusseren und dem inneren Raume des Ellipsoids hin gehen. Bezeichnen wir überhaupt in dem Theile der Normale, welchem die Winkel α, β, γ entsprechen, einen beliebigen Punkt durch (XYZ), und dessen Entfernung von dem Punkte (xyz) durch E, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$X=x+E\cos\alpha,$$
$$Y=y+E\cos\beta,$$
$$Z=z+E\cos\gamma;$$

also:

$$\frac{X}{a}=\frac{x}{a}+\frac{E}{a}\cos\alpha,$$
$$\frac{Y}{b}=\frac{y}{b}+\frac{E}{b}\cos\beta,$$
$$\frac{Z}{c}=\frac{z}{c}+\frac{E}{c}\cos\gamma;$$

und daher:

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2=1+2E\left(\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma\right)$$
$$+E^2\left\{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\},$$

folglich, weil nach 4):

$$\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma=\pm\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$

ist:

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2=1\pm2E\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$
$$+E^2\left\{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}.$$

Liegt der Punkt (XYZ) in dem von dem Punkte (xyz) aus nach dem inneren Raume des Ellipsoids hin gehenden Theile der Normale, so ist es immer verstattet, diesen Punkt innerhalb des Ellipsoids anzunehmen, und unter dieser Voraussetzung ist nach einem bekannten, grösserer Deutlichkeit wegen in der Anmerkung zu diesem Paragraphen besonders bewiesenen Satze

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2>1 \text{ oder } \left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2<1,$$

jenachdem der Punkt (XYZ) in dem von dem Punkte (xyz) aus nach dem äusseren oder inneren Raume des Ellipsoids hin gehenden Theile der Normale liegt. Also entspricht in der obigen Gleichung offenbar der grössere und kleinere der beiden in der Formel

$$1\pm2E\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$
$$+E^2\left\{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}$$

enthaltenen Werthe dem von dem Punkte (xyz) aus nach dem äusseren und inneren Raume des Ellipsoids hin gehenden Theile der Normale, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass man in den obigen Formeln für den von dem Punkte (xyz) aus nach dem äusseren Raume des Ellipsoids hin gehenden Theil der Normale die oberen, für den von dem Punkte (xyz) aus nach dem inneren

Raume des Ellipsoids hin gehenden Theil der Normale die unteren Zeichen nehmen muss. Beziehen sich also, wie von jetzt an immer vorausgesetzt werden soll, die Winkel α, β, γ stets auf den von dem Punkte (xyz) aus nach dem äusseren Raume des Ellipsoids hin gehenden Theil der Normale, so müssen wir nach 4):

$$5) \quad \ldots \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}} \end{aligned} \right.$$

setzen.

Aus diesen Formeln ergiebt sich:

$$\frac{x}{a} = a\cos\alpha\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$\frac{y}{b} = b\cos\beta\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$\frac{z}{c} = c\cos\gamma\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2};$$

folglich, wenn man quadrirt und addirt, nach 2):

$$(a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2)\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\} = 1,$$

also:

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2}},$$

daher nach 5):

$$6) \ldots \begin{cases} x = \dfrac{a^2 \cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos\alpha^2 + b^2\cos\beta^2 + c^2\cos\gamma^2}}, \\[2ex] y = \dfrac{b^2 \cos\beta}{\sqrt{a^2\cos\alpha^2 + b^2\cos\beta^2 + c^2\cos\gamma^2}}, \\[2ex] z = \dfrac{c^2 \cos\gamma}{\sqrt{a^2\cos\alpha^2 + b^2\cos\beta^2 + c^2\cos\gamma^2}}; \end{cases}$$

oder, wenn man bloss die Verhältnisse $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ in Betracht zieht:

$$7) \ldots \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{a \cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos\alpha^2 + b^2\cos\beta^2 + c^2\cos\gamma^2}}, \\[2ex] \dfrac{y}{b} = \dfrac{b \cos\beta}{\sqrt{a^2\cos\alpha^2 + b^2\cos\beta^2 + c^2\cos\gamma^2}}, \\[2ex] \dfrac{z}{c} = \dfrac{c \cos\gamma}{\sqrt{a^2\cos\alpha^2 + b^2\cos\beta^2 + c^2\cos\gamma^2}}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln sich die Coordinaten x, y, z oder die Verhältnisse $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ berechnen lassen, wenn die Winkel α, β, γ gegeben sind, so dass also die Lage des Punktes (xyz) auf dem Ellipsoid vollkommen durch die 180° nicht übersteigenden Winkel bestimmt wird, welche der von dem Punkte (xyz) nach dem äusseren Raume des Ellipsoids hin gehende Theil der Normale in diesem Punkte mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einschliesst.

Anmerkung.

Der oben angewandte Satz, der nicht immer mit gehöriger Strenge bewiesen wird, lässt sich auf folgende Art beweisen.

Sei wie oben

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{z}}{c}\right)^2 = 1$$

die Gleichung des dreiaxigen Ellipsoids, jetzt aber (XYZ) ein beliebiger Punkt im Raume und R dessen Entfernung von dem Anfange der Coordinaten. Bezeichnen nun α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Anfange der Coordinaten aus nach dem Punkte (XYZ) gezogene Gerade mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einschliesst, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$X = R\cos\alpha,\quad Y = R\cos\beta,\quad Z = R\cos\gamma.$$

Ist jetzt (xyz) der Durchschnittspunkt der in Rede stehenden Geraden oder deren Verlängerung über den Punkt (XYZ) hinaus mit der Fläche des Ellipsoids und r die Entfernung dieses Durchschnittspunkts von dem Anfange der Coordinaten, so ist eben so:

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\cos\beta,\quad z = r\cos\gamma.$$

Also ist:

$$\frac{X}{x} = \frac{R}{r},\quad \frac{Y}{y} = \frac{R}{r},\quad \frac{Z}{z} = \frac{R}{r}$$

und folglich

$$\frac{X}{a} = \frac{R}{r}\cdot\frac{x}{a},\quad \frac{Y}{b} = \frac{R}{r}\cdot\frac{y}{b},\quad \frac{Z}{c} = \frac{R}{r}\cdot\frac{z}{c};$$

woraus

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{Z}{c}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right\},$$

also, weil

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

ist,

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{Z}{c}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

folgt. Weil nun der Punkt (XYZ) offenbar

innerhalb, in der Fläche, ausserhalb

des Ellipsoids liegt, jenachdem

$$R < r,\quad R = r,\quad R > r$$

ist; so liegt nach dem Vorhergehenden der Punkt (XYZ) offenbar

innerhalb, in der Fläche, ausserhalb

des Ellipsoids, jenachdem

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{Z}{c}\right)^2 < 1,\quad \left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{Z}{c}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{Z}{c}\right)^2 > 1$$

ist, welcher Satz bewiesen werden sollte.

§. 3.

Ein beliebiger, aber bestimmter Punkt auf unserem Ellipsoid sei A, und x. y, z seien die Coordinaten desselben, so dass also

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

ist. Ziehen wir nun von dem Anfange der Coordinaten nach der Projection des Punktes A auf der Ebene der xy eine Gerade, so soll der von dieser Geraden mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin, also durch den rechten Winkel (xy) hindurch, von 0 bis 360° zählen, die Länge des Punktes A genannt und im Folgenden durch L bezeichnet werden. Denken wir uns ferner in dem Punkte A die Normale des Ellipsoids gezogen, so soll der 90° nicht übersteigende Neigungswinkel dieser Normale gegen die Ebene der xy, indem wir diesen Neigungswinkel als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Punkt A auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy liegt, die Breite des Punktes A genannt, und im Folgenden durch B bezeichnet werden.

Wenn wir hier die Länge und Breite auf die Ebene der xy bezogen haben, so liegt darin freilich eine gewisse Willkührlichkeit, indem man natürlich eben so gut jede andere der drei Coordinatenebenen hätte zu Grunde legen können. In besonderen Fällen wird man sich immer darüber einigen müssen, welche der drei Coordinatenebenen am zweckmässigsten als Ebene der xy, auf welche die Länge und Breite nach den obigen Begriffen dann zu beziehen sind, anzunehmen ist, worüber das Weitere jetzt nicht hierher gehört, indem wir uns in dieser Beziehung mit der Bemerkung begnügen, dass man bei'm Rotations-Ellipsoid bekanntlich immer die auf der Drehungsaxe im Mittelpunkte senkrecht stehende Ebene, nämlich die Ebene des sogenannten Aequators, als Ebene der xy annimmt, und auf diese Ebene die Länge und Breite, wie wir dieselben oben im Allgemeinen definirt haben, bezieht.

§. 4.

Zunächst wollen wir jetzt die Coordinaten x, y, z des Punktes A allgemein durch seine Länge L und seine Breite B auszudrücken suchen.

Zu dem Ende bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte A ausgehende, ausserhalb des Ellipsoids liegende Theil der Normale in diesem Punkte mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einschliesst, durch α, β, γ; so ist nach 5) bekanntlich:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

Offenbar ist in völliger Allgemeinheit $B=90^0-\gamma$, also $\sin B=\cos\gamma$, und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$8)\ \ldots\ \sin B=\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

woraus sich, weil unter den gemachten Voraussetzungen $\cos B$ stets positiv ist,

$$9)\ \ldots\ \cos B=\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

also:

$$10)\ \ldots\ \operatorname{tang} B=\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}$$

ergiebt.

Ferner ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$11)\ \ldots\ x=\cos L.\sqrt{x^2+y^2},\quad y=\sin L.\sqrt{x^2+y^2};$$

also:

$$12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = x \operatorname{tang} L,$$

und folglich

$$13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{y}{b} = \frac{x}{b} \operatorname{tang} L.$$

Aus der Gleichung 10) folgt:

$$\frac{z}{c} = c\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2} \,.\operatorname{tang} B,$$

also nach 12):

$$14) \quad \ldots \frac{z}{c} = c\sqrt{x^2\left\{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tang} L}{b^2}\right)^2\right\}} \,.\operatorname{tang} B,$$

oder, weil nach 11) die Grössen x und $\cos L$ immer gleiche Vorzeichen haben:

$$15) \quad \ldots z = \frac{c^2 x}{\cos L}\sqrt{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2} \,.\operatorname{tang} B.$$

Weil nun bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

ist, so erhält man nach 13) und 14) die Gleichung:

$$x^2\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tang} L}{b}\right)^2 + c^2\left[\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tang} L}{b^2}\right)^2\right]\operatorname{tang} B^2\right\} = 1,$$

oder

$$x^2\left\{\begin{array}{c}\left[\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right]\cos B^2 \\ + c^2\left[\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right]\sin B^2\end{array}\right\} = \cos L^2 \cos B^2,$$

folglich, weil x und $\cos L$ gleiche Vorzeichen haben und $\cos B$ stets positiv ist:

$$x\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2 + c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}$$
$$= \cos L \cos B.$$

Nimmt man hierzu die Formeln 12) und 15), so erhält man die folgenden merkwürdigen Ausdrücke zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z durch die Länge und Breite L und B:

16)

$$x=\frac{\cos L\cos B}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2+c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}},$$

$$y=\frac{\sin L\cos B}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2+c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}},$$

$$z=\frac{c^2\sqrt{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2}\,.\sin B}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2+c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}}.$$

Setzt man in diesen Formeln $a=b$, so erhält man für das Rotations-Ellipsoid die folgenden bekannten Formeln:

$$17)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{a\cos L\cos B}{\sqrt{\cos B^2+\frac{c^2}{a^2}\sin B^2}}, \\ y=\dfrac{a\sin L\cos B}{\sqrt{\cos B^2+\frac{c^2}{a^2}\sin B^2}}, \\ z=\dfrac{a\frac{c^2}{a^2}\sin B}{\sqrt{\cos B^2+\frac{c^2}{a^2}\sin B^2}}; \end{array}\right.$$

oder, wenn wir in diesem Falle unter der Voraussetzung, dass $c<a$ ist,

$$18)\ \ldots\ldots\ e^2=1-\frac{c^2}{a^2}$$

setzen:

$$18^*)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{a\cos L\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin B^2}}, \\ y=\dfrac{a\sin L\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin B^2}}, \\ z=\dfrac{a(1-e^2)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin B^2}}. \end{array}\right.$$

§. 5.

Wegen der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

können wir offenbar

$$19) \ldots x=a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \quad y=b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \quad z=c\sin\mathfrak{B}$$

setzen, wenn wir die Winkel $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ nur den folgenden Bedingungen unterwerfen.

Der Winkel $\mathfrak{B}$ wird absolut nicht grösser als 90^0, aber positiv oder negativ genommen, jenachdem z positiv oder negativ ist, also der Punkt A auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ liegt, und hat folglich mit B immer gleiches Vorzeichen, wobei es sich von selbst versteht, dass $\cos\mathfrak{B}$, eben so wie $\cos B$, stets positiv ist. Der Winkel $\mathfrak{L}$ wird von 0 bis 360^0 gezählt, und zwischen 0 und 90^0, 90^0 und 180^0, 180^0 und 270^0, 270^0 und 360^0 genommen, jenachdem x positiv und y positiv, x negativ und y positiv, x negativ und y negativ, x positiv und y negativ ist, so dass also L und $\mathfrak{L}$ immer gleichzeitig zwischen 0 und 90^0, 90^0 und 180^0, 180^0 und 270^0, 270^0 und 360^0 liegen.

Unter diesen Voraussetzungen werden $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$ respective die reducirte Länge und die reducirte Breite des Punktes A genannt, und sind im Allgemeinen als zwei Hülfswinkel zu betrachten, welche bei der Vereinfachung der Formeln und der dadurch bewirkten Vereinfachung der numerischen Rechnungen in vielen Fällen die vortrefflichsten Dienste leisten.

§. 6.

Zuerst wollen wir nun die Grössen L, B und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ mit einander vergleichen.

Nach 16) und 19) hat man die folgenden Ausdrücke

20)

$$\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} = \frac{\frac{\cos L}{a}\cos B}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2+c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}},$$

$$\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} = \frac{\frac{\sin L}{b}\cos B}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2+c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}},$$

$$\sin\mathfrak{B} = \frac{c\sqrt{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2}\,.\sin B}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2+c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt durch Division:

21) . . . $\tang\mathfrak{L}=\frac{a}{b}\tang L,\quad \tang L=\frac{b}{a}\tang\mathfrak{L}$

oder

22) . . . . . . $a\tang L = b\tang\mathfrak{L}.$

Für das Rotations-Ellipsoid, also für $a=b$, ist folglich $\mathfrak{L}=L$, und in diesem Falle sind daher Länge und reducirte Länge einander gleich.

Werden die beiden ersten Gleichungen in 20) quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man, weil $\cos B$ und $\cos\mathfrak{B}$ beide stets positiv sind, die Gleichung:

23) . . . . $\cos\mathfrak{B}$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2}\,.\cos B}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2+c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}},$$

folglich, wenn man diese Gleichung mit der dritten der Gleichungen 20) verbindet:

$$24) \;.\;.\; \operatorname{tang}\mathfrak{B} = c\sqrt{\frac{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin L}{b}\right)^2}} \cdot \operatorname{tang} B$$

oder:

$$25) \;.\;.\; \operatorname{tang}\mathfrak{B} = c\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tang} L}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tang} L}{b}\right)^2}} \cdot \operatorname{tang} B.$$

Nach 21) ist aber:

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tang} L}{b^2}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{L}}{b}\right)^2\right\} = \frac{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2}{a^2\cos\mathfrak{L}^2},$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tang} L}{b}\right)^2 = \frac{1}{a^2}(1 + \operatorname{tang}\mathfrak{L}^2) = \frac{1}{a^2\cos\mathfrak{L}^2};$$

was nach 25) zu der merkwürdigen Formel

$$26) \;.\;.\; \operatorname{tang}\mathfrak{B} = c\sqrt{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2} \cdot \operatorname{tang} B$$

führt.

Für das Rotations-Ellipsoid, wo $a = b$ ist, wird diese Formel

$$27) \;.\;.\;.\; \operatorname{tang}\mathfrak{B} = \frac{c}{a}\operatorname{tang} B \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang} B = \frac{a}{c}\operatorname{tang}\mathfrak{B}.$$

Auf dem allgemeinen dreiaxigen Ellipsoid hat man also nach dem Vorhergehenden zur Berechnung der reducirten Länge und Breite aus Länge und Breite die Formeln:

28)

$$\operatorname{tang}\mathfrak{L} = \frac{a}{b}\operatorname{tang} L, \quad \operatorname{tang}\mathfrak{B} = c\sqrt{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2} \cdot \operatorname{tang} B;$$

und zur Berechnung der Länge und Breite aus der reducirten Länge und Breite die Formeln:

$$29) \quad \operatorname{tang} L = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\mathfrak{L}, \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}}{c\sqrt{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2}}.$$

§. 7.

Aus den Gleichungen 16) ergiebt sich leicht:

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\cos L}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b}\right)^2\right\}\cos B^2+c^2\left\{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2\right\}\sin B^2}},$$

also nach 5) und 16):

30)

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\cos L}{a^2}\cos B}{\sqrt{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2}},\quad \cos\beta=\frac{\frac{\sin L}{b^2}\cos B}{\sqrt{\left(\frac{\cos L}{a^2}\right)^2+\left(\frac{\sin L}{b^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\sin B;$$

mittelst welcher Formeln α, β, γ aus L, B gefunden werden.

Nach 19) ist aber auch:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2=\left\{\left(\frac{\cos \mathfrak{L}}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin \mathfrak{L}}{b}\right)^2\right\}\cos \mathfrak{B}^2+\left(\frac{\sin \mathfrak{B}}{c}\right)^2,$$

und folglich, weil nach 26)

$$c^2\left\{\left(\frac{\cos \mathfrak{L}}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin \mathfrak{L}}{b}\right)^2\right\}=\left(\frac{\tang \mathfrak{B}}{\tang B}\right)^2$$

ist:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2=\left(\frac{\cos \mathfrak{B}}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{\tang \mathfrak{B}}{\tang B}\right)^2+\left(\frac{\sin \mathfrak{B}}{c}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sin \mathfrak{B}}{c}\right)^2(1+\cot B^2)=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2,$$

also, weil $\sin B$ und $\sin \mathfrak{B}$ immer gleiche Vorzeichen haben:

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}.$$

Folglich ist nach 5) und 19):

$$\cos\alpha=\frac{\cos \mathfrak{L}\cos \mathfrak{B}}{a}\cdot\frac{c\sin B}{\sin \mathfrak{B}},\quad \cos\beta=\frac{\sin \mathfrak{L}\cos \mathfrak{B}}{b}\cdot\frac{c\sin B}{\sin \mathfrak{B}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\sin \mathfrak{B}}{c}\cdot\frac{c\sin B}{\sin \mathfrak{B}};$$

woraus sich unmittelbar die folgenden eleganten und merkwürdigen Formeln ergeben:

31)

$$\cos\alpha=\frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}\sin B,\quad \cos\beta=\frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}\sin B,\quad \cos\gamma=\sin B.$$

Leicht erhält man hieraus:

$$a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2=c^2\left(\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\right)^2,$$

und folglich, weil $\sin B$ und $\sin\mathfrak{B}$ stets gleiche Vorzeichen haben:

$$32)\quad . \; . \quad \sqrt{a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2}=c\,\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}.$$

Aus den Formeln 31) erhält man auch sogleich durch Division:

$$33)\; . \; . \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{b}\operatorname{tang}.\mathfrak{L}, \\ \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\dfrac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B},\quad \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\dfrac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}; \end{array}\right.$$

und aus den Winkeln α, β, γ werden also die Coordinaten x, y, z leicht mittelst der folgenden Formeln berechnet:

$$34)\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang}\mathfrak{L}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha},\quad \operatorname{tang}\mathfrak{B}=\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{\cos\mathfrak{L}\cos\gamma}{\cos\alpha}=\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{\sin\mathfrak{L}\cos\gamma}{\cos\beta}; \\ x=a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\ y=b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\ z=c\sin\mathfrak{B}. \end{array}\right.$$

Weil nach den Formeln 30) stets $\cos\alpha$ und $\cos L$, $\cos\beta$ und $\sin L$, also nach den in §. 5. gegebenen Bestimmungen auch $\cos\alpha$ und $\cos\mathfrak{L}$, $\cos\beta$ und $\sin\mathfrak{L}$ gleiche Vorzeichen haben, so muss mittelst der ersten der vorstehenden Formeln $\mathfrak{L}$ so bestimmt werden, dass $\cos\mathfrak{L}$ mit $\cos\alpha$, $\sin\mathfrak{L}$ mit $\cos\beta$ gleiches Vorzeichen hat, woraus sich die folgenden Regeln zur Bestimmung von $\mathfrak{L}$ mittelst der in Rede stehenden Formel ergeben:

Wenn

$\cos\alpha$	$\cos\beta$
positiv	positiv
negativ	positiv
negativ	negativ
positiv	negativ

ist, so ist beziehungsweise:

$$0 < \mathfrak{L} < 90^0,$$
$$90^0 < \mathfrak{L} < 180^0,$$
$$180^0 < \mathfrak{L} < 270^0,$$
$$270^0 < \mathfrak{L} < 360^0.$$

§. 8.

Zwei beliebige Normalen seien durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 bestimmt, und ω sei der von den beiden ausserhalb des Ellipsoids liegenden Theilen dieser Normalen, denen die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 entsprechen, eingeschlossene, 180^0 nicht übersteigende Winkel; so ist bekanntlich:

$$\cos\omega = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1.$$

Nach 31) ist aber, in leicht durch sich selbst verständlicher Bezeichnung:

$$\cos\alpha_0 = \frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}_0\cot\mathfrak{B}_0\sin B_0,$$

$$\cos\beta_0 = \frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}_0\cot\mathfrak{B}_0\sin B_0,$$

$$\cos\gamma_0 = \sin B_0$$

und

$$\cos\alpha_1 = \frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}_1\cot\mathfrak{B}_1\sin B_1,$$

$$\cos\beta_1 = \frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}_1\cot\mathfrak{B}_1\sin B_1,$$

$$\cot\gamma_1 = \sin B_1;$$

also, wie man leicht findet:

35)

$$\cos\omega = \sin B_0\sin B_1\{1 + c^2\cot\mathfrak{B}_0\cot\mathfrak{B}_1\left(\frac{\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1}{a^2} + \frac{\sin\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1}{b^2}\right)\}$$

oder:

36)

$$\cos\omega = \sin B_0\sin B_1\{1 + \frac{c^2}{a^2}\cot\mathfrak{B}_0\cot\mathfrak{B}_1(\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1 + \frac{a^2}{b^2}\sin\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1)\}$$

$$= \sin B_0\sin B_1\{1 + \frac{c^2}{b^2}\cot\mathfrak{B}_0\cot\mathfrak{B}_1(\sin\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1 + \frac{b^2}{a^2}\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1)\}.$$

Für das Rotations-Ellipsoid ist also:

$$37)\quad \cos\omega = \sin B_0 \sin B_1 \{1 + \frac{c^2}{a^2}\cos(\mathfrak{L}_0 - \mathfrak{L}_1)\cot\mathfrak{B}_0\cot\mathfrak{B}_1\}$$

oder, weil in diesem Falle $\mathfrak{L}_0 = L_0$ und $\mathfrak{L}_1 = L_1$ ist:

$$38)\quad \cos\omega = \sin B_0 \sin B_1 \{1 + \frac{c^2}{a^2}\cos(L_0 - L_1)\cot\mathfrak{B}_0\cot\mathfrak{B}_1\}.$$

Für die Kugel ist folglich:

$$39)\quad \cos\omega = \sin B_0 \sin B_1 + \cos(L_0 - L_1)\cos B_0 \cos B_1,$$

wie schon aus der sphärischen Trigonometrie leicht zu schliessen ist.

§. 9.

In der, dem durch die Coordinaten

$$x = a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad y = b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad z = c\sin\mathfrak{B}$$

bestimmten Punkte des Ellipsoids entsprechenden Normale desselben wollen wir jetzt einen beliebigen Punkt (XYZ) annehmen, und dessen Entfernung von der Oberfläche des Ellipsoids *), indem wir dieselbe als positiv oder negativ betrachten, jenachdem der Punkt (XYZ) von dem Punkte (xyz) aus nach dem äusseren oder inneren Raume des Ellipsoids hin liegt, durch h bezeichnen; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$40)\quad X = x + h\cos\alpha,\quad Y = y + h\cos\beta,\quad Z = z + h\cos\gamma;$$

folglich:

$$X = a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} + h\cos\alpha,$$
$$Y = b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} + h\cos\beta,$$
$$Z = c\sin\mathfrak{B} + h\cos\gamma;$$

und daher nach 31):

$$41)\ \ldots\ \begin{cases} X = (a\sin\mathfrak{B} + \frac{hc}{a}\sin B)\cos\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}, \\ Y = (b\sin\mathfrak{B} + \frac{hc}{b}\sin B)\sin\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}, \\ Z = c\sin\mathfrak{B} + \frac{hc}{c}\sin\mathfrak{B}. \end{cases}$$

---

*) Höhe des Punktes (XYZ) über der Meeresfläche.

Für das Rotations-Ellipsoid ist bekanntlich:

$$a=b,\quad \mathfrak{L}=L,\quad \cot\mathfrak{B}=\frac{a}{c}\cot B=\frac{b}{c}\cot B;$$

also:

42)

$$X=(a\cos\mathfrak{B}+h\cos B)\cos L,\quad Y=(a\cos\mathfrak{B}+h\cos B)\sin L,$$

$$Z=c\sin\mathfrak{B}+h\sin B.$$

Für die Kugel ist $c=a$ und $\mathfrak{B}=B$, also:

43)

$$X=(a+h)\cos L\cos B,\quad Y=(a+h)\sin L\cos B,\quad Z=(a+h)\sin B.$$

Die Gleichung des Horizonts des Punktes (XYZ) hat im Allgemeinen die Form

$$A(\mathfrak{x}-X)+B(\mathfrak{y}-Y)+C(\mathfrak{z}-Z)=0,$$

und die Gleichungen der Normale in dem Punkte (xyz) sind:

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{z}{c^2}};$$

also ist, weil diese Normale auf dem Horizont senkrecht steht, nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung des Horizonts:

$$44)\;\ldots\ldots\;\frac{x}{a^2}(\mathfrak{x}-X)+\frac{y}{b^2}(\mathfrak{y}-Y)+\frac{z}{c^2}(\mathfrak{z}-Z)=0;$$

folglich nach dem Vorhergehenden offenbar:

45)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}}{a}\{\mathfrak{x}-(a\sin\mathfrak{B}+\frac{hc}{a}\sin B)\cos\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}\}\\ +\frac{\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}}{b}\{\mathfrak{y}-(b\sin\mathfrak{B}+\frac{hc}{b}\sin B)\sin\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}\}\\ +\frac{\sin\mathfrak{B}}{c}\{\mathfrak{z}-(c\sin\mathfrak{B}+\frac{hc}{c}\sin B)\}\end{array}\right\}=0$$

oder:

46)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\{\mathfrak{x}-(a\sin\mathfrak{B}+\frac{hc}{a}\sin B)\cos\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}\}\\ +\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\{\mathfrak{y}-(b\sin\mathfrak{B}+\frac{hc}{b}\sin B)\sin\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}\}\\ +\frac{\tang\mathfrak{B}}{c}\{\mathfrak{z}-(c\sin\mathfrak{B}+\frac{hc}{c}\sin B)\}.\end{array}\right\}=0.$$

Für das Rotations-Ellipsoid ist die Gleichung des Horizonts von (XYZ):

47)

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\cos L\cos\mathfrak{B}}{a}\{\mathfrak{x}-(a\cos\mathfrak{B}+h\cos B)\cos L\}\\[2mm]
+\frac{\sin L\cos\mathfrak{B}}{a}\{\mathfrak{y}-(a\cos\mathfrak{B}+h\cos B)\sin L\}\\[2mm]
+\frac{\sin\mathfrak{B}}{c}\{\mathfrak{z}-(c\sin\mathfrak{B}+h\sin B)\}
\end{array}\right\}=0,$$

also:

$$\left.\begin{array}{l}
\{\mathfrak{x}-(a\cos\mathfrak{B}+h\cos B)\cos L\}\cos L\\
+\{\mathfrak{y}-(a\cos\mathfrak{B}+h\cos B)\sin L\}\sin L\\
+\{\mathfrak{z}-(c\sin\mathfrak{B}+h\sin B)\}.\frac{a}{c}\tan\mathfrak{B}
\end{array}\right\}=0,$$

folglich nach 27):

48)

$$\left.\begin{array}{l}
\{\mathfrak{x}-(a\cos\mathfrak{B}+h\cos B)\cos L\}\cos L\\
+\{\mathfrak{y}-(a\cos\mathfrak{B}+h\cos B)\sin L\}\sin L\\
+\{\mathfrak{z}-(c\sin\mathfrak{B}+h\sin B)\}\tan B
\end{array}\right\}=0.$$

Für die Kugel wird diese Gleichung:

49)

$$\left.\begin{array}{l}
\{\mathfrak{x}-(a+h)\cos L\cos B\}\cos L\\
+\{\mathfrak{y}-(a+h)\sin L\cos B\}\sin L\\
+\{\mathfrak{z}-(a+h)\sin B\}\tan B
\end{array}\right\}=0.$$

§. 10.

Da der Punkt (XYZ) in der Normale des Punktes (xyz) liegt, so hat man nach dem vorhergehenden Paragraphen die Gleichungen:

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}}.$$

Sollen nun aus den gegebenen Coordinaten X, Y, Z die Coordinaten x, y, z gefunden werden, so setze man:

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}}=G,$$

woraus

$$50)\quad . \quad . \quad x=\frac{X}{1+\frac{G}{a^2}},\quad y=\frac{Y}{1+\frac{G}{b^2}},\quad z=\frac{Z}{1+\frac{G}{c^2}}$$

folgt, so dass es also bloss darauf ankommt, die Grösse G zu finden. Dazu hat man, weil

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

ist, die Gleichung:

$$\frac{\left(\frac{X}{a}\right)^2}{(1+\frac{G}{a^2})^2}+\frac{\left(\frac{Y}{b}\right)^2}{(1+\frac{G}{b^2})^2}+\frac{\left(\frac{Z}{c}\right)^2}{(1+\frac{G}{c^2})^2}=1,$$

also die Gleichung

51)

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2(1+\frac{G}{b^2})^2(1+\frac{G}{c^2})^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2(1+\frac{G}{c^2})^2(1+\frac{G}{a^2})^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2(1+\frac{G}{a^2})^2(1+\frac{G}{b^2})^2$$
$$=(1+\frac{G}{a^2})^2(1+\frac{G}{b^2})^2(1+\frac{G}{c^2})^2,$$

welche vom sechsten Grade ist.

Für das Rotations-Ellipsoid, wo $a=b$ ist, wird diese Gleichung:

52)

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2(1+\frac{G}{c^2})^2+\left(\frac{Y}{a}\right)^2(1+\frac{G}{c^2})^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2(1+\frac{G}{a^2})^2=(1+\frac{G}{a^2})^2(1+\frac{G}{c^2})^2,$$

welche Gleichung vom vierten Grade ist.

Für die Kugel wird vorstehende Gleichung:

$$53)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{X^2+Y^2+Z^2}{a^2}=(1+\frac{G}{a^2})^2,$$

woraus sich

$$54)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad G=a(-a\pm\sqrt{X^2+Y^2+Z^2})$$

ergiebt.

Wenn die Höhe h im Verhältniss zu den Dimensionen des Ellipsoids sehr klein ist, so sind offenbar X, Y, Z sehr wenig verschieden von respective x, y, z, und in Folge der Gleichungen 50) müssen also $\frac{G}{a^2}$, $\frac{G}{b^2}$, $\frac{G}{c^2}$ der Null sehr nahe kommende Grössen sein. Schreibt man nun die obige Gleichung, aus welcher G bestimmt werden muss, unter der Form

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 (1+\frac{G}{a^2})^{-2}+\left(\frac{Y}{b}\right)^2 (1+\frac{G}{b^2})^{-2}+\left(\frac{Z}{c}\right)^2 (1+\frac{G}{c^2})^{-2}=1,$$

entwickelt die Potenzen mit dem Exponenten -2, und vernachlässigt alle Glieder, welche von der zweiten Ordnung und von höheren Ordnungen sind; so erhält man die Gleichung:

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 (1-2\frac{G}{a^2})+\left(\frac{Y}{b}\right)^2 (1-2\frac{G}{b^2})+\left(\frac{Z}{c}\right)^2 (1-2\frac{G}{c^2})=1,$$

woraus sich zur Bestimmung von G die Näherungsformel:

$$55) \quad \ldots \quad G=\frac{\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2-1}{2\left\{\left(\frac{X}{a^2}\right)^2+\left(\frac{Y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{Z}{c^2}\right)^2\right\}}$$

ergiebt. Diesen Näherungswerth von G nach bekannten Methoden weiter zu corrigiren, wird selten Schwierigkeiten darbieten.

IX.

Gnomonik für jede beliebige Ebene im Raume, mit Rücksicht auf die Anwendung der neueren Geometrie zur Ausführung gnomonischer Constructionen.

Von

dem Herausgeber.

Der Zweck dieser Abhandlung ist, eine Methode zu entwickeln, nach welcher für jede beliebig im Raume gegebene Ebene eine Sonnenuhr in allen ihren Theilen construirt werden kann, ohne die Lage dieser Ebene gegen die bekannten astronomischen Kreise etwa mittelst des Niveaus, der Magnetnadel, deren Declination als bekannt vorausgesetzt wird, und die Lage des Stifts oder Stils mittelst der aus einem Verzeichnisse der geographischen Breiten oder einer Karte zu entnehmenden Polhöhe des Beobachtungsorts vorher bestimmen zu müssen. Vielmehr soll die Methode der Verzeichnung alle diese Elemente aus den zu Grunde gelegten Beobachtungs-Daten selbst liefern, was wohl auch von jeder wahrhaft wissenschaftlichen Methode verlangt werden muss, indem die vorher genannten, grösstentheils ganz mechanischen Hülfsmittel als sehr unwissenschaftliche bezeichnet werden müssen, deren Anwendung man allenfalls einem Laien, der zu seinem Vergnügen sich eine Sonnenuhr construirt, aber nicht dem wissenschaftlichen Mathematiker und Physiker verzeihen kann.

Eine solche Methode, wie ich sie im Folgenden entwickeln werde, hat zwar schon Sarrus angegeben*), und eine wesentlich verschiedene möchte sich wohl auch schwerlich angeben lassen, wie Jeder leicht einsehen wird, der mit den hier zur Anwendung kommenden astronomischen Lehren gehörig bekannt ist. Sarrus

---

*) M. s. rücksichtlich des Wesentlichen meine Elemente der analytischen Geometrie. Thl. II. Leipzig. 1839. S. 289.

hat aber diese Methode nur auf eine geometrische Construction zurückgeführt, die zwar sehr sinnreich und bemerkenswerth ist, bei der praktischen Ausführung aber schwerlich die erforderliche Genauigkeit gewähren dürfte. Ich werde daher, von denselben Beobachtungs-Daten wie Sarrus ausgehend, in dieser Abhandlung Formeln entwickeln, mittelst welcher sich alle zur Construction der Uhr erforderlichen Stücke aus den durch die Beobachtung gegebenen Elementen leicht und mit aller erforderlichen Schärfe berechnen und dann auch bequem zur Entwerfung der Uhr durch Construction benutzen lassen. Zugleich werde ich auch den engen Zusammenhang der entwickelten analytischen Formeln mit den Lehren der sogenannten neueren Geometrie in einer von dem vorher genannten französischen Mathematiker abweichenden Weise nachweisen, so weit es, ohne mich von der analytischen Entwickelung, die, wie gesagt, hier mein eigentlicher Zweck ist, zu sehr zu entfernen, geschehen kann.

I.

Durch einen beliebigen Punkt O der im Raume gegebenen Uhrebene denken wir uns einen auf dieser Ebene senkrecht stehenden Stift OS errichtet, oder bringen an der Stelle des Punktes S im Raume ein in einer Metallplatte befindliches kleines Loch an, durch welches die Sonnenstrahlen hindurch fallen können, wo dann O die Projection dieses Lochs auf der Uhrebene und OS dessen Entfernung von der Uhrebene ist.

An einem beliebigen Tage*) beobachte man die Endpunkte dreier Schattenlängen des Stifts oder drei durch das Loch fallende Lichtpunkte auf der Uhrebene, markire dieselben auf irgend eine Weise und bezeichne sie, oder die Endpunkte der Schattenlängen des Stifts, durch A, A', A''. In diesen drei Punkten hat man, wie sich nachher zeigen wird, alle zur vollständigen Construction der Uhr erforderlichen, durch Beobachtung zu bestimmenden Elemente, wobei die Lage der Uhrebene im Raume eine durchaus willkührliche ist.

Die Uhrebene nehme man als die Ebene der xy eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an, dessen Anfang der Punkt O ist. Die positiven Theile der Axen der x und y kann

*) Auf die Veränderlichkeit der Declination der Sonne an einem und demselben Tage nehmen wir im Folgenden überall keine Rücksicht. Zur Zeit der Solstitien verändert sich übrigens bekanntlich die Declination der Sonne am wenigsten.

man in der Uhrebene willkührlich annehmen, der positive Theil der Axe der z sei aber das Perpendikel OS. Die Coordinaten der Punkte

$$A,\ A',\ A''$$

in dem angenommenen Systeme seien respective

$$a,\ b,\ c;\quad a',\ b',\ c';\quad a'',\ b'',\ c'';$$

wo übrigens die dritten Coordinaten natürlich sämmtlich verschwinden.

Den Punkt S betrachten wir als den Mittelpunkt der Sphäre, und bezeichnen die drei, 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der eine der beiden Theile der durch diesen Punkt gehenden Weltaxe mit den positiven Theilen der drei Axen eines durch S als Anfang gelegten, dem Systeme der xyz parallelen Systems der $x_1y_1z_1$ einschliesst, durch $\theta,\ \omega,\ \overline{\omega}$.

Ferner sollen die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die zu den Zeiten der drei Beobachtungen von S nach der Sonne gezogenen Gesichtslinien mit den positiven Theilen der Axen der $x_1,\ y_1,\ z_1$ einschliessen, durch

$$\varkappa,\ \lambda,\ \mu;\quad \varkappa',\ \lambda',\ \mu';\quad \varkappa'',\ \lambda'',\ \mu''$$

bezeichnet werden.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Sonne zu den Zeiten der drei Beobachtungen in dem Systeme der $x_1y_1z_1$ durch

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_1',\ y_1',\ z_1';\quad x_1'',\ y_1'',\ z_1''$$

und die entsprechenden Entfernungen der Sonne von dem Punkte S durch

$$R,\ R',\ R'';$$

so ist:

$$1)\quad \begin{cases} x_1 = R\cos\varkappa, & y_1 = R\cos\lambda, & z_1 = R\cos\mu; \\ x_1' = R'\cos\varkappa', & y_1' = R'\cos\lambda', & z_1' = R'\cos\mu'; \\ x_1'' = R''\cos\varkappa'', & y_1'' = R''\cos\lambda'', & z_1'' = R''\cos\mu''; \end{cases}$$

und sind nun die Coordinaten der Sonne in dem Systeme der xyz zu den Zeiten der drei Beobachtungen

$$x,\ y,\ z;\quad x',\ y',\ z';\quad x'',\ y'',\ z'';$$

so ist offenbar, wenn wir die Linie OS durch H bezeichnen, also die Coordinaten des Punktes S in dem in Rede stehenden Systeme $0,\ 0,\ H$ setzen:

2)

$$x = R\cos\varkappa, \quad y = R\cos\lambda, \quad z = H + R\cos\mu;$$
$$x' = R'\cos\varkappa', \quad y' = R'\cos\lambda', \quad z' = H + R'\cos\mu';$$
$$x'' = R''\cos\varkappa'', \quad y'' = R''\cos\lambda'', \quad z'' = H + R''\cos\mu''.$$

Nach den Gesetzen der täglichen Bewegung der Sphäre um die Weltaxe, wobei wir die Declination der Sonne an dem Tage der Beobachtungen als unveränderlich betrachten, und nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie haben wir offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}&\cos\varkappa\cos\theta + \cos\lambda\cos\omega + \cos\mu\cos\overline{\omega}\\ =&\cos\varkappa'\cos\theta + \cos\lambda'\cos\omega + \cos\mu'\cos\overline{\omega}\\ =&\cos\varkappa''\cos\theta + \cos\lambda''\cos\omega + \cos\mu''\cos\overline{\omega}\end{aligned}$$

oder

$$(\cos\varkappa - \cos\varkappa')\cos\theta + (\cos\lambda - \cos\lambda')\cos\omega + (\cos\mu - \cos\mu')\cos\overline{\omega} = 0,$$
$$(\cos\varkappa' - \cos\varkappa'')\cos\theta + (\cos\lambda' - \cos\lambda'')\cos\omega + (\cos\mu' - \cos\mu'')\cos\overline{\omega} = 0,$$
$$(\cos\varkappa'' - \cos\varkappa)\cos\theta + (\cos\lambda'' - \cos\lambda)\cos\omega + (\cos\mu'' - \cos\mu)\cos\overline{\omega} = 0;$$

aus denen, wenn G einen gewissen, mittelst der bekannten Gleichung

$$\cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2 = 1$$

weiter zu bestimmenden Factor bezeichnet, sogleich die folgenden Ausdrücke erhalten werden:

$$\cos\theta = G\{(\cos\lambda - \cos\lambda')(\cos\mu' - \cos\mu'') - (\cos\mu - \cos\mu')(\cos\lambda' - \cos\lambda'')\},$$
$$\cos\omega = G\{(\cos\mu - \cos\mu')(\cos\varkappa' - \cos\varkappa'') - (\cos\varkappa - \cos\varkappa')(\cos\mu' - \cos\mu'')\},$$
$$\cos\overline{\omega} = G\{(\cos\varkappa - \cos\varkappa')(\cos\lambda' - \cos\lambda'') - (\cos\lambda - \cos\lambda')(\cos\varkappa' - \cos\varkappa'')\}$$

oder:

$$3)\quad\left\{\begin{aligned}\cos\theta &= G\left\{\begin{array}{l}(\cos\lambda\cos\mu' - \cos\mu\cos\lambda')\\ + (\cos\lambda'\cos\mu'' - \cos\mu'\cos\lambda'')\\ + (\cos\lambda''\cos\mu - \cos\mu''\cos\lambda)\end{array}\right\},\\ \cos\omega &= G\left\{\begin{array}{l}(\cos\mu\cos\varkappa' - \cos\varkappa\cos\mu')\\ + (\cos\mu'\cos\varkappa'' - \cos\varkappa'\cos\mu'')\\ + (\cos\mu''\cos\varkappa - \cos\varkappa''\cos\mu)\end{array}\right\},\\ \cos\overline{\omega} &= G\left\{\begin{array}{l}(\cos\varkappa\cos\lambda' - \cos\lambda\cos\varkappa')\\ + (\cos\varkappa'\cos\lambda'' - \cos\lambda'\cos\varkappa'')\\ + (\cos\varkappa''\cos\lambda - \cos\lambda''\cos\varkappa)\end{array}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen der Sonnenstrahlen zu den Zeiten der drei Beobachtungen im Systeme der xyz sind nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn wir jetzt die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen:

$$4) \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathfrak{x}}{\cos\varkappa} &= \frac{\mathfrak{y}}{\cos\lambda} = \frac{\mathfrak{z}-H}{\cos\mu}, \\ \frac{\mathfrak{x}}{\cos\varkappa'} &= \frac{\mathfrak{y}}{\cos\lambda'} = \frac{\mathfrak{z}-H}{\cos\mu'}, \\ \frac{\mathfrak{x}}{\cos\varkappa''} &= \frac{\mathfrak{y}}{\cos\lambda''} = \frac{\mathfrak{z}-H}{\cos\mu''}; \end{aligned} \right.$$

und es ist also:

$$5) \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{\cos\varkappa} &= \frac{b}{\cos\lambda} = -\frac{H}{\cos\mu}, \\ \frac{a'}{\cos\varkappa'} &= \frac{b'}{\cos\lambda'} = -\frac{H}{\cos\mu'}, \\ \frac{a''}{\cos\varkappa''} &= \frac{b''}{\cos\lambda''} = -\frac{H}{\cos\mu''}; \end{aligned} \right.$$

woraus sich

$$6) \ldots \left\{ \begin{aligned} a &= -\frac{\cos\varkappa}{\cos\mu}H, \quad b = -\frac{\cos\lambda}{\cos\mu}H, \\ a' &= -\frac{\cos\varkappa'}{\cos\mu'}H, \quad b' = -\frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'}H, \\ a'' &= -\frac{\cos\varkappa''}{\cos\mu''}H, \quad b'' = -\frac{\cos\lambda''}{\cos\mu''}H; \end{aligned} \right.$$

folglich, weil

$$\cos\varkappa^2 + \cos\lambda^2 + \cos\mu^2 = 1, \quad \cos\varkappa'^2 + \cos\lambda'^2 + \cos\mu'^2 = 1,$$
$$\cos\varkappa''^2 + \cos\lambda''^2 + \cos\mu''^2 = 1$$

ist,

$$a^2 + b^2 = \frac{\cos\varkappa^2 + \cos\lambda^2}{\cos\mu^2}H^2 = \frac{1-\cos\mu^2}{\cos\mu^2}H^2,$$

$$a'^2 + b'^2 = \frac{\cos\varkappa'^2 + \cos\lambda'^2}{\cos\mu'^2}H^2 = \frac{1-\cos\mu'^2}{\cos\mu'^2}H^2,$$

$$a''^2 + b''^2 = \frac{\cos\varkappa''^2 + \cos\lambda''^2}{\cos\mu''^2}H^2 = \frac{1-\cos\mu''^2}{\cos\mu''^2}H^2$$

ergiebt, so dass also, wie man hieraus leicht findet,

$$\cos\mu^2 = \frac{H^2}{a^2+b^2+H^2}, \quad \cos\mu'^2 = \frac{H^2}{a'^2+b'^2+H^2},$$

$$\cos\mu''^2 = \frac{H^2}{a''^2+b''^2+H^2}$$

ist. Bezeichnen wir aber die Entfernungen der beobachteten Punkte A, A', A'' von dem Punkte S respective durch E, E', E''; so ist offenbar:

7)

$$E = \sqrt{a^2+b^2+H^2}, \quad E' = \sqrt{a'^2+b'^2+H^2}, \quad E'' = \sqrt{a''^2+b''^2+H^2};$$

also:

$$\cos\mu^2 = \frac{H^2}{E^2}, \quad \cos\mu'^2 = \frac{H^2}{E'^2}, \quad \cos\mu''^2 = \frac{H^2}{E''^2}.$$

Die Natur der hier anzustellenden Beobachtungen erfordert aber, dass zu den Zeiten der Beobachtungen die Sonne sich auf der positiven Seite der Ebene der xy befindet, so dass also μ, μ', μ'' sämmtlich spitze Winkel mit positiven Cosinus sind; also ist nach dem Vorhergehenden:

$$8) \quad \ldots \quad \cos\mu = \frac{H}{E}, \quad \cos\mu' = \frac{H}{E'}, \quad \cos\mu'' = \frac{H}{E''};$$

folglich nach 6):

$$9) \quad \ldots \quad \left\{\begin{array}{ll} \cos\varkappa = -\dfrac{a}{E}, & \cos\lambda = -\dfrac{b}{E}; \\ \cos\varkappa' = -\dfrac{a'}{E'}, & \cos\lambda' = -\dfrac{b'}{E'}; \\ \cos\varkappa'' = -\dfrac{a''}{E''}, & \cos\lambda'' = -\dfrac{b''}{E''}; \end{array}\right.$$

also nach 8) und 9):

$$\cos\varkappa\cos\lambda' - \cos\lambda\cos\varkappa' = \frac{ab'-ba'}{EE'},$$

$$\cos\varkappa'\cos\lambda'' - \cos\lambda'\cos\varkappa'' = \frac{a'b''-b'a''}{E'E''},$$

$$\cos\varkappa''\cos\lambda - \cos\lambda''\cos\varkappa = \frac{a''b-b''a}{E''E};$$

$$\cos\lambda\cos\mu' - \cos\mu\cos\lambda' = -\frac{(b-b')H}{EE'},$$

$$\cos\lambda'\cos\mu'' - \cos\mu'\cos\lambda'' = -\frac{(b'-b'')H}{E'E''},$$

$$\cos\lambda''\cos\mu - \cos\mu''\cos\lambda = -\frac{(b''-b)H}{E''E};$$

$$\cos\mu\cos\varkappa' - \cos\varkappa\cos\mu' = \frac{(a-a')H}{EE'},$$

$$\cos\mu'\cos\varkappa'' - \cos\varkappa'\cos\mu'' = \frac{(a'-a'')H}{E'E''},$$

$$\cos\mu''\cos\varkappa - \cos\varkappa''\cos\mu = \frac{(a''-a)H}{E''E};$$

folglich nach 3):

10)

$$\cos\theta = -G\frac{\{(b'-b'')E+(b''-b)E'+(b-b')E''\}H}{EE'E''},$$

$$\cos\omega = G\frac{\{(a'-a'')E+(a''-a)E'+(a-a')E''\}H}{EE'E''},$$

$$\cos\overline{\omega} = G\frac{(a'b''-b'a'')E+(a''b-b''a)E'+(ab'-ba')E''}{EE'E''}.$$

Die Gleichungen der Weltaxe, welche auch wohl der **Stil** oder **Stift** genannt wird, im Systeme der xyz sind:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\cos\theta} = \frac{\mathfrak{y}}{\cos\omega} = \frac{\mathfrak{z}-H}{\cos\overline{\omega}},$$

also nach 10):

11) $$-\frac{\mathfrak{x}}{\{(b'-b'')E+(b''-b)E'+(b-b')E''\}H}$$

$$= \frac{\mathfrak{y}}{\{(a'-a'')E+(a''-a)E'+(a-a')E''\}H}$$

$$= \frac{\mathfrak{z}-H}{(a'b''-b'a'')E+(a''b-b''a)E'+(ab'-ba')E''},$$

Der Punkt, in welchem die Weltaxe die Uhrebene schneidet, heisst der **Mittelpunkt** der Uhr und soll im Folgenden durch M bezeichnet werden. Sind nun X, Y dessen zwei erste Coordinaten im Systeme der xyz, so haben wir, da die dritte Coordi-

nate verschwindet, zur Bestimmung von X, Y nach 11) offenbar die folgenden Formeln:

12)

$$X = \frac{(b'-b'')E+(b''-b)E'+(b-b')E''}{(a'b''-b'a'')E+(a''b-b''a)E'+(ab'-ba')E''}H^2,$$

$$Y = -\frac{(a'-a'')E+(a''-a)E'+(a-a')E''}{(a'b''-b'a'')E+(a''b-b''a)E'+(ab'-ba')E''}H^2;$$

oder:

13)

$$X = -\frac{(b'E''-b''E')+(b''E-bE'')+(bE'-b'E)}{a(b'E''-b''E')+a'(b''E-bE'')+a''(bE'-b'E)}H^2,$$

$$Y = -\frac{(a'E''-a''E')+(a''E-aE'')+(aE'-a'E)}{b(a'E''-a''E')+b'(a''E-aE'')+b''(aE'-a'E)}H^2;$$

folglich, wenn wir

14)

$$p = \frac{a'E''-a''E'}{E''-E'},\quad p' = \frac{a''E-aE''}{E-E''},\quad p'' = \frac{aE'-a'E}{E'-E};$$

$$q = \frac{b'E''-b''E'}{E''-E'},\quad q' = \frac{b''E-bE''}{E-E''},\quad q'' = \frac{bE'-b'E}{E'-E}$$

setzen:

$$15)\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{q(E''-E')+q'(E-E'')+q''(E'-E)}{aq(E''-E')+a'q'(E-E'')+a''q''(E'-E)}H^2, \\ Y &= -\frac{p(E''-E')+p'(E-E'')+p''(E'-E)}{bp(E''-E')+b'p'(E-E'')+b''p''(E'-E)}H^2; \end{aligned}\right.$$

oder:

16)

$$X = -\frac{(q'-q'')E+(q''-q)E'+(q-q')E''}{(a'q'-a''q'')E+(a''q''-aq)E'+(aq-a'q')E''}H^2,$$

$$Y = -\frac{(p'-p'')E+(p''-p)E'+(p-p')E''}{(b'p'-b''p'')E+(b''p''-bp)E'+(bp-b'p')E''}H^2;$$

oder:

17)

$$X = -\frac{(q'-q'')E+(q''-q)E'+(q-q')E''}{\left(\frac{a'q'}{H}-\frac{a''q''}{H}\right)E+\left(\frac{a''q''}{H}-\frac{aq}{H}\right)E'+\left(\frac{aq}{H}-\frac{a'q'}{H}\right)E''}H,$$

$$Y = -\frac{(p'-p'')E+(p''-p)E'+(p-p')E''}{\left(\frac{b'p'}{H}-\frac{b''p''}{H}\right)E+\left(\frac{b''p''}{H}-\frac{bp}{H}\right)E'+\left(\frac{bp}{H}-\frac{b'p'}{H}\right)E''}H.$$

Ist J der Neigungswinkel des Stils oder Stifts gegen die Uhrebene, so ist

$$18) \quad \ldots\ldots\ldots \tang J = \frac{H}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$

eine Formel, welche man auf bekannte Weise leicht zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten kann. Ist die Uhrebene horizontal, so ist J die Polhöhe des Beobachtungsorts.

Die durch die Punkte O und M gezogene Gerade ist die Projection des Stils oder Stifts auf der Uhrebene und wird die Substilarlinie genannt. Wenn man von dem Punkte S ein Loth herabhängen lässt, dessen Durchschnittspunkt mit der Uhrebene bestimmt, und dann durch diesen Punkt und den Punkt M eine Gerade zieht; so ist diese Gerade offenbar die Durchschnittslinie der Ebene des Meridians des Beobachtungsorts mit der Uhrebene und wird die Mittagslinie der Uhr genannt. Alle diese Elemente, deren Kenntniss zur Construction der Uhr nothwendig ist, lassen sich daher bloss aus den drei durch Beobachtung gefundenen Punkten A, A', A'' mittelst der obigen Formeln bestimmen.

Weil die Substilarlinie die Projection der Weltaxe auf der Ebene der xy ist, so ist nach 11) ihre Gleichung:

$$19) \quad . \; . \; \mathfrak{y} = -\frac{(a'-a'')E + (a''-a)E' + (a-a')E''}{(b'-b'')E + (b''-b)E' + (b-b')E''}\mathfrak{x}.$$

Beschreibt man in der Uhrebene aus den drei gegebenen Punkten A, A', A'' respective mit den Halbmessern E, E', E'' drei Kreise, so ist die Gleichung der äusseren Aehnlichkeitsaxe dieser drei Kreise bekanntlich*):

$$\mathfrak{y} - \frac{bE'-b'E}{E'-E} = \frac{(b'-b'')E + (b''-b)E' + (b-b')E''}{(a'-a'')E + (a''-a)E' + (a-a')E''}\left(\mathfrak{x} - \frac{aE'-a'E}{E'-E}\right),$$

und nach 19) ist folglich auf dieser äusseren Aehnlichkeitsaxe die Substilarlinie senkrecht. Nimmt man nun hierzu noch, dass die Substilarlinie durch den Punkt O geht, so ergiebt sich folgende Construction derselben: Aus den gegebenen Punkten A, A', A'' als Mittelpunkten beschreibe man respective mit den Halbmessern E, E', E'' in der Uhrebene drei Kreise, suche nach bekannten Methoden deren äussere Aehnlichkeitsaxe und ziehe durch den gegebenen Punkt O eine auf derselben senkrecht stehende Gerade, so ist diese Gerade die Substilarlinie.

---

*) A. a. O. Thl. I. S. 112.

Der Punkt (pq) ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden aus den Mittelpunkten A', A'' mit den Halbmessern E', E'' beschriebenen Kreise; der Punkt $(p'q')$ ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden aus den Mittelpunkten A'', A mit den Halbmessern E'', E beschriebenen Kreise; der Punkt $(p''q'')$ ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden aus den Mittelpunkten A, A' mit den Halbmessern E, E' beschriebenen Kreise; also können die Punkte (pq), $(p'q')$, $(p''q'')$ mittelst bekannter geometrischer Methoden leicht construirt werden.

Nimmt man jetzt, was offenbar verstattet ist, die Substilarlinie als Axe der x an, und denkt sich das rechtwinklige Dreieck SOM um die Substilarlinie gedreht und in die Ebene der xy oder die Uhrebene niedergelegt; so ist nach 11) die Gleichung der Weltaxe offenbar:

20)

$$\mathfrak{y}-H=-\frac{(a'b''-b'a'')E+(a''b-b''a)E'+(ab'-ba')E''}{\{(b'-b'')E+(b''-b)E'+(b-b')E''\}H}\mathfrak{x},$$

oder:

$$\mathfrak{y}-H=\frac{a(b'E''-b''E')+a'(b''E-bE'')+a''(bE'-b'E)}{\{(b'E''-b''E')+(b''E-bE'')+(bE'-b'E)\}H}\mathfrak{x},$$

oder:

$$\mathfrak{y}-H=\frac{aq(E''-E')+a'q'(E-E'')+a''q''(E'-E)}{\{q(E''-E')+q'(E-E'')+q''(E'-E)\}H}\mathfrak{x},$$

also:

21)

$$\mathfrak{y}-H=\frac{\left(\frac{a'q'}{H}-\frac{a''q''}{H}\right)E+\left(\frac{a''q''}{H}-\frac{aq}{H}\right)E'+\left(\frac{aq}{H}-\frac{a'q'}{H}\right)E''}{(q'-q'')E+(q''-q)E'+(q-q')E''}\mathfrak{x}.$$

Construirt man nun, immer in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem, dessen x-Axe die Substiliarlinie ist, die drei durch die Coordinaten

$$q,\ \frac{aq}{H};\quad q',\ \frac{a'q'}{H};\quad q'',\ \frac{a''q''}{H}$$

bestimmten Punkte, was nicht der mindesten Schwierigkeit unterliegt und hier nicht weiter erläutert zu werden braucht, und beschreibt aus diesen Punkten als Mittelpunkten respective mit den Halbmessern E, E', E'' Kreise; so ist die Gleichung der äusseren Aehnlichkeitsaxe dieser Kreise bekanntlich:

$$\mathfrak{y}-\frac{\frac{aq}{H}E'-\frac{a'q'}{H}E}{E'-E}$$

$$=\frac{\left(\frac{a'q'}{H}-\frac{a''q''}{H}\right)E+\left(\frac{a''q''}{H}-\frac{aq}{H}\right)E'+\left(\frac{aq}{H}-\frac{a'q'}{H}\right)E''}{(q'-q'')E+(q''-q)E'+(q-q')E''}\left(\mathfrak{x}-\frac{qE'-q'E}{E'-E}\right),$$

und dieser Aehnlichkeitsaxe ist folglich nach 21) die Weltaxe parallel. Da nun die Weltaxe durch den Punkt S geht, so erhält man dieselbe, wenn man durch den Punkt S mit der in Rede stehenden Aehnlichkeitsaxe eine Parallele zieht, deren Durchschnittspunkt mit der Substilarlinie zugleich den Mittelpunkt M der Uhr bestimmt.

Solche geometrische Beziehungen würden sich noch mehrere auffinden lassen, die man aber doch schwerlich in der Praxis anwenden wird, weshalb ich mich mit den obigen Betrachtungen begnüge und nochmals auf die Arbeit von Sarrus verweise.

In der Praxis dürfte es immer am besten sein, die Coordinaten des Mittelpunkts der Uhr mittelst der Formeln 12) durch Rechnung zu bestimmen, wodurch dann, wie sogleich in die Augen fällt, auch alles Uebrige gegeben ist. Ich will daher diese Formeln jetzt zur Rechnung noch etwas bequemer einrichten.

Zu dem Ende bezeichne man die Entfernungen der Punkte A, A', A'' von dem Punkte O durch r, r', r''; und setze

$$22)\ \ldots\ \begin{cases} a\;=r\cos\varphi, & b\;=r\sin\varphi;\\ a'\,=r'\cos\varphi', & b'\,=r'\sin\varphi';\\ a''=r''\cos\varphi'', & b''=r''\sin\varphi''; \end{cases}$$

so dass man also zur Bestimmung der Winkel φ, φ', φ'', welche in bekannter Weise von 0 bis 360° gezählt werden, die folgenden Formeln hat:

$$23)\ \ldots\ \begin{cases} \cos\varphi\;=\frac{a}{r}, & \sin\varphi\;=\frac{b}{r}, & \operatorname{tang}\varphi\;=\frac{b}{a};\\ \cos\varphi'\,=\frac{a'}{r'}, & \sin\varphi'\,=\frac{b'}{r'}, & \operatorname{tang}\varphi'\,=\frac{b'}{a'};\\ \cos\varphi''=\frac{a''}{r''}, & \sin\varphi''=\frac{b''}{r''}, & \operatorname{tang}\varphi''=\frac{b''}{a''}. \end{cases}$$

Ferner bezeichne man die Neigungswinkel der Linien AS, $A'S$, $A''S$ gegen die Uhrebene durch i, i', i'', so ist:

$$24)\quad\left\{\begin{array}{lll} r\;=E\cos i, & H=E\sin i, & H=r\,\mathrm{tang}\,i;\\ r'\;=E'\cos i', & H=E'\sin i', & H=r'\,\mathrm{tang}\,i';\\ r''=E''\cos i'', & H=E''\sin i'', & H=r''\,\mathrm{tang}\,i''; \end{array}\right.$$

woraus sich verschiedene Systeme von Formeln zur Berechnung der Winkel i, i', i'' ergeben, von denen wir nur die Formeln:

$$25)\;\ldots\quad \mathrm{tang}\,i=\frac{H}{r},\quad \mathrm{tang}\,i'=\frac{H}{r'},\quad \mathrm{tang}\,i''=\frac{H}{r''}$$

hervorheben wollen.

Zuerst ist nun offenbar:

$$(a'b''-b'a'')E+(a''b-b''a)E'+(ab'-ba')E''$$

$$=-rr'r''\left\{\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\cos i}+\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\cos i'}+\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\cos i''}\right\}.$$

Ferner ist:

$$\{(a'-a'')E+(a''-a)E'+(a-a')E''\}H$$

$$=rr'r''\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\varphi'}{\cos i}\,\mathrm{tang}\,i''-\dfrac{\cos\varphi''}{\cos i}\,\mathrm{tang}\,i'\\ +\dfrac{\cos\varphi''}{\cos i'}\,\mathrm{tang}\,i-\dfrac{\cos\varphi}{\cos i'}\,\mathrm{tang}\,i''\\ +\dfrac{\cos\varphi}{\cos i''}\,\mathrm{tang}\,i'-\dfrac{\cos\varphi'}{\cos i''}\,\mathrm{tang}\,i \end{array}\right\}$$

$$=rr'r''\left\{\begin{array}{l} \cos\varphi\dfrac{\sin i'-\sin i''}{\cos i'\cos i''}\\ +\cos\varphi'\dfrac{\sin i''-\sin i}{\cos i''\cos i}\\ +\cos\varphi''\dfrac{\sin i-\sin i'}{\cos i\cos i'} \end{array}\right\}$$

$$=2rr'r''\left\{\begin{array}{l} \cos\varphi\dfrac{\sin\frac{1}{2}(i'-i'')\cos\frac{1}{2}(i'+i'')}{\cos i'\cos i''}\\ +\cos\varphi'\dfrac{\sin\frac{1}{2}(i''-i)\cos\frac{1}{2}(i''+i)}{\cos i''\cos i}\\ +\cos\varphi''\dfrac{\sin\frac{1}{2}(i-i')\cos\frac{1}{2}(i+i')}{\cos i\cos i'} \end{array}\right\},$$

$$\{(b'-b'')E+(b''-b)E'+(b-b')E''\}H$$

$$=rr'r''\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin\varphi'}{\cos i}\operatorname{tang}i''-\frac{\sin\varphi''}{\cos i}\operatorname{tang}i'\\+\frac{\sin\varphi''}{\cos i'}\operatorname{tang}i-\frac{\sin\varphi}{\cos i'}\operatorname{tang}i''\\+\frac{\sin\varphi}{\cos i''}\operatorname{tang}i'-\frac{\sin\varphi'}{\cos i''}\operatorname{tang}i\end{array}\right\}$$

$$=rr'r''\left\{\begin{array}{l}\sin\varphi\frac{\sin i'-\sin i''}{\cos i'\cos i''}\\+\sin\varphi'\frac{\sin i''-\sin i}{\cos i''\cos i}\\+\sin\varphi''\frac{\sin i-\sin i'}{\cos i\cos i'}\end{array}\right\}$$

$$=2rr'r''\left\{\begin{array}{l}\sin\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}(i'-i'')\cos\frac{1}{2}(i'+i'')}{\cos i'\cos i''}\\+\sin\varphi'\frac{\sin\frac{1}{2}(i''-i)\cos\frac{1}{2}(i''+i)}{\cos i''\cos i}\\+\sin\varphi''\frac{\sin\frac{1}{2}(i-i')\cos\frac{1}{2}(i+i')}{\cos i\cos i'}\end{array}\right\}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$26)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}M=2\cos i\sin\frac{1}{2}(i'-i'')\cos\frac{1}{2}(i'+i''),\\M'=2\cos i'\sin\frac{1}{2}(i''-i)\cos\frac{1}{2}(i''+i),\\M''=2\cos i''\sin\frac{1}{2}(i-i')\cos\frac{1}{2}(i+i')\end{array}\right.$$

und

$$27)\quad N=\cos i'\cos i'',\quad N'=\cos i''\cos i,\quad N''=\cos i\cos i';$$

so ist nach 12) offenbar:

28)

$$X=-\frac{M\sin\varphi+M'\sin\varphi'+M''\sin\varphi''}{N\sin(\varphi'-\varphi'')+N'\sin(\varphi''-\varphi)+N''\sin(\varphi-\varphi')}H,$$

$$Y=\frac{M\cos\varphi+M'\cos\varphi'+M''\cos\varphi''}{N\sin(\varphi'-\varphi'')+N'\sin(\varphi''-\varphi)+N''\sin(\varphi-\varphi')}H;$$

mittelst welcher Formeln die Coordinaten des Mittelpunkts der Uhr ohne besondere Schwierigkeit berechnet werden können.

II.

Die Stundenlinien der Uhr können nun durch Rechnung auf folgende Art bestimmt werden, wobei wir uns grösserer Deutlichkeit und Bestimmtheit wegen auf die nördliche Hälfte der Erde versetzen wollen.

Wir kennen den Mittelpunkt M der Uhr und die Mittagslinie derselben, also auch die Linie, in welcher die Uhrebene von der südlichen Hälfte der Ebene des Meridians geschnitten wird, welche Linie wir durch MO bezeichnen wollen. Denken wir uns nun eine beliebige, von der Weltaxe ausgehende Ebene, welche mit der südlichen Hälfte des Meridians den von derselben an nach Westen hin von 0 bis 360^0 gezählten Winkel $\frac{360^0}{n}$ einschliesst, und bezeichnen die Linie, in welcher von dieser Ebene die Uhrebene geschnitten wird, durch Mn; so kommt jetzt Alles darauf an, den von den beiden Linien MO und Mn auf der Uhrebene eingeschlossenen, dem Winkel $\frac{360^0}{n}$ im Raume entsprechenden Winkel, welchen wir durch Σ_n bezeichnen wollen, zu bestimmen, weil sich dann offenbar alle Stundenlinien ihrer Lage nach finden lassen.

Der Winkel J behält seine aus I. bekannte Bedeutung, und wenn wir die Substilarlinie, als Projection von MS aufgefasst, durch MS_1 bezeichnen, so soll der von MS_1 mit MO eingeschlossene, von MO an in demselben Sinne wie der Winkel Σ_n von 0 bis 360^0 gezählte, natürlich als bekannt zu betrachtende Winkel durch Ω bezeichnet werden.

Um M als Mittelpunkt wollen wir uns mit der Längeneinheit als Halbmesser eine Kugelfläche beschrieben denken, von der die Linien MS, MO, Mn in den Punkten S, O, n geschnitten werden mögen. Die Uhrebene nehmen wir jetzt als die Ebene der xy eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an, dessen Anfang der Punkt M ist; der positive Theil der Axe der x sei MO, und der positive Theil der Axe der y liege auf der Seite der Axe der x, nach welcher hin von MO an die Winkel Σ_n gezählt werden; der positive Theil der Axe der z endlich liege auf derselben Seite der Uhrebene, auf welcher der Punkt S liegt. Unter diesen Voraussetzungen sind die Coordinaten des Punktes O offenbar $1, 0, 0$; die Coordinaten des Punktes n sind $\cos\Sigma_n$, $\sin\Sigma_n$, 0; und die Coordinaten des Punktes S sind $\cos\Omega\cos J$,

$\sin\Omega\cos J$, $\sin J$. Bezeichnen wir nun die Gleichung der Ebene $SM0$ durch

$$Ax + By + Cz = 0,$$

so ist:

$$A.1 + B.0 + C.0 = 0,$$

$$A\cos\Omega\cos J + B\sin\Omega\cos J + C\sin J = 0;$$

also:

$$A = 0, \quad B\sin\Omega\cos J + C\sin J = 0;$$

woraus sich ergiebt, dass man

$$B = \sin J, \quad C = -\sin\Omega\cos J$$

setzen kann, und dass folglich

$$29) \quad \ldots\ldots \quad y\sin J - z\sin\Omega\cos J = 0$$

die Gleichung der Ebene $SM0$ ist.

Bezeichnen jetzt θ, ω, $\overline{\omega}$ die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die Linie MS mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, so ist offenbar:

$$30) \quad \cos\theta = \cos\Omega\cos J, \quad \cos\omega = \sin\Omega\cos J, \quad \cos\overline{\omega} = \sin J;$$

mittelst welcher Formeln die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ leicht bestimmt werden können.

Den 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welchen die Ebene $SM0$ nach der Seite der positiven y und z hin mit der Uhrebene einschliesst, wollen wir durch i bezeichnen; so ist die Gleichung der Ebene $SM0$ offenbar

$$z = y\tan i,$$

und da nun nach 29) die Gleichung dieser Ebene auch

$$z = \frac{\tan J}{\sin\Omega}y$$

ist, so ist in völliger Allgemeinheit:

$$31) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tan i = \frac{\tan J}{\sin\Omega},$$

mittelst welcher Formel der 180^0 nicht übersteigende Winkel i leicht und ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden kann.

Wenn nun zuerst $\frac{360^0}{n} < 180^0$, also auch $\Sigma_n < 180^0$ ist, so

ist in dem sphärischen Dreiecke $S0n$ offenbar $\frac{360^0}{n}$ der Winkel bei S, θ die Seite $S0$, i der Winkel bei 0, Σ_n die Seite $0n$; also nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cot \Sigma_n = \frac{\cos\theta \cos i + \cot\frac{360^0}{n} \sin i}{\sin\theta},$$

wo auch $\Sigma_n < 180^0$ zu nehmen ist. Wenn ferner $\frac{360^0}{n} > 180^0$, also auch $\Sigma_n > 180^0$ ist, so ist in dem sphärischen Dreiecke $S0n$ offenbar $360^0 - \frac{360^0}{n}$ der Winkel bei S, θ die Seite $S0$, $180^0 - i$ der Winkel bei 0, $360^0 - \Sigma_n$ die Seite $0n$; also:

$$\cot(360^0 - \Sigma_n) = \frac{\cos\theta \cos(180^0 - i) + \cot(360^0 - \frac{360^0}{n}) \sin(180^0 - i)}{\sin\theta},$$

und daher offenbar ganz wie vorher:

$$\cot \Sigma_n = \frac{\cos\theta \cos i + \cot\frac{360^0}{n} \sin i}{\sin\theta}.$$

Daher hat man zur Berechnung von Σ_n die ganz allgemeine Formel:

$$32) \ldots\ldots \cot \Sigma_n = \frac{\cos\theta \cos i + \cot\frac{360^0}{n} \sin i}{\sin\theta},$$

bei deren Anwendung man nur zu beachten hat, dass immer gleichzeitig

$$0 < \frac{360^0}{n} < 180^0, \quad 0 < \Sigma_n < 180^0$$

und

$$180^0 < \frac{360^0}{n} < 360^0, \quad 180^0 < \Sigma_n < 360^0$$

sein muss, so dass also rücksichtlich der Bestimmung von Σ_n nie eine Zweideutigkeit bleiben kann.

Berechnet man den Hülfswinkel ξ mittelst der Formel

$$33) \ldots\ldots \tang \xi = \cos\theta \tang\frac{360^0}{n},$$

so ist, wie man leicht findet:

$$34) \ldots\ldots \tang \Sigma_n = \frac{\tang\theta \sin\xi}{\sin(i + \xi)}.$$

Für die Horizontal-Uhr ist $i = 90^0$, also nach 32):

$$\cot \Sigma_n = \frac{\cot \frac{360^0}{n}}{\sin \theta}.$$

und da nun in diesem Falle offenbar $\theta = 180^0 - J$, folglich $\sin \theta = \sin J$ ist, so erhält man zur Berechnung von Σ_n die sehr einfache Formel:

$$35) \quad . \quad . \cot \Sigma_n = \frac{\cot \frac{360^0}{n}}{\sin J}, \quad \tang \Sigma_n = \sin J \tang \frac{360^0}{n}.$$

Hat man mittelst des Vorhergehenden auf der Uhr die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... 22, 23, $\left\{ \begin{matrix} 24 \\ 0 \end{matrix} \right.$ bestimmt, und soll die Uhr für bürgerliche Zeit eingerichtet werden, so muss man diese Zahlen durch die folgenden mit römischen Ziffern bezeichneten Stundenzahlen ersetzen:

0	XII	Mitternacht
1	I	Vormittag
2	II	
3	III	
4	IV	
5	V	
6	VI	
7	VII	
8	VIII	
9	IX	
10	X	
11	XI	
12	XII	Mittag
13	I	Nachmittag
14	II	
15	III	
16	IV	
17	V	
18	VI	
19	VII	
20	VIII	
21	IX	
22	X	
23	XI	
24 / 0	XII	Mitternacht.

III.

Wir wollen nun noch die Curve bestimmen, welche der Endpunkt des Schattens des Stils oder der Lichtpunkt an einem Tage, wo die Declination der Sonne δ ist, auf der Uhrebene beschreibt. Zu dem Ende nehmen wir die Uhrebene als Ebene der xy eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an, dessen Anfang M ist, und bezeichnen die von der als von M ausgehend gedachten Geraden MS mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch θ, ω, ϖ; die Länge des Stifts oder Stils MS aber durch L. Dann sind offenbar

$$L\cos\theta,\quad L\cos\omega,\quad L\cos\varpi$$

die Coordinaten des Punktes S in diesem Systeme. Bezeichnen nun u, v, w die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche ein beliebiger, von S nach der Sonne gezogener Strahl mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst; so sind

$$\frac{x-L\cos\theta}{\cos u}=\frac{y-L\cos\omega}{\cos v}=\frac{z-L\cos\varpi}{\cos w}$$

die Gleichungen dieses Strahls. Nach den Gesetzen der täglichen Bewegung der Sphäre und einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist aber offenbar

$$\cos\theta\cos u+\cos\omega\cos v+\cos\varpi\cos w=\cos(90^0\mp\delta)=\pm\sin\delta,$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem MS von M aus nach dem Nordpole oder nach dem Südpole hin gerichtet ist. Nach dem Vorhergehenden ist aber:

$$\cos v=\frac{y-L\cos\omega}{x-L\cos\theta}\cos u,\quad \cos w=\frac{z-L\cos\varpi}{x-L\cos\theta}\cos u;$$

also nach obiger Gleichung:

$$\{(x-L\cos\theta)\cos\theta+(y-L\cos\omega)\cos\omega+(z-L\cos\varpi)\cos\varpi\}\cos u$$
$$=\pm(x-L\cos\theta)\sin\delta$$

oder

$$(x\cos\theta+y\cos\omega+z\cos\varpi-L)\cos u=\pm(x-L\cos\theta)\sin\delta,$$

und folglich:

$$\cos u = \pm \frac{(x - L\cos\theta)\sin\delta}{x\cos\theta + y\cos\omega + z\cos\overline{\omega} - L},$$

$$\cos v = \pm \frac{(y - L\cos\omega)\sin\delta}{x\cos\theta + y\cos\omega + z\cos\overline{\omega} - L},$$

$$\cos w = \pm \frac{(z - L\cos\overline{\omega})\sin\delta}{x\cos\theta + y\cos\omega + z\cos\overline{\omega} - L}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\cos u^2 + \cos v^2 + \cos w^2 = 1$$

ist, so ist:

$$36) \quad \ldots \quad (x\cos\theta + y\cos\omega + z\cos\overline{\omega} - L)^2$$
$$= \sin\delta^2\{(x - L\cos\theta)^2 + (y - L\cos\omega)^2 + (z - L\cos\overline{\omega})^2\},$$

oder:

$$37) \quad \ldots \quad (x\cos\theta + y\cos\omega + z\cos\overline{\omega} - L)^2$$
$$= \sin\delta^2\{x^2 + y^2 + z^2 - 2L(x\cos\theta + y\cos\omega + z\cos\overline{\omega}) + L^2\},$$

oder, wie man leicht findet:

$$38) \quad \ldots \quad (x^2 + y^2 + z^2)\sin\delta^2$$
$$= (x\cos\theta + y\cos\omega + z\cos\overline{\omega})^2 - 2L(x\cos\theta + y\cos\omega + z\cos\overline{\omega})\cos\delta^2 + L^2\cos\delta^2$$

die Gleichung der Kegelfläche, welche der Sonnenstrahl an dem Tage, wo die Declination der Sonne δ ist, beschreibt. Die Schattencurve ist offenbar der Durchschnitt dieser Kegelfläche mit der Uhrebene, und ihre Gleichung wird folglich erhalten, wenn man in der vorstehenden Gleichung $z = 0$ setzt, wodurch sich

$$39) \quad \ldots \quad (x^2 + y^2)\sin\delta^2$$
$$= (x\cos\theta + y\cos\omega)^2 - 2L(x\cos\theta + y\cos\omega)\cos\delta^2 + L^2\cos\delta^2$$

ergiebt.

Nehmen wir die der Projection von MS auf der Uhrebene direct entgegengesetzte Gerade als den positiven Theil der Axe der x an und den positiven Theil der Axe der z auf derselben Seite der Uhrebene, auf welcher die Linie MS liegt, wobei die Annahme des positiven Theils der Axe der y der Willkühr anheim gestellt bleibt, so ist offenbar:

$$\theta = 180^0 - J, \quad \omega = 90^0, \quad \overline{\omega} = 90^0 - J;$$

also:

$$\cos\theta = -\cos J, \quad \cos\omega = 0, \quad \cos\overline{\omega} = \sin J;$$

folglich nach 38) die Gleichung der von dem Sonnenstrahl beschriebenen Kegelfläche:

$$40) \quad \ldots\ldots \quad (x^2+y^2+z^2)\sin\delta^2$$
$$= (x\cos J - z\sin J)^2 + 2L(x\cos J - z\sin J)\cos\delta^2 + L^2\cos\delta^2,$$

und nach 39) die Gleichung der Schattencurve:

$$41) \quad (x^2+y^2)\sin\delta^2 = x^2\cos J^2 + 2Lx\cos J\cos\delta^2 + L^2\cos\delta^2$$

oder:

$$42) \quad y^2\sin\delta^2 - x^2(\cos J^2 - \sin\delta^2) - 2Lx\cos J\cos\delta^2 - L^2\cos\delta^2 = 0.$$

Diese Gleichung kann man auf folgende Art ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{l} y^2\sin\delta^2 - x^2(\cos J^2 - \cos J^2\cos\delta^2 - \sin\delta^2) \\ \quad -(x^2\cos J^2 + 2Lx\cos J + L^2)\cos\delta^2 \end{array}\right\} = 0,$$

also auf folgende Art:

$$(y^2 + x^2\sin J^2)\sin\delta^2 - (L + x\cos J)^2\cos\delta^2 = 0$$

oder:

$$43) \quad \ldots \quad y^2 = (L + x\cos J)^2\cot\delta^2 - x^2\sin J^2.$$

Nun ist aber:

$$(L + x\cos J)^2\cos\delta^2 - x^2\sin J^2\sin\delta^2$$
$$= \{L\cos\delta + x(\cos J\cos\delta + \sin J\sin\delta)\}\{L\cos\delta + x(\cos J\cos\delta - \sin J\sin\delta)\}$$
$$= \{L\cos\delta + x\cos(J-\delta)\}\{L\cos\delta + x\cos(J+\delta)\},$$

also die Gleichung 43) offenbar:

$$44) \quad y = \pm\frac{\sqrt{\{L\cos\delta + x\cos(J-\delta)\}\{L\cos\delta + x\cos(J+\delta)\}}}{\sin\delta}.$$

Bezeichnen wir die Werthe von x, für welche y verschwindet, durch f, g; so haben wir zu deren Bestimmung nach dem Vorhergehenden die Gleichungen:

$$L\cos\delta + f\cos(J-\delta) = 0, \quad L\cos\delta + g\cos(J+\delta) = 0;$$

woraus sich

$$45) \quad \ldots \quad f = -\frac{L\cos\delta}{\cos(J-\delta)}, \quad g = -\frac{L\cos\delta}{\cos(J+\delta)}$$

ergiebt. Dies sind also die ersten Coordinaten der Punkte, in denen die Axe der x von der Schattencurve geschnitten wird,

und die erste Coordinate des Mittelpunkts der Entfernung dieser beiden Punkte von einander ist also:

$$\tfrac{1}{2}(f+g)=-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{L\cos\delta}{\cos(J-\delta)}+\frac{L\cos\delta}{\cos(J+\delta)}\right\}=-\frac{L\cos J\cos\delta^2}{\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)}.$$

Nehmen wir diesen Punkt als den Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensystems der x_1y_1 an, so ist:

$$x=-\frac{L\cos J\cos\delta^2}{\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)}+x_1,\quad y=y_1;$$

also:

$$L\cos\delta+x\cos(J-\delta)=x_1\cos(J-\delta)-\frac{L\sin J\sin\delta\cos\delta}{\cos(J+\delta)},$$

$$L\cos\delta+x\cos(J+\delta)=x_1\cos(J+\delta)+\frac{L\sin J\sin\delta\cos\delta}{\cos(J-\delta)};$$

oder:

$$L\cos\delta+x\cos(J-\delta)=\cos(J-\delta)\left\{x_1-\frac{L\sin J\sin\delta\cos\delta}{\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)}\right\},$$

$$L\cos\delta+x\cos(J+\delta)=\cos(J+\delta)\left\{x_1+\frac{L\sin J\sin\delta\cos\delta}{\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)}\right\};$$

und daher nach 44) im Systeme der x_1y_1 die Gleichung der Schattencurve:

$$y_1^2=\frac{\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)}{\sin\delta^2}\left\{x_1^2-\frac{L^2\sin J^2\sin\delta^2\cos\delta^2}{\cos(J+\delta)^2\cos(J-\delta)^2}\right\}$$

oder:

$$46)\quad \frac{\cos(J+\delta)^2\cos(J-\delta)^2}{L^2\sin J^2\sin\delta^2\cos\delta^2}x_1^2-\frac{\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)}{L^2\sin J^2\cos\delta^2}y_1^2=1.$$

Setzen wir

47)

$$a=\text{val. abs.}\frac{L\sin J\sin\delta\cos\delta}{\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)},\quad b=\frac{L\sin J\cos\delta}{\sqrt{\pm\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)}};$$

indem wir das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem das Product $\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)$ positiv oder negativ ist; so wird mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens die Gleichung 46):

$$48)\quad \ldots\ldots\quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2\mp\left(\frac{y_1}{b}\right)^2=1,$$

und die Schattencurve ist folglich eine Hyperbel oder eine Ellipse,

jenachdem $\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)>0$ oder $\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)<0$ ist. Bezeichnen wir den Parameter durch p, so ist bekanntlich $p=\frac{2b^2}{a}$, also nach 47), wie man leicht findet:

$$49) \quad \ldots\ldots \quad p = \text{val. abs. } 2L\sin J\cot\delta.$$

Die Substilarlinie der Uhr ist nach dem Obigen immer die Axe der Schattencurve, und die ersten Coordinaten ihrer beiden Scheitel in Bezug auf das primitive System der xy sind nach 45): $-\frac{L\cos\delta}{\cos(J-\delta)}$, $-\frac{L\cos\delta}{\cos(J+\delta)}$; die erste Coordinate des Mittelpunkts in Bezug auf dasselbe System ist nach dem Obigen:

$$-\frac{L\cos J\cos\delta^2}{\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)}.$$

Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, wenn

$$\cos(J+\delta)\cos(J-\delta)=0$$

ist. Nun ist aber nach 42) im Systeme der xy die Gleichung der Schattencurve:

$$y^2\sin\delta^2 - x^2(\cos J^2 - \sin\delta^2) - 2Lx\cos J\cos\delta^2 - L^2\cos\delta^2 = 0,$$

oder, weil

$$\cos J^2 - \sin\delta^2 = \cos J^2\cos\delta^2 - \sin J^2\sin\delta^2$$

$$=(\cos J\cos\delta - \sin J\sin\delta)(\cos J\cos\delta + \sin J\sin\delta) = \cos(J+\delta)\cos(J-\delta)$$

ist:

$$y^2\sin\delta^2 - x^2\cos(J+\delta)\cos(J-\delta) - 2Lx\cos J\cos\delta^2 - L^2\cos\delta^2 = 0,$$

also unter der gemachten Voraussetzung:

$$y^2\sin\delta^2 = L(L+2x\cos J)\cos\delta^2,$$

und folglich unter der Voraussetzung, dass nicht $\sin\delta=0$ ist: $y^2=L(L+2x\cos J)\cot\delta^2$. Bezeichnen wir den Werth von x, für welchen y verschwindet, durch f, so haben wir zu dessen Bestimmung die Gleichung: $L+2f\cos J=0$, woraus sich

$$50) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f=-\frac{L}{2\cos J}$$

ergiebt. Nehmen wir den Punkt, in welchem die Axe der x von der Schattencurve geschnitten wird, als Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensystems der x_1y_1 an; so ist $x=-\frac{L}{2\cos J}+x_1$, $y=y_1$ und folglich $L+2x\cos J=2x_1\cos J$, also nach dem Obigen die Gleichung der Schattencurve:

$$51) \quad \ldots\ldots \quad y_1{}^2 = 2Lx_1\cos J\cot\delta^2,$$

die Schattencurve daher eine Parabel, deren Parameter p durch die Formel

$$52) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p = 2L\cos J\cot\delta^2$$

bestimmt wird. Die Axe dieser Parabel ist wieder die Substilarlinie, und $-\frac{L}{2\cos J}$ ist die erste primitive Coordinate ihres Scheitels, woraus man ferner auch leicht auf bekannte Weise die Lage des Brennpunkts und der Directrix bestimmen kann.

Wenn $\sin\delta = 0$, also $\delta = 0$ und $\cos\delta = 1$ ist, so ist nach 42) die Gleichung der Schattencurve: $x^2\cos J^2 + 2Lx\cos J + L^2 = 0$, und folglich $(x\cos J + L)^2 = 0$, woraus

$$53) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x\cos J + L = 0, \quad x = -\frac{L}{\cos J}$$

folgt. Die Schattencurve ist also in diesem Falle eine der Axe der y parallele, folglich auf der Substilarlinie senkrecht stehende Gerade, was sich auch von selbst versteht, weil für $\delta = 0$ die Sonne sich in der Ebene des Aequators bewegt, die von den Sonnenstrahlen beschriebene Kegelfläche also in eine auf der Weltaxe senkrecht stehende Ebene übergeht.

X.

Miscellen.

Die Trisection des Winkels.

Von Herrn Kuhlmey, Subrector in Perleberg.

Der in drei gleiche Theile zu theilende Winkel sei ACB (Taf. I. Fig. 8.). Man schlage mit einer beliebigen Zirkelöffnung um C den Bogen AEB, ziehe die Sehne AB, errichte auf den Halbmesser CB den Halbkreis CDB und ziehe vom Mittelpunkte C durch den Durchschnittspunkt des Halbkreises und der Sehne D den Halbmesser CE. Darauf ziehe man die Halbmesser CE', CE'', CE''' u. s. w., halbire die Stücke der Halbmesser, welche zwischen der Sehne und dem Bogen liegen, also DE, $D'E'$, $D''E''$ u. s. w. und verbinde die Halbirungspunkte F, F', F'', F''' u. s. w. durch eine Curve. Nun ziehe man von C durch O, den Durchschnittspunkt der halbirenden Curve FF^V und des auf CB errichteten Halbkreises CDB, den Radius CL; so hat dieser den dritten Theil des gegebenen Winkels ACB abgeschnitten.

Beweis. Ziehe die Linien BO und BL.

$$\begin{array}{c} \angle KOB = \angle LOB \\ KO = LO \\ BO = BO \\ \hline \triangle KOB = \triangle LOB \\ \hline \angle BKO = \angle BLO. \end{array}$$

Da aber auch $\angle CLB = \angle CBL$, so ist auch $\angle LBK = \angle LCB$. $\angle LBK$ hat als Peripherie-Winkel zum Maass den halben Bogen AL und der Winkel LCB als Centri-Winkel den Bogen LB, folglich hat AL zwei solcher Theile wie LB einen oder $BL = \frac{1}{3}BA$.

Nachschrift des Herausgebers.

Wenn auch der vorstehende kleine, mir für das „Archiv" übersandte Aufsatz für viele Mathematiker wahrscheinlich nichts Neues enthalten wird, so lasse ich ihn doch abdrucken, weil die Form, in welcher hier die Trisection des Winkels gegeben wird, vielleicht bei'm geometrischen Elementar-Unterrichte eine nicht ganz unzweckmässige Verwendung finden könnte. In seinem an mich gerichteten Briefe sagt der sehr bescheidene Herr Verfasser, Lehrer an einer preussischen Stadtschule, dass er die Curve, mittelst welcher er den Winkel trisecirt, nicht kenne. Vielleicht ist es ihm nicht unangenehm, — und dies ist auch ein Grund, welcher mich veranlasst, dem kurzen Aufsatze ein Plätzchen zu vergönnen, — wenn ich ihm sage, dass seine Curve keine andere ist, als eine gewöhnliche Conchoide, welche schon der griechische Geometer Nikomedes, der im zweiten Jahrhundert vor Chr. Geb. gelebt haben mag, zur Trisection des Winkels erdacht hat. Sein Verfahren, — sagt Klügel im mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 531. — kennen wir nicht mehr, da seine Schrift über die Conchoide verloren gegangen ist.

Dass aber die Curve des Herrn Verfassers eine Conchoide ist, lässt sich leicht auf folgende Art übersehen. Man halbire in Taf. I. Fig. 9. die Linie CD in G und lege durch G eine der Sehne AB parallele Gerade MN, so wird durch diese Gerade auch CD' in G' halbirt. Die Mittelpunkte von DE und $D'E'$ sind nach der Construction des Herrn Verfassers F und F'. Nun ist

$$GF = GD + DF = \frac{CD + DE}{2} = \frac{CE}{2},$$

$$G'F' = G'D' + D'F' = \frac{CD' + D'E'}{2} = \frac{CE'}{2};$$

also $GF = G'F'$, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Punkte F, F' und eben so F'', F''', F^{IV}, F^{V},.... Punkte einer Conchoide sind, und zwar einer sogenannten oberen Conchoide, da sich auf der anderen Seite der Geraden MN, auf welcher der Punkt C liegt, bekanntlich noch eine zweite sogenannte untere Conchoide beschreiben lässt.

XI.

Sur les formules pour la multiplication des fonctions elliptiques de la première espèce.

Par

Monsieur Dr. *G. F. W. Baehr*

à Groningue.

I. (n un entier impair).

Soit k le module, k_1 son complément, K et K' les fonctions complètes correspondantes, et

$$\text{Sin. amp.}(u.k) = x, \quad \text{Sin. amp.}(nu.k) = y;$$

on sait, par la formule pour l'addition et le calcul de proche en proche, que si n est un entier impair, l'on a

$$y = x \cdot \frac{F(x.k)}{\varphi(x.k)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où F et φ sont des fonctions rationnelles entières et paires de x et k, qui généralement n'ont point de facteur commun, et qui par rapport à x sont du dégré $n^2-1=4p$.

Si l'on remplace u par $u+iK'$, où $i=\sqrt{-1}$, on a

$$\text{Sin. amp.}(u+iK') = \frac{1}{k\,\text{Sin. amp.}\,u} = \frac{1}{kx},$$

et, n étant impair,

$$\text{Sin. amp.}(nu+niK') = \text{Sin. amp.}(nu+iK') = \frac{1}{k\,\text{Sin. amp.}\,nu} = \frac{1}{ky},$$

de sorte que la formule précédente, en y écrivant simultanément $\frac{1}{kx}$ et $\frac{1}{ky}$ à la place de x et de y, donne

$$y = x . \frac{\varphi\left(\frac{1}{kx} . k\right) k^{4p} x^{4p}}{F\left(\frac{1}{kx} . k\right) k^{4p} x^{4p}},$$

où l'on a multiplié les deux termes de la fraction au second membre par $k^{4p} x^{4p}$ afin de les réduire à des fonctions entières; l'identité des deux formes de y exige que l'on ait

$$F(x.k) = M\varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right) k^{4p} x^{4p}, \quad \varphi(x.k) = MF\left(\frac{1}{kx}.k\right) k^{4p} x^{4p},$$

où le facteur M est indépendant de x, et ainsi, au lieu de la formule (1), l'on peut écrire

$$y = x . \frac{F(x.k)}{MF\left(\frac{1}{kx}.k\right) k^{4p} x^{4p}};$$

si l'on fait

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} = \text{Sin.amp.}[K \pm \tfrac{1}{2} iK'],$$

on a

$$y = \text{Sin.amp.}[nK \pm \tfrac{n}{2} iK'] = \text{Sin.amp.}[(n-1)K \pm \tfrac{n \pm 1}{2} iK' + (K \pm \tfrac{1}{2} iK')],$$

c'est-à-dire, $n-1$ étant pair, ainsi que l'un des nombres $\frac{n \pm 1}{2}$,

$$y = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{Sin.amp.}[K \pm \tfrac{1}{2} iK'] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \frac{1}{\sqrt{k}},$$

et, substituant ces valeurs particulières de x et de y, dans la formule qui précède, on obtient

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{-2p},$$

donc, on aura

(2)

$$F(x.k) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right) k^{2p} x^{4p}, \quad \varphi(x.k) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} F\left(\frac{1}{kx}.k\right) k^{2p} x^{4p},$$

de sorte qu'en posant

$$F(x.k) = A_0 + A_2 x^2 + \ldots + A_{2m} x^{2m} + \ldots + A_{4p-2m} x^{4p-2m} + \ldots + A_{4p} x^{4p},$$

$$\varphi(x.k) = Z_0 + Z_2 x^2 + \ldots + Z_{2m} x^{2m} + \ldots + Z_{4p-2m} x^{4p-2m} + \ldots + Z_{4p} x^{4p},$$

il s'en suit

$$Z_{2m} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{4p-2m} k^{+(2p-2m)}, \quad Z_{4p-2m} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{2m} k^{2p-2m},$$

de sorte que l'on peut aussi écrire

$$F(x.k) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} [Z_{4p} k^{-2p} + Z_{4p-2} k^{-(2p-2)} x^2 + \dots$$
$$\dots + Z_{4p-2m} k^{-(2p-2m)} x^{2m} + \dots + Z_{2m} k^{2p-2m} x^{4p-2m} + \dots + Z_0 k^{2p} x^{4p}],$$

$$\varphi(x.k) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} [A_{4p} k^{-2p} + A_{4p-2} k^{-(2p-2)} x^2 + \dots$$
$$\dots + A_{4p-2m} k^{-(2p-2m)} x^{2m} + \dots + A_{2m} k^{2p-2m} x^{4p-2m} + \dots + A_0 k^{2p} x^{4p}],$$

où les coëfficients A et Z sont des fonctions de n et de k.

La valeur de y satisfait à l'équation differentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{ndx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \dots (3)$$

qui, parce que y s'évanouit avec x, donne $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = n$, mais l'on a aussi, différentiant (1),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x.k)}{\varphi(x.k)} + xd_x.\frac{F(x.k)}{\varphi(x.k)},$$

d'où, faisant $x=0$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{F(0.k)}{\varphi(0.k)} = n,$$

et par conséquent, F et φ n'ayant point de facteur commun, $F(0.k) = n$, $\varphi(0.k) = 1$, c'est-à-dire

$$A_0 = n, \quad A_{4p} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{2p},$$
$$Z_0 = 1, \quad Z_{4p} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} nk^{2p}.$$

Par les relations connues

$$\text{Sin.amp.}(ku.\tfrac{1}{k}) = k\,\text{Sin.amp.}(u.k) = kx,$$
$$\text{Sin.amp.}(nku.\tfrac{1}{k}) = k\,\text{Sin.amp.}(nu.k) = ky,$$

l'on obtient, changeant dans (1) simultanément x et y en kx et ky, et k en $\frac{1}{k}$,

$$ky = kx\frac{F(kx.\frac{1}{k})}{\varphi(kx.\frac{1}{k})}.$$

les deux termes de la fraction au second membre de cette équation devront être identiquement égaux à ceux de la formule (1) multipliés par un facteur qui ne contient pas x; faisant $x=0$ on trouve que ce facteur est l'unité, donc on aura identiquement

$$F(x.k) = F(kx.\frac{1}{k}),\quad \varphi(x.k) = \varphi(kx.\frac{1}{k}),$$

ce qui détermine complètement la forme générale des coëfficients A et Z, car on a, désignant par A' ce que devient A lorsqu'on y change k en $\frac{1}{k}$,

$$F(kx.\frac{1}{k}) = \ldots + A'_{2m}k^{2m}x^{2m} + \ldots + A'_{4p-2m}k^{4p-2m}x^{4p-2m} + \ldots,$$

d'où, par la comparaison avec $F(x.k)$,

$$A_{2m} = A'_{2m}k^{2m},\quad A_{4p-2m} = A'_{4p-2m}k^{4p-2m};$$

soit donc

$$A_{2m} = \overset{2m}{A}_0 + \overset{2m}{A}_2 k^2 + \ldots + \overset{2m}{A}_{2\mu}k^{2\mu} + \ldots + \overset{2m}{A}_{2q-2\mu}k^{2q-2\mu} + \ldots + \overset{2m}{A}_{2q}k^{2q},$$

où les coëfficients $\overset{2m}{A}$ sont des fonctions de n seul, on aura

$$A'_{2m}k^{2m} = [\overset{2m}{A}_0 k^{2q} + \overset{2m}{A}_2 k^{2q-2} + \ldots + \overset{2m}{A}_{2\mu}k^{2q-2\mu} + \ldots + \overset{2m}{A}_{2q-2\mu}k^{2\mu}$$
$$+ \ldots + \overset{2m}{A}_{2q}]k^{2m-2q},$$

et l'égalité de ces deux polynomes exige que l'on ait 1° $2m-2q=0$ ou $m=q$, et 2°

$$\overset{2m}{A}_{2\mu} = \overset{2m}{A}_{2m-2\mu},$$

de sorte que l'on a

$$A_{2m} = \overset{2m}{A}_0(1+k^{2m}) + \overset{2m}{A}_2(1+k^{2m-4})k^2 + \ldots + \overset{2m}{A}_{2\mu}(1+k^{2m-4\mu})k^{2\mu}$$
$$+ \ldots + \begin{cases} \overset{2m}{A}_m k^m \\ \overset{2m}{A}_{m-1}(1+k^2)k^{m-1} \end{cases},$$

où le dernier terme sera le supérieur si m est pair, et l'inférieur si m est impair.

Dans le polynome $\varphi(x.k)$ le coëfficient A_{2m} est multiplié par k^{2p-2m}; ce produit contiendra donc le terme

$$\overset{2m}{A}_{2\mu}(1+k^{2m-4\mu})k^{2p+2\mu-2m},$$

mais, φ ainsi que F ne contenant que des puissances positives (et paires) de k, on devra avoir $2p+2\mu-2m=$ ou >0, c'est-à-dire $\mu=$ ou $>m-p$, donc si $m<p$ on peut admettre les valeurs de μ, $\mu=0$, $\mu=1$, $\mu=2$, etc., mais quand $m>p$, la plus petite valeur de μ sera $\mu=m-p$, et dans ce cas l'on aura

$$A_{2m}=A(1+k^{4p-2m})k^{2m-2\mu}+\ldots+\left\{\begin{matrix} A_m k^m \\ A_{m-1}(1+k^2)k^{m-1} \end{matrix}\right.,$$

ou, écrivant $2p-m$ au lieu de m,

$$A_{4p-2m}=[\overset{4p-2m}{A_0}(1+k^{2m})+\overset{4p-2m}{A_2}(1+k^{2m-4})k^2$$

$$+\ldots+\left\{\begin{matrix} \overset{4p-2m}{A_m}\,k^m \\ \overset{4p-2m}{A_{m-1}}\,(1+k^2)k^{m-1} \end{matrix}\right.]k^{2p-2m}$$

où maintenant $m<p$.

De même on aura

$$Z_{2m}=\overset{2m}{Z_0}(1+k^{2m})+\overset{2m}{Z_2}(1+k^{2m-4})k^2+\ldots+\left\{\begin{matrix} \overset{2m}{Z_m}k^m \\ \overset{2m}{Z_{m-1}}(1+k^2)k^{m-1}, \end{matrix}\right. \quad (m<p)$$

$$Z_{4p-2m}=[\overset{4p-2m}{Z_0}(1+k^{2m})+\overset{4p-2m}{Z_2}(1+k^{2m-4})k^2+\ldots]k^{2p-2m}.$$

On a encore, écrivant $\sqrt{(1-y^2)}$, $\sqrt{(1-k^2y^2)}, \ldots$ au lieu de Cos. amp. nu, Δ amp. $nu, \ldots$

(4)

$$\sqrt{(1-k^2y^2)}=\frac{\pi(x.k)}{\varphi(x.k)}\sqrt{(1-k^2x^2)}, \quad \sqrt{(1-y^2)}=\frac{\pi'(x.k)}{\varphi(x.k)}\sqrt{(1-x^2)},$$

où π et π' sont, comme F et φ, des fonctions rationnelles entières et paires de x et de k, et par rapport à x du même dégré $n^2-1=4p$.

Si dans ces formules l'on change u en $u+iK'$, x devient $\frac{1}{kx}$, et parce que l'on a

$$\Delta\,\mathrm{amp.}(u+iK')=\frac{\mathrm{Cos.amp.}u}{i\,\mathrm{Sin.amp.}u},\quad \mathrm{Cos.amp.}(u+iK')=\frac{\Delta.\mathrm{amp.}u}{ik\,\mathrm{Sin.amp.}u},$$

et, n étant impair,

$$\Delta.\mathrm{amp.}(nu+niK')=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Delta.\mathrm{amp.}(nu+iK')=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{\mathrm{Cos.amp.}nu}{i\mathrm{Sin.amp.}nu},$$

$$\mathrm{Cos.amp.}(nu+niK')=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{Cos.amp.}(nu+iK')$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{\Delta.\mathrm{amp.}nu}{ik\,\mathrm{Sin.amp.}nu},$$

on voit, qu'il faut changer alors:

$$\sqrt{(1-k^2x^2)}\text{ en }\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{ikx},\qquad \sqrt{(1-x^2)}\text{ en }\frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{ikx},$$

$$\sqrt{(1-k^2y^2)}\text{ en }(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{iky},\quad \sqrt{(1-y^2)}\text{ en }(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sqrt{(1-k^2y^2)}}{iky},$$

de sorte que par là elles deviennent, après réduction,

$$\sqrt{(1-y^2)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{y}{x}\frac{\pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)}{\varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right)}\sqrt{(1-x^2)},$$

$$\sqrt{(1-k^2y^2)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{y}{x}\frac{\pi'\left(\frac{1}{kx}.k\right)}{\varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right)}\sqrt{(1-k^2x^2)},$$

où, substituant à y sa valeur (1) et ayant égard aux relations (2),

$$\sqrt{(1-y^2)}=\frac{\pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p}}{\varphi(x.k)}\sqrt{(1-x^2)},$$

$$\sqrt{(1-k^2y^2)}=\frac{\pi'\left(\frac{1}{kx}.k\right)}{\varphi(x.k)}\sqrt{(1-k^2x^2)},$$

ce qui, par la comparaison de celles-ci avec celles dont elles ont été déduites, donne

$$\pi(x.k)=\pi'\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p},\quad \pi'(x.k)=\pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p}.$$

Si dans (4) on change u et k en ku et $\frac{1}{k}$, il faut y écrire kx et ky à la place de x et y, ce qui donne

$$\sqrt{(1-y^2)}=\frac{\pi(kx.\frac{1}{k})}{\varphi(kx.\frac{1}{k})}\sqrt{(1-x^2)},\quad \sqrt{(1-k^2y^2)}=\frac{\pi'(kx.\frac{1}{k})}{\varphi(kx.\frac{1}{k})}\sqrt{(1-k^2x^2)},$$

donc, parce que $\varphi(kx.\frac{1}{k})=\varphi(x.k)$,

$$\pi(kx.\frac{1}{k})=\pi'(x.k),\quad \pi'(kx.\frac{1}{k})=\pi(x.k),$$

il s'en suit encore

$$\pi(kx.\frac{1}{k})=\pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p},\quad \pi'(kx.\frac{1}{k})=\pi'\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p}.$$

Posant

$$\pi(x.k)=B_0+B_2x^2+....+B_{2m}x^{2m}+....+B_{4p-2m}x^{4p-2m}+....+B_{4p}x^{4p}$$

on a, désignant par B' ce que devient B lorsqu'on y change k en $\frac{1}{k}$,

$$\pi(kx.\frac{1}{k})=B_0'+B_2'k^2x^2+....+B'_{2m}k^{2m}x^{2m}+....$$
$$....+B'_{4p-2m}k^{4p-2m}x^{4p-2m}+....+B'_{4p}k^{4p}x^{4p},$$

$$\pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p}=B_{4p}k^{-2p}+B_{4p-2}k^{-(2p-2)}x^2+....$$
$$...+B_{4p-2m}k^{-(2p-2m)}x^{2m}+...+B_{2m}k^{2p-2m}x^{4p-2m}+...+B_0k^{2p}x^{4p}$$

donc

$$B_{4p-2m}=B'_{2m}k^{2p},\quad B_{2m}=B'_{4p-2m}k^{2p},$$

ce qui, pour la valeur particulière $m=p$, donne $B_{2p}=B'_{2p}k^{2p}$; ainsi le coëfficient du milieu dans les polynomes π et π' sera de la même forme que les coëfficients A et Z de F et φ.

La forme générale des polynomes π et π' est donc

$$\pi(x.k)=B_0+B_2x^2+....+B_{2m}x^{2m}+....+B_{2p}x^{2p}+....$$
$$....+B_{2m}'k^{2p}x^{4p-2m}+....+B_0'k^{2p}x^{4p},$$

$$\pi'(x.k)=B_0'+B_2'k^2x^2+....+B_{2m}'k^{2m}x^{2m}+....+B_{2p}x^{2p}+....$$
$$....+B_{2m}k^{2p-2m}x^{4p-2m}+....+B_0k^{2p}x^{4p},$$

d'où il suit encore que B_{2m} sera par rapport à k tout-au-plus du dégré $2m$, parce qu'autrement $B'_{2m}k^{2m}$, et par conséquent π' contiendrait des puissances négatives de k; posant

$$B_{2m} = \overset{2m}{B}_0 + \overset{2m}{B}_2 k^2 + \ldots + \overset{2m}{B}_{2m} k^{2m},$$

on aura

$$B'_{2m} k^{2m} = \overset{2m}{B}_{2m} + \overset{2m}{B}_{2m-2} k^2 + \ldots + \overset{2m}{B}_0 k^{2m}$$

où les coëfficients $\overset{2m}{B}$ sont des fonctions de n seul. Remarquant que $x=0$ donne $y=0$, et que $\varphi(0.k)=1$, on voit que $\pi(0.k) = \pi'(0.k) = 1$, et par conséquent $B_0 = B_0' = 1$.

Substituant dans l'équation différentielle (3) à x et y les valeurs

$$x = \frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}} = \xi', \quad y = \frac{\eta\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\eta^2)}}$$

elle se réduit à

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k_1{}^2\eta^2)}} = \frac{nd\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k_1{}^2\xi^2)}}, \quad \ldots (5)$$

où $k_1{}^2 = 1 - k^2$; donc on aura, en substituant les mêmes valeurs dans les intégrales (1) et (4):

$$\frac{\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)}} = \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \frac{F(\xi'.k)}{\varphi(\xi'.\eta)}, \quad \frac{\sqrt{(1-k_1{}^2\eta^2)}}{\sqrt{(1-\eta^2)}} = \frac{\pi(\xi'.k)}{\varphi(\xi'.k)} \frac{\sqrt{(1-k_1{}^2\xi^2)}}{\sqrt{(1-\xi^2)}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)}} = \frac{\pi'(\xi'.k)}{\varphi(\xi'.k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)}}$$

d'où l'on déduit

$$\eta = \xi \frac{F(\xi'.k)}{\varphi(\xi'.k)}, \quad \sqrt{(1-k_1{}^2\eta^2)} = \frac{\pi(\xi'.k)}{\pi'(\xi'.k)} \sqrt{(1-k_1{}^2\xi^2)},$$

$$\sqrt{(1-\eta^2)} = \frac{\varphi(\xi'.k)}{\pi'(\xi'.k)} \sqrt{(1-\xi^2)}.$$

Mais (5) étant de la même forme que (3), on a aussi

$$\eta = \xi . \frac{F(\xi.k_1)}{\varphi(\xi.k_1)}, \quad \sqrt{(1-k_1{}^2\eta^2)} = \frac{\pi(\xi.k_1)}{\varphi(\xi.k_1)} \sqrt{(1-k_1{}^2\xi^2)},$$

$$\sqrt{(1-\eta^2)} = \frac{\pi'(\xi.k_1)}{\varphi(\xi.k_1)} \sqrt{(1-\xi^2)}$$

de sorte que par la comparaison de ces deux groupes, après qu'on ait réduit les polynomes fractionnaires en ξ' à des polynomes

entiers, par la multiplication par $(1-\xi^2)^{2p}$, et écrivant pour ξ' sa valeur en ξ, on obtient

$$F(\xi.k_1)=F\left(\frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.k\right)(1-\xi^2)^{2p}, \quad \ldots \quad (6)$$

$$\varphi(\xi.k_1)=\pi'\left(\frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.k\right)(1-\xi^2)^{2p},$$

$$\pi'(\xi.k_1)=\varphi\left(\frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.k\right)(1-\xi^2)^{2p},$$

$$\pi(\xi.k_1)=\pi\left(\frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.k\right)(1-\xi^2)^{2p},$$

où l'on peut échanger k et k_1 entre-eux.

Par ces formules et les relations trouvées précédemment, l'on peut déduire les fonctions F, φ, π et π' de l'une quelconque d'entre-elles: $F(x.k)$ étant connue on a

$$\varphi(x.k)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}F\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p},$$

et par conséquent

$$\varphi\left(\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-x^2)}}.k\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}F\left(\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{kx\sqrt{-1}}.k\right)\frac{k^{2p}x^{4p}}{(1-x^2)^{2p}},$$

donc, par la troisième (6), échangeant k et k_1,

$$\pi'(x.k)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}F\left(\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{k_1x\sqrt{-1}}.k_1\right)k_1{}^{2p}x^{4p},$$

d'où, parce que $\pi'\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p}=\pi(x.k)$,

$$\pi(x.k)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}F\left(\frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{k_1}.k_1\right)k_1{}^{2p}k^{-2p};$$

échangeant dans celle-ci k et k_1, elle donne

$$\pi\left(\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-x^2)}}.k_1\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}F\left(\frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{k\sqrt{(1-x^2)}}.k\right)k^{2p}k_1{}^{-2p},$$

mais la première (6) donne

$$F\left(\frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{k_1}.k_1\right)=F\left(\frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{k\sqrt{(1-x^2)}}.k\right)k^{4p}k_1{}^{-4p}(1-x^2)^{2p},$$

d'où il suit, que les deux dernières expressions de

$$\pi(x.k) \text{ et } \pi\left(\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-x^2)}}.k_1\right)$$

sont identiquement égales si l'on multiplie la seconde par $(1-x^2)^{2p}$, et ce qui fait voir, que la quatrième des équations (6) est une conséquence des deux premières, et des relations trouvées précédemment.

La troisième des formules (6) donne, si l'on y change k en k_1, et désignant par Z' ce que devient alors le coëfficient Z de $\varphi(x.k)$,

$$\pi'(x.k) = Z'_0(1-x^2)^{2p} - Z'_2 x^2(1-x^2)^{2p-1} + \dots$$
$$\dots(-1)^m Z'_{2m} x^{2m}(1-x^2)^{2p-m} \dots (-1)^m Z'_{4p-2m} x^{4p-2m}(1-x^2)^m \dots$$

donc, notant les coëfficients d'une puissance q du binome de la manière suivante, savoir:

$$1 = \binom{q}{0}, \quad \frac{q}{1} = \binom{q}{1}, \quad \frac{q(q-1)}{1.2} = \binom{q}{2}, \dots$$
$$\frac{q(q-1)\dots(q-m+1)}{1.2\dots m} = \binom{q}{m} = \binom{q}{q-m};$$

on aura, pour les coëfficients B de π et π' exprimés par ceux de φ,

$$B'_{2m}k^{2m} \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$
$$= (-1)^m\left[\binom{2p}{m}Z'_0 + \binom{2p-1}{m-1}Z'_2 + \dots + \binom{2p-\mu}{m-\mu}Z'_{2\mu} + \dots + Z'_{2m}\right],$$
$$B_{2m}k^{2p-2m}$$
$$= (-1)^m\left[\binom{2p}{m}Z'_0 + \binom{2p-1}{m}Z_2' + \dots + \binom{2p-\mu}{m}Z'_{2\mu} + \dots + Z'_{4p-2m}\right];$$

réciproquement on trouvera, par la deuxième des formules (6),

$$(8)$$
$$Z'_{2m} = (-1)^m\left[\binom{2p}{m}B'_0 + \binom{2p-1}{m-1}B'_2k^2 + \dots + \binom{2p-\mu}{m-\mu}B'_{2m}k^{2\mu}\right.$$
$$\left. + \dots + B'_{2m}k^{2m}\right],$$
$$Z'_{4p-2m} = (-1)^m\left[\binom{2p}{m}B'_0 + \binom{2p-1}{m}B'_2k^2 + \binom{2p-\mu}{m}B'_{2\mu}k^{2\mu}\right.$$
$$\left. + \dots + \binom{p}{m}B_{2p}k^{2p} + \dots + B_{2m}k^{2p-2m}\right].$$

Si l'on met en évidence le multiplicateur n, en écrivant Sin.amp.$(nu.k) = y_n$, et de même Sin.amp.$2u = y_2$, la formule pour l'addition donne

$$y_{n\pm 2} = \frac{y_n \sqrt{(1-y_2^2)(1-k^2y_2^2)} \pm y_2 \sqrt{(1-y_n^2)(1-k^2y_n^2)}}{1-k^2y_2^2y_n^2},$$

et aussi

$$y_{n\pm 2} = \frac{y_n^2 - y_2^2}{y_n \sqrt{(1-y_2^2)(1-k^2y_2^2)} \mp y_2 \sqrt{(1-y_n^2)(1-k^2y_n^2)}};$$

par les formules pour la duplication l'on a

$$y_2 = \frac{F(2)}{\varphi(2)} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad \sqrt{(1-k^2y_2^2)} = \frac{\pi(2)}{\varphi(2)},$$

$$\sqrt{(1-y_2^2)} = \frac{\pi'(2)}{\varphi(2)},$$

où

$$F(2) = 2, \quad \varphi(2) = 1 - k^2x^4, \quad \pi(2) = 1 - 2k^2x^2 + k^2x^4,$$

$$\pi'(2) = 1 - 2x^2 + k^2x^4;$$

remarquant que $n \pm 2$ est impair, on pourra écrire, conformément à la notation indiquée,

$$y_n = x.\frac{F(n)}{\varphi(n)}, \quad y_{n\pm 2} = x.\frac{F(n\pm 2)}{\varphi(n\pm 2)}, \quad \sqrt{(1-k^2y_n^2)} = \frac{\pi(n)}{\varphi(n)}\sqrt{(1-k^2x^2)}\ldots;$$

substituant alors les formes générales de y_n, $y_{n\pm 2}$, etc. dans les deux formules pour l'addition, on obtient, après réduction,

$$\frac{F(n\pm 2)}{\varphi(n\pm 2)} = \frac{\pi(2)\,\pi'(2)\,F(n)\,\varphi(n) \pm (1-x^2)(1-k^2x^2)\,F(2)\,\varphi(2)\,\pi(n)\,\pi'(n)}{\varphi^2(2)\,\varphi^2(n) - k^2x^4(1-x^2)(1-k^2x^2)\,F^2(2)\,F^2(n)}$$

et

$$\frac{F(n\pm 2)}{\varphi(n\pm 2)} = \frac{\varphi^2(2)\,F^2(n) - (1-x^2)(1-k^2x^2)\,F^2(2)\,\varphi^2(n)}{\pi(2)\,\pi'(2)\,F(n)\,\varphi(n) \mp (1-x^2)(1-k^2x^2)\,F(2)\,\varphi(2)\,\pi(n)\,\pi'(n)}.$$

Dans ces identités les deux termes de la fraction au second membre sont par rapport à x du dégré $2(n^2-1)+8 = 2n^2+6$, et ceux de la fraction au premier membre seulement du dégré $(n\pm 2)^2 - 1 = n^2 \pm 4n + 3$; il faut donc que les premiers aient un diviseur commun du dégré $n^2 \mp 4n + 3$, c'est-à-dire du dégré de $F(n\mp 2)$ ou $\varphi(n\mp 2)$. Remarquant ceci il devient probable, que l'unique dénominateur au second membre de la première et l'unique numérateur dans celui de la seconde soient respectivement égaux aux produits $\varphi(n-2)\,\varphi(n+2)$ et $F(n-2)\,F(n+2)$, et que le numérateur au second membre de la première soit alors $\varphi(n\mp 2)\,\pi(n\pm 2)$. On peut s'en assurer, si l'on écrit, au lieu des deux formules en question, les quatres suivantes, qui y sont contenues, savoir:

$$\frac{F(n+2)}{\varphi(n+2)}=\frac{A}{B},\quad \frac{F(n-2)}{\varphi(n-2)}=\frac{A'}{B},$$

$$\frac{F(n+2)}{\varphi(n+2)}=\frac{B'}{A'},\quad \frac{F(n-2)}{\varphi(n-2)}=\frac{B'}{A}$$

où il est facile de voir ce que désignent A, B, A' et B', on en déduit

$$\frac{F(n+2)\,\varphi(n-2)}{\varphi(n+2)\,F(n-2)}=\frac{A}{A'},\quad \frac{F(n+2)\,F(n-2)}{\varphi(n+2)\,\varphi(n-2)}=\frac{B'}{B},$$

où tous les termes des fractions sont du même dégré $2n^2+6$; donc, si α et β sont deux facteurs indépendants de x, on devra avoir

$$F(n+2)\,\varphi(n-2)=\alpha A,\quad F(n+2)\,F(n-2)=\beta B',$$

$$\varphi(n+2)\,\pi(n-2)=\alpha A',\quad \varphi(n+2)\,\varphi(n-2)=\beta B,$$

faisant dans celles-ci $x=0$, ce qui donne $F(n\pm 2)=n\pm 2$, $\varphi(n\pm 2)=1$, $F(n)=n$, $\varphi(n)=1$, $\pi'(n)=\pi(n)=1$, tandisque l'on trouve $A=n+2$, $A'=n-2$, $B=1$, $B'=n^2-4$, on obtient $\alpha=\beta=1$, de sorte qu'en écrivant pour A etc. leurs valeurs on aura

(9)

$$F(n-2)\,F(n+2)=\varphi^2(2)\,F^2(n)-(1-x^2)(1-k^2x^2)\,F^2(2)\,\varphi^2(n),$$

$$\varphi(n-2)\,\varphi(n+2)=\varphi^2(2)\,\varphi^2(n)-k^2x^4(1-x^2)(1-k^2x^4)\,F^2(2)\,\pi^2(n),$$

$$\varphi(n\mp 2)\,F(n\pm 2)=\pi(2)\,\pi'(2)\,F(n)\,\varphi(n)$$
$$\pm(1-x^2)(1-k^2x^2)\,F(2)\,\varphi(2)\,\pi(n)\,\pi'(n).$$

On a encore, par le théorème pour l'addition,

$$\sqrt{(1-k^2y^2_{n\pm 2})}=\frac{\sqrt{(1-k^2y_n^2)}\sqrt{(1-k^2y_2^2)}\mp k^2y_ny_2\sqrt{(1-y_n^2)}\sqrt{(1-y_2^2)}}{1-k^2y_n^2y_2^2}$$

et aussi

$$\sqrt{(1-k^2y^2_{n\pm 2})}=\frac{y_n\sqrt{(1-k^2y_n^2)}\sqrt{(1-y_2^2)}\mp y_2\sqrt{(1-k^2y_2^2)}\sqrt{(1-y_n^2)}}{y_n\sqrt{(1-y_2^2)}(1-k^2y_2^2)\mp y_2\sqrt{(1-y_n^2)}(1-k^2y_n^2)},$$

d'où l'on déduit, de la même manière,

(10)

$$\varphi(n\mp 2)\,\pi(n\pm 2)=\varphi(2)\,\pi(2)\,\varphi(n)\,\pi(n)\mp k^2x^2(1-x^2)\,F(2)\,\pi'(2)\,F(n)\,\pi'(n),$$

$$F(n\mp 2)\,\pi(n\pm 2)=\varphi(2)\,\pi'(2)\,F(n)\,\pi(n)\mp(1-x^2)\,F(2)\,\pi(2)\,\varphi(n)\,\pi'(n),$$

tandis que les formules

$$\sqrt{(1-y_{n\pm2}^2)}=\frac{\sqrt{(1-y_n^2)}\sqrt{(1-y_2^2)}\mp y_n y_2\sqrt{(1-k^2y_n^2)(1-k^2y_2^2)}}{1-k^2y_n^2y_2^2},$$

$$\sqrt{(1-y_{n\pm2}^2)}=\frac{y_n\sqrt{(1-y_n^2)}\sqrt{(1-k^2y_2^2)}\mp y_2\sqrt{(1-y_n^2)}\sqrt{(1-y_2^2)}}{y_n\sqrt{(1-y_2^2)}(1-k^2y_2^2)\mp y_2\sqrt{(1-y_n^2)}(1-k^2y_n^2)},$$

donnent encore:

(11)

$$\varphi(n\mp2)\,\pi'(n\pm2)=\varphi(2)\,\pi'(2)\,\varphi(n)\,\pi'(n)\mp x^2(1-k^2x^2)\,F(2)\,\pi(2)\,F(n)\,\pi(n),$$

$$F(n\mp2)\,\pi'(n\pm2)=\varphi(2)\,\pi(2)\,F(n)\,\pi'(n)\mp(1-k^2x^2)\,\pi(2)\,\pi'(2)\,\varphi(n)\,\pi(n).$$

Parceque Sin. amp. $(-nu)=-n$ Sin. amp. u, on aura $\frac{F(-n)}{\varphi(-n)}=-\frac{F(n)}{\varphi(n)}$, donc: $F(-n)=-\alpha F(n)$, $\varphi(-n)=\alpha\varphi(n)$, α étant un facteur indépendant de x, pour lequel on trouve, faisant $x=0$, $\alpha=1$, ainsi

$$F(-n)=-F(n),\quad \varphi(-n)=\varphi(n),$$

et de la même manière l'on obtiendra

$$\pi(-n)=\pi(n),\quad \pi'(-n)=\pi(n),$$

par conséquent les coëfficients A de F changeront de signe en même temps que le multiplicateur n, mais ceux de φ, π et π' ne le feront pas. Si $n=1$ on a, quelque soit x, $y=x$, ce qui conduira à

$$F(\pm1)=\pm1,\quad \varphi(\pm1)=1,\quad \pi(\pm1)=1,\quad \pi'(\pm1)=1;$$

ayant égard à ces remarques la première des équations (9) donnera, par exemple,

$$\begin{aligned}F(3)&=-\varphi^2(2)+(1-x^2)(1-k^2x^2)F^2(2),\\&=-(1-k^2x^4)^2+4(1-x^2)(1-k^2x^2),\\&=3-4(1+k^2)x^2+6k^2x^4-k^4x^8.\end{aligned}$$

A l'aide des formules précédentes on peut facilement déterminer les fonctions F, φ etc. pour les valeurs particulières de k, $k=0$ et $k=1$. Si l'on fait $k=0$, l'équation différentielle (3) devient $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}=\frac{ndx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, et donne, y s'évanouissant avec x,

$$\text{Arc}[\text{Sin}=y]=n\,\text{Arc}[\text{Sin}=x],$$

ou

$$y=\text{Sin}[n\,\text{Arc. Sin}=x],\quad \sqrt{(1-y^2)}=\text{Cos}[n\,\text{Arc. Sin}=x];$$

faisant aussi $k=0$ dans les formes générales de y, $\sqrt{(1-y^2)}$ et $\sqrt{(1-k^2y^2)}$, on a

$$y=x.\frac{F(x.0)}{\varphi(x.0)},\quad \sqrt{(1-y^2)}=\frac{\pi'(x.0)}{\varphi(x.0)}\sqrt{(1-x^2)},\quad 1=\frac{\pi(x.0)}{\varphi(x.0)},$$

donc, $\pi(x.0)=\varphi(x.0)$, et

$$\frac{F(x.0)}{\varphi(x.0)}=\frac{\operatorname{Sin}[n\operatorname{Arc.Sin}=x]}{x},\quad \frac{\pi'(x.0)}{\varphi(x.0)}=\frac{\operatorname{Cos}[n\operatorname{Arc.Sin}=x]}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

la deuxième des formules (9) donne, si l'on y fait $k=0$,

$$\varphi(n+2)\,\varphi(n-2)=\varphi^2(n)$$

d'où successivement

$$\varphi(n)\,\varphi(n-4)=\varphi^2(n-2),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\varphi(3)\,\varphi(-1)\;=\varphi^2(1),$$

dont le produit donne

$$\varphi(n)\,\varphi(-1)=\varphi(n-2)\,\varphi(1)$$

d'où

$$\varphi(n)=\varphi(n-2)=\varphi(n-4)=\ldots\ldots=\varphi(1)=1;$$

ainsi l'on aura, d'après des formules connues,

$$F(x.0)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(12)$$

$$=n-\frac{n(n^2-1)}{2.3}x^2+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}x^4-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7}x^6+\ldots,$$

$$\pi'(x.0)$$

$$=1-\frac{n^2-1}{1.2}x^2+\frac{(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4}x^4-\frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6}x^6+\ldots,$$

tandisque l'on a $\varphi(x.0)=\pi(x.0)=1$.

Si l'on fait $k=1$, l'équation différentielle (3) devient

$$\frac{dy}{1-y^2}=\frac{ndx}{1-x^2},$$

et donne

$$y=\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n},\quad \sqrt{(1-y^2)}=\frac{2(1-x^2)^{\frac{n}{2}}}{(1+x)^n+(1-x)^n}$$

donc, on doit avoir

$$x \cdot \frac{F(x.1)}{\varphi(x.1)} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}, \quad \frac{\pi'(x.1)}{\varphi(x.1)} = \frac{2(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(1+x)^n + (1-x)^n},$$

et par conséquent on peut poser

$$F(x.1) = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{2x} X(n), \quad \varphi(x.1) = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2} X(n),$$

où X désigne un polynome en x et n, que l'on déterminera en faisant aussi $k=1$ dans la première équation (9), ce qui donne

$$F(n-2)\, F(n+2) = (1-x^4)^2 F^2(n) - 4(1-x^2)^2 \varphi^2(n),$$

ou, après la substitution des valeurs supposées de F et φ, et réduisant,

$$X(n-2)\, X(n+2) = (1-x^2)^4 X^2(n),$$

d'où l'on déduit successivement

$$X(n-4)\, X(n) = (1-x^2)^4 X^2(n-2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X(-1)\, X(3) = (1-x^2)^4 X^2(1).$$

Le produit de ces $\frac{n-1}{2}$ équations donne

$$X(-1)\, X(n) = (1-x^2)^{2(n-1)} X(n-2)\, X(1),$$

mais l'on trouve

$$X(1) = 1, \quad X(-1) = (1-x^2),$$

donc, on aura successivement

$$X(n) = (1-x^2)^{2n-3} X(n-2),$$

$$X(n-2) = (1-x^2)^{2n-7} X(n-4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X(3) = (1-x^2)^3 X(1)$$

et le produit de ces $\frac{n-1}{2}$ équations donne

$$X(n) = (1-x^2)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

de sorte que l'on a

$$F(x.1) = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{2x} (1-x^2)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad \ldots \quad (13)$$

$$\varphi(x.1) = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2} (1-x^2)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad \pi'(x.1) = (1-x^2)^{\frac{n^2-1}{2}}.$$

et

$$\pi(x.1) = \pi'(x.1).$$

On peut aussi obtenir les valeurs générales de F, φ, π et π' pour les valeurs particulières de x, $x=1$, $x=\frac{1}{k}$ et $x=\frac{1}{\sqrt{\pm k}}$.

La première des équations (6) donne, si l'on y change k en k_1, A' désignant ce que devient alors A,

$$F(x.k) = A_0'(1-x^2)^{2p} - A_2'x^2(1-x^2)^{2p-1} + \ldots + A'_{4p}x^{4p},$$

d'où aussi, changeant x en kx et k en $\frac{1}{k}$, A'' désignant ce que devient alors A',

$$F(kx.\tfrac{1}{k}) = F(x.k) = A_0''(1-k^2x^2)^{2p} - A''k^2x^2(1-k^2x^2)^{2p-1} + \ldots + A_{4p}''k^{4p}x^{4p},$$

donc, on aura

$$F(1.k) = A_{4p}', \quad F\left(\frac{1}{k}.k\right) = A_{4p}'',$$

mais la valeur trouvée pour A_{4p} donne

$$A_{4p}' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k_1^{2p} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1-k^2)^{\frac{n^2-1}{4}},$$

$$A_{4p}'' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1-\frac{1}{k^2})^{\frac{n^2-1}{4}},$$

on obtiendra ainsi les premières formules des deux premières colonnes (14) ci-dessous, dont les autres se déduisent d'une manière analogue des équations (6) et des relations trouvées dans ce qui précède.

On peut aussi déduire ces résultats des équations (9) etc., comme il suit ici pour les valeurs particulières $x=\frac{1}{\sqrt{\pm k}}$. Alors on a $\varphi(2)=0$, de sorte que la première (9) dévient

$$F(n-2)\,F(n+2) = \frac{4(1\mp k)^2}{\pm k}\varphi^2(n),$$

mais la relation générale entre F et φ donne dans ce cas particulier $\varphi^2(n) = F^2(n)$, donc, posant

$$\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{\pm k}} = \alpha,$$

on aura

$$F(n-2)\,F(n+2)=\alpha^2 F^2(n),$$

d'où l'on déduit, diminuant n successivement de deux unités, et multipliant les $\frac{n+1}{2}$ équations ainsi obtenues,

$$F(-1)\,F(n+2)=\alpha^{n+1}F(n)\,F(1)$$

ou

$$\begin{aligned}
F(n+2) &= -\alpha^{n+1}F(n),\\
F(n) &= -\alpha^{n-1}F(n-2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(3) &= -\alpha^2F(1)=-\alpha^2
\end{aligned}$$

et, multipliant les $\frac{n-1}{2}$ dernières équations,

$$F(n)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\alpha^{\frac{n^2-1}{4}};$$

d'où

$$\varphi(n)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}F(n)=\alpha^{\frac{n^2-1}{4}},$$

ce qui donne les deux premières formules de la troisième colonne (14).

Faisant dans la première (11) $x=\sqrt{\frac{1}{\pm k}}$, elle donne

$$\varphi(n-2)\,\pi'(n+2)=-\varphi(n+2)\,\pi'(n-2),$$

ou, diminuant n de deux unités, et substituant alors pour $\varphi(n)$ et $\varphi(n-4)$ leurs valeurs, données par les formules ci-dessus,

$$\pi'(n)=-\alpha^{2n-4}\pi'(n-4),$$

où il y a deux cas à observer; 1° si n est de la forme $4m+1$, on obtient, diminuant n successivement de quatre unités, $\frac{n-1}{4}$ équations, dont la derniere est

$$\pi'(5)=-\alpha\pi'(1)=-\alpha^6,$$

le produit de ces équations donne

$$\pi'(n)=(-1)^{\frac{n-1}{4}}\alpha^{\frac{n^2-1}{4}};$$

2° si n est de la forme $4m+3$, on en obtient, de la même manière, $\frac{n+1}{4}$ équations, dont la dernière est

$$\pi'(3) = -\alpha^2\pi'(1) = -\alpha^3,$$

leur produit donne alors

$$\pi'(n) = (-1)^{\frac{n+1}{4}} \alpha^{\frac{n^2-1}{4}};$$

tandisque l'on a, pour cette valeur particulière de x, $\pi(n) = \pi'(n)$.

Par ce qui précède on obtient les formules suivantes:

(14)

$$F(1.k) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-k^2)^{\frac{n^2-1}{4}}, \quad F\left(\frac{1}{k}.k\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{n^2-1}{4}},$$

$$\varphi(1.k) = (1-k^2)^{\frac{n^2-1}{4}}, \quad \varphi\left(\frac{1}{k}.k\right) = \left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{n^2-1}{4}},$$

$$\pi'(1.k) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n(1-k^2)^{\frac{n^2-1}{4}}, \quad \pi'\left(\frac{1}{k}.k\right) = \left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{n^2-1}{4}},$$

$$\pi(1.k) = (1-k^2)^{\frac{n^2-1}{4}}, \quad \pi\left(\frac{1}{k}.k\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{n^2-1}{4}};$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{\pm k}}\right]^{\frac{n^2-1}{4}},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right) = \left[\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{\pm k}}\right]^{\frac{n^2-1}{4}},$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi'\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right)\\[2ex] \pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right)\end{array}\right\} = \left(\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{\pm k}}\right)^{\frac{n^2-1}{4}}.(-1)^{\frac{n\mp1}{4}}.$$

$\left(\frac{n\mp1}{4}\right.$ suivant que n est de la forme $\left.4m\pm1\right)$.

La première des équations (6) donne entre les coëfficients A, dont on connait déjà la forme, une relation, au moyen de la quelle on peut déterminer entièrement quelques-uns de ces coëfficients, mais elle ne suffit pas pour les déterminer tous. Remarquant premièrement que, pour $k=0$, le coëfficient A_{2m} se réduit à $\overset{2m}{A}_0$ seul, la valeur de $F(x.0)$ (12) fait voir que l'on aura généralement

$$\overset{2m}{A_0}=(-1)^m\frac{n(n^2-1)(n^2-9)....(n^2-(2m-1)^2)}{2.3.4.5....2m(2m+1)},$$

et $\overset{2m}{A_0}=0$, lorsque $n=2m-1$ ou $m=\frac{n+1}{2}$; ainsi à partir de $\overset{n+1}{A_0}$, tous les premiers coëfficients $\overset{2m}{A_0}$ s'évanouissent, et comme on a, par A_{4p-2m}, $A_{4p-2}=\overset{4p-2}{A_0}(1+k^2)k^{2p-2}$, tandis que $4p-2=n^2-3$ est toujours plus grand que $n+1$ quand $n=$ ou >3, il s'en suit que l'on aura pour toutes les valeurs (impaires) de n

$$A_{4p-2}=0 \text{ et aussi } Z_2=0.$$

En vertu de la première (6) le polynome

$$A_0'+A_2'x^2+....+A'_{2m}x^{2m}+....+A'_{4p-2m}x^{4p-2m}+....+A'_{4p}x^{4p},$$

où A' désigne encore ce que devient A lorsqu'on y change k en k_1, doit être identiquement égal à

$$A_0(1-x^2)^{2p}-A_2x^2(1-x^2)^{2p-1}+....(-1)^mA_{2m}x^{2m}(1-x^2)^{2p-m}$$
$$+....(-1)^mA_{4p-2m}x^{4p-2m}(1-x^2)^m+....+A_{4p}x^{4p},$$

ce qui donne, en égalisant les coëfficients de x^{2m} et ceux de x^{4p-2m} dans les deux polynomes, et notant les coëfficients du développement du binome comme il a été indiqué précédemment,

(15)

$$\binom{2p}{m}A_0+\binom{2p-1}{m-1}A_2+....+\binom{2p-\mu}{m-\mu}A_{2\mu}+....$$
$$....+\binom{2p-m+1}{1}A_{2m-2}+A_{2m}=(-1)^mA'_{2m},$$

$$\binom{2p}{m}A_0+\binom{2p-1}{m}A_2+....+\binom{2p-\mu}{m}A_{2\mu}+....$$
$$....+\binom{m+1}{m}A_{4p-2m-2}+A_{4p-2m}=(-1)A'_{4p-2m},$$

dont la seconde se déduit de la première en écrivant dans celle-ci $2p-m$ à la place de m, et remarquant que l'on a

$$\binom{2p-\mu}{2p-m-\mu}=\binom{2p-\mu}{m}.$$

Si dans (15) on fait $m=0$, elle donne $A_0=A_0'$, ce qui laisserait A indéterminé, mais l'on sait d'ailleurs que l'on a $A_0=n$.

Faisant $m=1$, on a

$$\binom{2p}{1}A_0 + A_2 = -A_2',$$

mais

$$A_2 = \overset{2}{A}_0(1+k^2) \quad \text{et} \quad 2p = \frac{n^2-1}{2},$$

donc

$$\frac{n^2-1}{2}.n + \overset{2}{A}_0(1+k^2) = -\overset{2}{A}_0(2-k^2),$$

ce qui se réduit à

$$\frac{n(n^2-1)}{2} = -3\overset{2}{A}_0,$$

et ce qui donnera pour A_2 la valeur ci-après (17), qui s'accorde avec celle donnée par $\overset{2m}{A}_0$.

Faisant $m=2$, on a

$$\binom{2p}{2}A_0 + \binom{2p-1}{1}A_2 + A_4 = A_4',$$

mais

$$A_4 = \overset{4}{A}_0(1+k^4) + \overset{4}{A}_2 k^2,$$

d'où

$$A_4' = \overset{4}{A}_0(2-2k^2+k^4) + \overset{4}{A}_2(1-k^2),$$

donc

$$\frac{2p(2p-1)}{1.2}A_0 + \frac{2p-1}{1}A_2 = (\overset{4}{A}_0 + \overset{4}{A}_2)(1-2k^2);$$

le premier membre de celle-ci doit avoir le facteur $1-2k^2$, après qu'on y aura porté les valeurs de A_0, A_2 et p, ce qui en effet donne

$$\frac{n(n^2-1)(n^2-3)}{2.3.4} = \overset{4}{A}_0 + \overset{4}{A}_2,$$

qui serait insuffisante pour déterminer les deux inconnues, si $\overset{2m}{A}_0$ ne donnait pas

$$\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5} = \overset{4}{A}_0,$$

de sorte que l'on trouve

$$\overset{4}{A}_2 = \frac{n(n^2-1)}{2.3.4.5}2(2n^2-3),$$

et la valeur de A_4 (17) s'en suit.

Faisant $m=3$, on a

$$\binom{2p}{3}A_0+\binom{2p-1}{2}A_2+\binom{2p-2}{1}A_4=-(A_6'+A_6),$$

mais

$$A_6=\overset{6}{A}_0(1+k^6)+\overset{6}{A}_2(1+k^2)k^2$$

et

$$A_6'=\overset{6}{A}_0(2-3k^2+3k^4-k^6)+\overset{6}{A}_2(2-3k^2+k^4),$$

d'où

$$-(A_6'+A_6)=-(1-k^2+k^4)(3\overset{6}{A}_0+2\overset{6}{A}_2),$$

ce qui fait voir que le premier membre de l'équation précédente doit aussi avoir le facteur $1-k^2+k^4$; en effet on obtient ainsi la seule équation

$$3\overset{6}{A}_0+2\overset{6}{A}_2=-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-5)}{2.3.4.5.2},$$

qui ne suffirait pas pour déterminer les deux inconnues, si $\overset{2m}{A}_0$ ne donnait

$$3\overset{6}{A}_0=-3\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7},$$

de sorte que l'on trouve

$$\overset{6}{A}_2=-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5.6.7}3(3n^2-5),$$

et la valeur de A_6 (17) s'en suit.

Faisant $m=4$, on a

$$\binom{2p}{4}A_0+\binom{2p-1}{3}A_2+\binom{2p-2}{2}A_4+\binom{2p-3}{1}A_6=A_8'-A_8,$$

et

$$A_8'-A_8=\overset{8}{A}_0(1-4k^2+6k^4-4k^6)+\overset{8}{A}_2(2-5k^2+3k^4-2k^6)+\overset{8}{A}_4(1-2k^2)$$

$$=[\overset{8}{A}_0(1-2k^2+2k^4)+\overset{8}{A}_2(2-k^2+k^4)+\overset{8}{A}_4](1-2k^2);$$

ainsi le premier membre de l'équation précédente sera divisible par $1-2k^2$, et ensuite on aura, pour déterminer les $\overset{8}{A}$, trois équations, dont les premiers membres seront $\overset{8}{A}_0+2\overset{8}{A}_2+\overset{8}{A}_4=\dots,$

$-2\overset{8}{A}_0 - \overset{8}{A}_2 = \dots.$ et $2\overset{8}{A}_0 + \overset{8}{A}_2 = \dots.$, qui, comme l'on voit, n'équivaleront qu'à deux distinctes, que l'on obtiendra aussi, en égalisant les coëfficients de k^0 et k^4 dans les deux membres de la précédente équation, ce qui donne

$$\overset{8}{A}_0 + 2\overset{8}{A}_2 + \overset{8}{A}_4 = \binom{2p}{4} A_0 + \binom{2p-1}{3} \overset{2}{A}_0 + \binom{2p-2}{2} \overset{4}{A}_0 + \binom{2p-3}{1} \overset{6}{A}_0,$$

$$6\overset{8}{A} + 3\overset{8}{A}_2 = \binom{2p-2}{2} \overset{4}{A}_0 + \binom{2p-3}{1} \overset{6}{A}_2;$$

la seconde devient, après la réduction,

$$6\overset{8}{A}_0 + 3\overset{8}{A}_2 = \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2^6.3.5.7}(n^2-7),$$

et $\overset{2m}{A}_0$ donnant

$$6\overset{8}{A}_0 = \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)(n^2-49)}{2^6.3^3.5.7},$$

on trouve

$$\overset{8}{A}_2 = \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2^7.3^4.5.7} 4(4n^2-7);$$

la première devient, après la substitution,

$$\overset{8}{A}_0 + 2\overset{8}{A}_2 + \overset{8}{A}_4 = \frac{n(n^2-1)(n^2-7)}{2^7.3^2.5.7}(3n^4 - 172n^2 + 465);$$

l'on trouvera

$$\overset{8}{A}_0 + 2\overset{8}{A}_2 = \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2^7.3^3.5.7}(11n^2-35),$$

d'où, par la subtraction,

$$\overset{8}{A}_4 = -\frac{n(n^2-1)}{2^6.3^3.5.7}(n^6 + 85n^4 - 671n^2 + 945)$$

et la valeur totale de A_8 (17) s'en suit.

Faisant $m=5$, on a

$$\binom{2p}{5} A_0 + \binom{2p-1}{4} A_2 + \binom{2p-2}{3} A_4 + \binom{2p-3}{2} A_6 + \binom{2p-4}{1} A_8$$

$$= -(A'_{10} + A_{10})$$

et

$$-(A'_{10} + A_{10}) = \overset{10}{A}_0(3 - 5k^2 + 10k^4 - 10k^6 + 5k^8)$$

$$+ \overset{10}{A}_2(2 - 4k^2 + 6k^4 - 4k^6 + 2k^8) + \overset{10}{A}_4(2 - 5k^2 + 5k^4);$$

ainsi l'on aurait entre les trois $\overset{10}{A}$ cinq équations, dont les premiers membres seraient:

$$5A_0+2A_2+2A_4=$$
$$5A_0+4A_2+5A_4=$$
$$10A_0+6A_2+5A_4=$$
$$10A_0+4A_2=$$
$$5A_0+2A_2=$$

mais il est facile de voir qu'elles n'équivaleront qu'à deux distinctes, car l'élimination de A_4 entre deux des trois premières donnera un résultat identique à l'une des deux dernières, qui seront elles mêmes identiquement les mêmes. Elles ne suffiraient donc pas pour déterminer les trois inconnues, mais $\overset{2m}{A_0}$ donnant $\overset{10}{A_0}$, on en déduira successivement $\overset{10}{A_2}$ et $\overset{10}{A_4}$. A cet effet l'on a, égalisant les coëfficients de k^8 et ceux de k^4, dans les deux membres de la précédente équation:

$$5\overset{10}{A_0}+2\overset{10}{A_2}=-\binom{2p-4}{1}\overset{8}{A_0},$$

$$10\overset{10}{A_0}+6\overset{10}{A_2}+5\overset{10}{A_4}=-\binom{2p-2}{3}\overset{4}{A_0}-\binom{2p-3}{2}\overset{6}{A_2}-\binom{2p-4}{1}\overset{8}{A_4};$$

dont la premiere devient

$$5\overset{10}{A_0}+2\overset{10}{A_2}=-\frac{n(n^2-1)\ldots.(n^2-49)}{2^7.3^4.5.7}\cdot\frac{n^2-9}{2},$$

tandis que $\overset{2m}{A_0}$ donne

$$5\overset{10}{A_0}=-5\frac{n(n^2-1)\ldots.(n^2-49)(n^2-81)}{2^8.3^4.5^2.7.11},$$

donc

$$\overset{10}{A_2}=-\frac{n(n^2-1)\ldots.(n^2-49)}{2^8.3^4.5^2.7.11}5(5n^2-9);$$

la deuxième devient

$$10\overset{10}{A_0}+6\overset{10}{A_2}+5\overset{10}{A_4}=\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2^7.3^3.5}(n^6+7n^4-179n^2+675),$$

et l'on trouve

$$10\overset{10}{A_0}+6\overset{10}{A_2}=-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)\ldots.(n^2-49)}{2^5.3^4.5.7.11}(4n^2-27),$$

donc

$$\overset{10}{A}_4 = \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(494n^6+650n^4-27514n^2+47250)}{2^8.3^4.5^2.7.11},$$

et la valeur totale de A_{10} (17) s'en suit.

Faisant $m=6$, on a

$$\binom{2p}{6}A_0+\binom{2p-1}{5}A_2+\binom{2p-2}{4}A_4+\binom{2p-3}{3}A_6+\binom{2p-4}{2}A_8$$
$$+\binom{2p-5}{1}A_{10}=A_{12}'-A_{12},$$

et l'on trouve

$$A'_{12}-A_{12}$$
$$=[\overset{12}{A}_0(1-3k^2+3k^4)+\overset{12}{A}_2(2-k^2+k^4)+2\overset{12}{A}_4+\overset{12}{A}_6](1-2k^2)(2-k^2+k^4);$$

ainsi le premier membre de l'équation précédente sera divisible par $(1-2k^2)(2-k^2+k^4)$, et ensuite l'on n'aura que deux équations entre les quatres inconnues $\overset{10}{A}$, pour les quelles on peut aussi prendre celles que l'on obtient en égalisant les coëfficients de k^{10} et k^6 dans les deux membres de l'équation précédente, ce qui donnera

$$6\overset{12}{A}_0+2\overset{12}{A}_2=-\binom{2p-5}{1}\overset{10}{A}_0,$$

$$20\overset{12}{A}_0+10\overset{12}{A}_2+4\overset{12}{A}_4+2\overset{12}{A}_6=-\binom{2p-3}{3}\overset{6}{A}_0-\binom{2p-4}{2}\overset{8}{A}_2-\binom{2p-5}{1}\overset{10}{A}_4,$$

et connaissant, par $\overset{2m}{A}_0$, $\overset{12}{A}_0$ on pourra encore en déduire $\overset{12}{A}_2$, mais $\overset{12}{A}_4$ et $\overset{12}{A}_6$ restent indéterminés. Par (13) on connait encore la valeur de A_{12} lorsque $k=1$, ce qui donne une équation dont le premier membre est

$$2\overset{12}{A}_0+2\overset{12}{A}_2+2\overset{12}{A}_4+\overset{12}{A}_6=\ldots.$$

mais l'on voit qu'après l'élimination de $\overset{12}{A}_0$ et $\overset{12}{A}_2$ elle deviendra la même que la seconde des deux précédentes, dont la première, ou

$$6\overset{12}{A}_0+2\overset{12}{A}_2=\frac{n^2-11}{2}\cdot\frac{n(n^2-1)\ldots.(n^2-81)}{2^8.3^4.5^2.7.11}$$

conduira à

$$= \frac{n(n^2-1)\dots(n^2-81)}{2^{10}.3^5.5^2.7.11.13} \cdot 6(6n^2-11).$$

...e (6) ne fait connaitre les coëfficients $\overset{2m}{A}$ que ...vement, mais elle a donné la loi de A_2. Soit, ...rer la généralité,

$$A'_{2m} - A_{2m} = \binom{2p-m+1}{1} A_{2m-2} + \binom{2p-m+2}{2} A_{2m-4}$$
$$+ \dots \binom{2p-m+\mu}{\mu} A_{2m-2\mu} + \dots + \binom{2p}{m} A_0$$

l'équation (15) écrite dans un ordre inverse; pour A_{2m} on peut écrire

$$A_{2m} = \overset{2m}{A}_{2m} k^{2m} + \overset{2m}{A}_{2m-2} k^{2m-2} + \dots + \overset{2m}{A}_{2m-2\mu} k^{2m-2\mu} + \dots + \overset{2m}{A}_2 k^2 + \overset{2m}{A}_0$$

où

$$\overset{2m}{A}_{2m-2\mu} = \overset{2m}{A}_{2m-(2m-2\mu)} = \overset{2m}{A}_{2\mu}; \quad \dots \quad (e)$$

par conséquent l'on aura

$$(-1) A'_{2m} = \overset{2m}{A}_{2m} (k^2-1)^m - \overset{2m}{A}_{2m-2} (k^2-1)^{m-1}$$
$$+ \dots (-1)^\mu \overset{2m}{A}_{2m-2\mu} (k^2-1)^{m-\mu} \dots - \overset{2m}{A}_2 (k^2-1) + \overset{2m}{A}_0,$$

d'où l'on trouvera facilement, désignant par G et H le prémier et le second membre de l'équation précédente :

$$G = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu \left[\binom{m}{\mu} \overset{2m}{A}_{2m} + \binom{m-1}{\mu-1} \overset{2m}{A}_{2m-2} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + [1-(-1)^\mu] \overset{2m}{A}_{2m-2\mu} \right] k^{2m-2\mu},$$

$$H = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \left[\binom{2p-m+1}{1} \overset{2m-2}{A}_{2m-2\mu} + \binom{2p-m+2}{2} \overset{2m-4}{A}_{2m-2\mu} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \left[\begin{matrix} 2p-m+\mu \\ \mu \end{matrix} \right] \overset{2m-2\mu}{A}_{2m-2\mu} \right] k^{2m-2\mu};$$

égalisant les coëfficients de $k^{2m-2\mu}$ dans les deux polynomes G et H, donnant à μ successivement les valeurs 1, 2, 3, ... m, et ayant égard à l'égalité (e), on obtiendra m équations entre les m inconnues $\overset{2m}{A}$ de A_{2m}, mais qui ne seront pas toutes indépendan-

donc

$$\overset{10}{A_4} = \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(494n^6+650n^4-27514n^2+47250)}{2^8.3^4.5^2.7.11},$$

et la valeur totale de A_{10} (17) s'en suit.

Faisant $m=6$, on a

$$\binom{2p}{6}A_0+\binom{2p-1}{5}A_2+\binom{2p-2}{4}A_4+\binom{2p-3}{3}A_6+\binom{2p-4}{2}A_8$$
$$+\binom{2p-5}{1}A_{10}=A_{12}'-A_{12},$$

et l'on trouve

$$A'_{12}-A_{12}$$
$$=[\overset{12}{A_0}(1-3k^2+3k^4)+\overset{12}{A_2}(2-k^2+k^4)+2\overset{12}{A_4}+\overset{12}{A_6}](1-2k^2)(2-k^2+k^4);$$

ainsi le premier membre de l'équation précédente sera divisible par $(1-2k^2)(2-k^2+k^4)$, et ensuite l'on n'aura que deux équations entre les quatres inconnues $\overset{10}{A}$, pour les quelles on peut aussi prendre celles que l'on obtient en égalisant les coëfficients de k^{10} et k^6 dans les deux membres de l'équation précédente, ce qui donnera

$$6\overset{12}{A_0}+2\overset{12}{A_2}=-\binom{2p-5}{1}\overset{10}{A_0},$$

$$20\overset{12}{A_0}+10\overset{12}{A_2}+4\overset{12}{A_4}+2\overset{12}{A_6}=-\binom{2p-3}{3}\overset{6}{A_0}-\binom{2p-4}{2}\overset{8}{A_2}-\binom{2p-5}{1}\overset{10}{A_4},$$

et connaissant, par $\overset{2m}{A_0}$, $\overset{12}{A_0}$ on pourra encore en déduire $\overset{12}{A_2}$, mais $\overset{12}{A_4}$ et $\overset{12}{A_6}$ restent indéterminés. Par (13) on connait encore la valeur de A_{12} lorsque $k=1$, ce qui donne une équation dont le premier membre est

$$2\overset{12}{A_0}+2\overset{12}{A_2}+2\overset{12}{A_4}+\overset{12}{A_6}=\ldots.$$

mais l'on voit qu'après l'élimination de $\overset{12}{A_0}$ et $\overset{12}{A_2}$ elle deviendra la même que la seconde des deux précédentes, dont la première, ou

$$6\overset{12}{A_0}+2\overset{12}{A_2}=\frac{n^2-11}{2}\cdot\frac{n(n^2-1)\ldots.(n^2-81)}{2^8.3^4.5^2.7.11}$$

conduira à

$$\overset{12}{A_2} = \frac{n(n^2-1)\ldots(n^2-81)}{2^{10}.3^5.5^2.7.11.13}.6(6n^2-11).$$

Ainsi la 1e formule (6) ne fait connaître les coëfficients A que jusqu'à A_{10} inclusivement, mais elle a donné la loi de $\overset{2m}{A_2}$. Soit, pour en démontrer la généralité,

$$(-1)^m A'_{2m} - A_{2m} = \binom{2p-m+1}{1} A_{2m-2} + \binom{2p-m+2}{2} A_{2m-4}$$
$$+ \ldots \binom{2p-m+\mu}{\mu} A_{2m-2\mu} + \ldots + \binom{2p}{m} A_0$$

l'équation (15) écrite dans un ordre inverse; pour A_{2m} on peut écrire

$$A_{2m} = \overset{2m}{A_{2m}} k^{2m} + \overset{2m}{A_{2m-2}} k^{2m-2} + \ldots + \overset{2m}{A_{2m-2\mu}} k^{2m-2\mu} + \ldots + \overset{2m}{A_2} k^2 + \overset{2m}{A_0}$$

où

$$\overset{2m}{A_{2m-2\mu}} = \overset{2m}{A_{2m-(2m-2\mu)}} = \overset{2m}{A_{2\mu}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(e)}$$

par conséquent l'on aura

$$(-1) A'_{2m} = \overset{2m}{A_{2m}} (k^2-1)^m - \overset{2m}{A_{2m-2}} (k^2-1)^{m-1}$$
$$+ \ldots (-1)^\mu \overset{2m}{A_{2m-2\mu}} (k^2-1)^{m-\mu} \ldots - \overset{2m}{A_2} (k^2-1) + \overset{2m}{A_0},$$

d'où l'on trouvera facilement, désignant par G et H le premier et le second membre de l'équation précédente :

$$G = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu \Big[\binom{m}{\mu} \overset{2m}{A_{2m}} + \binom{m-1}{\mu-1} \overset{2m}{A_{2m-2}} + \ldots$$
$$\ldots + [1-(-1)^\mu] \overset{2m}{A_{2m-2\mu}} \Big] k^{2m-2\mu},$$

$$H = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \Big[\binom{2p-m+1}{1} \overset{2m-2}{A_{2m-2\mu}} + \binom{2p-m+2}{2} \overset{2m-4}{A_{2m-2\mu}} + \ldots$$
$$\ldots + \begin{bmatrix} 2p-m+\mu \\ \mu \end{bmatrix} \overset{2m-2\mu}{A_{2m-2\mu}} \Big] k^{2m-2\mu};$$

égalisant les coëfficients de $k^{2m-2\mu}$ dans les deux polynomes G et H, donnant à μ successivement les valeurs 1, 2, 3, ... m, et ayant égard à l'égalité (e), on obtiendra m équations entre les m inconnues $\overset{2m}{A}$ de A_{2m}, mais qui ne seront pas toutes indépendan-

tes entre-elles, comme on l'a vu pour $m=6$. Ainsi G donne pour le coëfficient de k^2 dans le développement de $A'_{12}-A_{12}$, faisant $m=6$ et $\mu=5$,

$$-\left[\binom{6}{5}\overset{12}{A}_{12}+\binom{5}{4}\overset{12}{A}_{10}+\binom{4}{3}\overset{12}{A}_8+\binom{3}{2}\overset{12}{A}_6+\binom{2}{1}\overset{12}{A}_4+2\overset{12}{A}_2\right],$$

ou, ayant égard à l'égalité (e),

$$-(6\overset{12}{A}_0+5\overset{12}{A}_2+4\overset{12}{A}_4+3\overset{12}{A}_6+2\overset{12}{A}_4+2\overset{12}{A}_2)$$

ce qui se réduit à

$$-(6\overset{12}{A}_0+7\overset{12}{A}_2+6\overset{12}{A}_4+3\overset{12}{A}_6).$$

Faisant maintenant $\mu=1$ dans G et H, l'on aura

$$-\left[\binom{m}{1}\overset{2m}{A}_{2m}+(1+1)\overset{2m}{A}_{2m-2}\right]=\binom{2p-m+1}{1}\overset{2m-2}{A}_{2m-2},$$

ou

$$-\frac{m}{1}\overset{2m}{A}_0-2\overset{2m}{A}_2=\frac{2p-m+1}{1}\overset{2m-2}{A}_0,$$

mais $\overset{2m}{A}_0$ donne

$$\overset{2m-2}{A}_0=(-1)^{m-1}\frac{n(n^2-1)\dots(n^2-(2m-3)^2)}{2.3\dots(2m-2)(2m-1)}$$

de sorte que, par la substitution des valeurs de $\overset{2m}{A}_0$ et $\overset{2m-2}{A}_0$, la dernière équation donne

$$-2\overset{2m}{A}_2=$$

$$\frac{n(n^2-1)\dots(n^2-(2m-3)^2)}{1.2.3\dots(2m-2)(2m-1)}\left\{\frac{n^2-2m+1}{2}(-1)^{m-1}+\frac{n^2-(2m-1)^2}{2(2m+1)}(-1)^m\right\},$$

ce qui se réduit à

$$\overset{2m}{A}_2=(-1)^m\frac{n(n^2-1)\dots(n^2-(2m-3)^2)}{2.3\dots(2m-2)(2m-1)}\cdot\frac{m[mn^2-(2m-1)]}{2m(2m+1)},$$

et ce qui s'accorde avec les valeurs trouvées pour $\overset{2}{A}_2$, $\overset{4}{A}_2$, $\overset{6}{A}_2$, $\overset{8}{A}_2$ et $\overset{10}{A}_2$, tandis que l'on peut aussi écrire

$$\overset{2m}{A}_2=-\frac{mn^2-(2m-1)}{2(2m+1)}\overset{2m-2}{A}_0.$$

La quatrième des formules (6) peut être traitée de la même manière; cette formule donnera, B'' désignant ce que deviennent les coëfficients B de π' lorsqu'on y change k en k_1,

$$\binom{2p}{m} B_0 + \binom{2p-1}{m-1} B_2 + \dots + \binom{2p-m+1}{1} B_{2m-2} + B_{2m} = (-1)^m B''_{2m}$$

et dans G et H il faudra seulement remplacer les coëfficients A de A_{2m} par les coëfficients B de B_{2m}, tandis que l'égalité (e) n'a pas lieu ici. Remarquant que $\pi(x.0) = 1 = B_0$, on voit, faisant $k=0$ dans la forme générale de B_{2m}, que l'on aura généralement

$$\overset{2m}{B}_0 = 0, \text{ excepté } \overset{0}{B}_0 = 1,$$

de plus, $\pi'(x.0)$ fait voir que l'on aura

$$\overset{2m}{B}_{2m} = (-1)^m \frac{(n^2-1)(n^2-9)\dots(n^2-(2m-1)^2)}{1.2.3.4\dots(2m-1)2m},$$

et par conséquent

$$\overset{2m-2}{B}_{2m-2} = (-1)^{m-1} \frac{(n^2-1)(n^2-9)\dots(n^2-(2m-3)^2)}{1.2.3.4\dots(2m-3)(2m-2)};$$

ensuite G et H donnent

$$-\binom{m}{1}\overset{2m}{B}_{2m} - 2\overset{2m}{B}_{2m-2} = \frac{2p-m+1}{1}\overset{2m-2}{B}_{2m-2},$$

d'où l'on trouvera

$$\overset{2m}{B}_{2m-2} = (-1)^m \frac{n^2(n^2-1)\dots(n^2-(2m-3)^2)}{1.2\dots(2m-3)(2m-2)} \cdot \frac{m-1}{2(2m-1)}.$$

Ainsi l'on connaitra les coëfficients B_2 et B_4 ci-après (18). Si dans G et H on fait $m=3$, et successivement $\mu=1, 2, 3$, on obtiendra, pour déterminer les coëfficients B de B_6, les trois équations

$$-(3\overset{6}{B}_6 + 2\overset{6}{B}_4) = \dots$$

$$3\overset{6}{B}_6 + 2\overset{6}{B}_4 = \dots$$

$$-(\overset{6}{B}_6 + \overset{6}{B}_4 + \overset{6}{B}_2 + \overset{6}{B}_0) = \binom{2p-2}{1}\overset{4}{B}_0 + \binom{2p-1}{2}\overset{2}{B}_0 + \binom{2p}{3}\overset{0}{B}_0,$$

qui, comme l'on voit n'équivalent qu'à deux distinctes, mais les B_0 étant zéro, excepté $\overset{0}{B}_0 = 1$, et connaissant $\overset{6}{B}_6$ et $\overset{6}{B}_4$ par les

formules $\overset{2m}{B}_{2m}$ ex $\overset{2m}{B}_{2m-2}$ on aura, pour déterminer $\overset{6}{B}_2$, la dernière, ou

$$\overset{6}{B}_6+\overset{6}{B}_4+\overset{6}{B}_2=-\frac{(n^2-1)(n^2-3)(n^2-5)}{1.2.3.2^3};$$

d'où l'on trouvera

$$\overset{6}{B}_2=-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{2.3^2.5}$$

et B_6 (18) s'en suit.

Faisant dans G et H $m=4$ et successivement $\mu=1, 2, 3, 4$, on obtiendra, pour déterminer les B de B_8, les quatres équations $4\overset{8}{B}_8+2\overset{6}{B}_6=\ldots.$, $6\overset{8}{B}_8+3\overset{6}{B}_6=\ldots.$, $4\overset{8}{B}_8+3\overset{8}{B}_6+2\overset{8}{B}_4+2\overset{8}{B}_2=\ldots.$, $\overset{8}{B}_8+\overset{8}{B}_6+\overset{8}{B}_4+\overset{8}{B}_2=\binom{2p}{4}\overset{0}{B}_0$, qui ne donneront entre les deux inconnues $\overset{8}{B}_4$ et $\overset{8}{B}_2$, que la seule équation $\overset{8}{B}_4+\overset{8}{B}_2=\ldots.$; par conséquent on ne pourra plus par cette méthode determiner B_8, ni B_{10}, B_{12}, etc.; B_8 et B_{10} (18) ont été déterminés d'une autre manière.

Si dans G et H on fait $\mu=m$, on obtient

$$\overset{2m}{B}_{2m}+\overset{2m}{B}_{2m-2}+\ldots.+\overset{2m}{B}_2=(-1)^m\binom{2p}{m},$$

ce qui s'accorde avec la valeur trouvée pour $\pi'(x.1)$.

Les coëfficients B_{2m} que l'on a déterminés ici, en font connaitre autant de $\varphi(x.k)$, ou des derniers coëfficients A_{4p-2m} de $F(x.k)$, au moyen de la formule (8), qui donne, faisant $m=1$,

$$Z_2'=-\left[\frac{2p}{1}B_0'+B_2'k^2\right],$$

B' étant ce que devient B lorsqu'on y change k en $\frac{1}{k}$, on a

$$B_0'=B_0=1,\quad B_2'=-\frac{n^2-1}{2}k^{-2},$$

ce qui donne $Z_2'=0$, et par conséquent aussi $Z=0$ et $A_{4p-2}=0$, comme on l'a déja trouvé précédemment; faisant dans (8) successivement $m=2$ et $m=3$ on trouvera les valeurs de Z_4' et Z_6'

dont se déduisent, par le changement de k_1 en k, les valeurs de Z_4 et Z_6 ci-après (18).

Les équations (6) ne suffisant pas pour déterminer toute la suite des coëfficients A_{2m}, on a essayé une autre méthode, faisant emploi des formules (9), dont seulement la première et la troisième, si dans celle-ci l'on prend un des deux signes, donneront des relations différentes entre les coëfficients A_{2m} de $F(x.k)$. Car, la deuxième se déduit de la première en changeant dans celle-ci x en $\frac{1}{kx}$, et ensuite multipliant les deux membres par $k^{n^2+3}x^{2(n^2+3)}$, ayant égard à la relation

$$\varphi(x.k)=F\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{2p}x^{4p};$$

tandis que les deux qui sont contenues dans la troisième se déduisent l'une de l'autre par le changement de n en $-n$, ce qui change $F(+n)$ en $-F(n)$ et A_{2m} en $-A_{2m}$.

Remarquons auparavant que l'équation différentielle (3) donne

$$\frac{dy}{dx}=n\frac{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}=n\frac{\pi(n)\,\pi'(n)}{\varphi^2(n)},$$

donc, différentiant par rapport à x la valeur générale de y_n (1), et posant

$$F(x)\,\varphi(x)+x[\varphi(x)F'(x)-F(x)\varphi'(x)]=V,$$

où F' et φ' sont les dérivées par rapport à x de F et φ, on aura dans les équations (9)

$$\pi(n)\,\pi'(n)=\frac{V}{n},$$

de sorte que si l'on y substitue aussi à $F(2)$ et $\varphi(2)$ leurs valeurs, elles deviendront

$$F(n-2)F(n+2)=(1-k^2x^4)^2F^2(n)-4(1-x^2)(1-k^2x^2)\varphi^2(n), \quad \text{(a)}$$

$$\varphi(n-2)\,F(n+2)=(1-2x^2+k^2x^4)(1-2k^2x^2+k^2x^4)F(n)\,\varphi(n)$$
$$+2(1-x^2)(1-k^2x^2)(1-k^2x^4)\frac{V}{n}. \quad \dots \quad \text{(a')}$$

Par rapport à x les fonctions $F(n+2)$ et $F(n-2)$ sont des dégrés $(n+2)^2-1=4q$, $(n-2)^2-1=4r$, d'où $4q+4r=2(n^2+3)=8p+8$,

qui sera le dégré de leur produit, et il en est de même pour $\varphi(n+2)$ et $\varphi(n-2)$; si a_{2m} et α_{2m}, z_{2m} et ζ_{2m} désignent ce que deviennent A_{2m} et Z_{2m} lorsqu'on y augmente et diminue n de deux unités, on a

$$F(n+2) = a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{4q} x^{4q}$$

$$= (-1)^{\frac{n+1}{2}} [z_0 k^{2q} x^{4q} + z_2 k^{2q-2} x^{4q-2} + \dots + z_{4q} k^{-2q}],$$

$$F(n-2) = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{4r} x^{4r}$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} [\zeta_0 k^{2r} x^{4r} + \zeta_2 k^{2r-2} x^{4r-2} + \dots + \zeta_{4r} k^{-2r}],$$

et

$$\varphi(n-2) = \zeta_0 + \zeta^2 x^2 + \dots + \zeta_{4r} x^{4r}$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} [\alpha_0 k^{2r} x^{4r} + \alpha_2 k^{2r-2} x^{4r-2} + \dots + \alpha_{4r} k^{-2r}],$$

ce qui donnera, pour le coëfficient de x^{2m}, et celui de $x^{8p+8-2m} = x^{4q+4r-2m}$, dans le premier membre de (a),

$$\alpha_0 a_{2m} + \alpha_2 a_{2m-2} + \dots + \alpha_{2m} a_0,$$

$$[\zeta_0 z_{2m} + \zeta_2 z_{2m-2} + \dots + \zeta_{2m} z_0]\, k^{2q+2r-2m};$$

et pour ces coëfficients dans le premier membre de (a'),

$$\zeta_0 a_{2m} + \zeta_2 a_{2m-2} + \dots + \zeta_{2m} a_0,$$

$$[\alpha_0 z_{2m} + \alpha_2 z_{2m-2} + \dots + \alpha_{2m} z_0]\, k^{2q+2r-2m};$$

posant

$$F^2(n) = F_0 + F_2 x^2 + \dots + F_{8p} x^{8p},$$

$$\varphi^2(n) = \varphi_0 + \varphi_2 x^2 + \dots + \varphi_{8p} x^{8p},$$

le coëfficient de x^{2m}, et celui de $x^{8p+8-2m}$, dans le second membre de (a) sera

$$F_{2m} - 2k^2 F_{2m-4} + k^4 F_{2m-8} - 4(\varphi_{2m} - (1+k^2)\varphi_{2m-2} + k^2 \varphi_{2m-4})$$

et

$$k^4 F_{8p-2m} - 2k^2 F_{8p-2m+4} + F_{8p-2m+8}$$

$$- 4(k^2 \varphi_{8p-2m+4} - (1+k^2)\varphi_{8p-2m+6} + \varphi_{8p-2m+8}),$$

mais la relation $\varphi(x.k) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} F\left(\frac{1}{kx}.k\right) k^{2p} x^{4p}$ donne

$$F_{8p-2m} = k^{4p-2m}\varphi_{2m}, \quad \varphi_{8p-2m} = k^{4p-2m}F_{2m},$$

de sorte que le dernier coëfficient devient

$$[\varphi_{2m} - 2k^2\varphi_{2m-4} + k^4\varphi_{2m-8}$$
$$- 4k^2(F_{2m-4} - (1+k^2)F_{2m-6} + k^2F_{2m-8})]\,k^{4p-2m+4};$$

posant

$$F(n)\,\varphi(n) = P_0 + P_2x^2 + \ldots. + P_{8p}x^{8p},$$
$$V(n) = V_0 + V_2x^2 + \ldots. + V_{8p}x^{8p}$$

on aura

$$P_{8p-2m} = P_{2m}k^{4p-2m}, \quad V_{8p-2m} = V_{2m}k^{4p-2m}$$

et le coëfficient de x^{2m}, ou celui de $k^{4p+4-2m}x^{8p+8-2m}$, dans le second membre de (a′) sera le second membre de la troisième équation (b) ci-dessous, si pour le premier on y prend le signe + et pour le second le signe —.

Egalisant les coëfficients des mêmes puissances de x dans les deux membres des équations (a) et (a′), remarquant que $2q+2r-2m = 4p+4-2m$, on obtiendra

$$\alpha_0 a_{2m} + \alpha_2 a_{2m-2} + \ldots. + \alpha_{2m} a_0 \qquad \text{(b)}$$
$$= F_{2m} - 2k^2F_{2m-4} + k^4F_{2m-8} - 4[\varphi_{2m} - (1+k^2)\varphi_{2m-2} + k^2\varphi_{2m-4}],$$

$$\zeta_0 z_{2m} + \zeta_2 z_{2m-2} + \ldots. + \zeta_{2m} z_0$$
$$= \varphi_{2m} - 2k^2\varphi_{2m-4} + k^4\varphi_{2m-8} - 4k^2[F_{2m-4} - (1+k^2)F_{2m-6} + k^2F_{2m-8}],$$

$$\zeta_0 a_{2m} + \zeta_2 a_{2m-2} + \ldots. + \zeta_{2m} a_0 =$$
$$\alpha_0 z_{2m} + \alpha_2 z_{2m-2} + \ldots. + \alpha_{2m} z_0 =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} P_{2m} - 2(1+k^2)P_{2m-2} + 6k^2P_{2m-4} - 2k^2)(1+k^2)P_{2m-6} + k^4P_{2m-8} \\ \pm \frac{2}{n}(V_{2m} - (1+k^2)V_{2m-2} + k^2(1+k^2)V_{2m-6} - k^4V_{2m-8}) \end{array} \right.$$

et, des valeurs générales de F et φ on trouvera facilement, ayant égard à ce qu'on a posé,

$$F_{2m} = 2A_0A_{2m} + 2A_2A_{2m-2} + \ldots. + \left\{ \begin{array}{l} A_m^2, \\ 2A_{m-1}A_{m+1}, \end{array} \right.$$

$$Q_{2m} = 2Z_0Z_{2m} + 2Z_2Z_{2m-2} + \ldots. + \left\{ \begin{array}{l} Z_m^2, \\ 2Z_{m-1}Z_{m+1}, \end{array} \right.$$

$$P_{2m} = A_{2m}Z_0 + A_{2m-2}Z_2 + \ldots. + A_0Z_{2m},$$

$$V_{2m} = (2m+1)A_{2m}Z_0 + (2m-3)A_{2m-2}Z_2 + \ldots. + (-2m+1)A_0Z_{2m},$$

tandisque, $\overset{2m}{Z}_0$ étant nul, tant que $m < p$, on a

$$Z_{2m} = \overset{2m}{Z}_2(1 + k^{2m-4})\,k^2 + \overset{2m}{Z}_4(1+k^{2m-8})k^4 + \dots + \left\{ \begin{array}{l} \overset{2m}{Z}_m k^m, \\ \overset{2m}{Z}_{m-1}(1+k^2)k^{m-1}; \end{array} \right.$$

dans ces expressions $\overset{2m}{A}$ et $\overset{2m}{Z}$ sont des fonctions de n seul, et il faut y prendre pour le dernier terme le supérieur ou l'inférieur suivant que m est pair ou impair, encore il est à remarquer que $F_{2\mu}$, $Q_{2\mu} \dots$ sont nuls lorsque l'indice 2μ est négatif ou $> 8p$.

Par l'inspection des équations (b) l'on voit que, si les m premiers coëfficients A_0, $A_2, \dots, A_{2m-2}$ et Z_0, $Z_2, \dots, Z_{2m-2}$ sont connus, l'on pourra déterminer le $m+1^e$ coëfficient Z_{2m} à l'aide de la deuxième (b). Car dans celle-ci tous les termes sont alors des fonctions connues de n, exceptés $\zeta_0 z_{2m}$, $\zeta_{2m} z_0$ et $2Z_0 Z_{2m}$, qui au second membre est contenu dans Q_{2m}. Transposant ce terme au premier membre et tous ceux qui sont connus au second, ce dernier sera une fonction connue de n; désignant cette fonction par $X_{2m}(n)$, on aura

$$\zeta_0 z_{2m} - 2Z_0 Z_{2m} + \zeta_{2m} z_0 = X_{2m}(n),$$

ou, parce que $\zeta_0 = Z_0 = z_0 = 1$, et mettant en évidence que ζ_{2m}, Z_{2m}, z_{2m} sont trois valeurs consécutives d'une même fonction de n, les désignant à cet effet par $Z_{2m}(n-2)$, $Z_{2m}(n)$ et $Z_{2m}(n+2)$,

$$Z_{2m}(n+2) - 2Z_{2m}(n) + Z_{2m}(n-2) = X_{2m}(n), \quad . \; . \quad \text{(c)}$$

qui est une équation aux différences finies, du premier degré et du second ordre à coëfficients constants, la différence de la variable étant 2. Son intégrale générale, qui doit contenir deux constantes arbitraires, est

$$Z_{2m}(n-2) = \Sigma^2 X_{2m}(n), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(d)}$$

comme il est facile à vérifier, car il s'en suit successivement

$$\begin{aligned} Z_{2m}(n) &= \Sigma^2 X_{2m}(n+2) = \Sigma^2[X_{2m}(n) + \Delta X_{2m}(n)] \\ &= \Sigma^2 X_{2m}(n) + \Sigma X_{2m}(n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{2m}(n+2) &= \Sigma^2 X_{2m}(n+2) + \Sigma X_{2m}(n+2) \\ &= \Sigma^2 X_{2m}(n) + 2\Sigma X_{2m}(n) + X_{2m}(n), \end{aligned}$$

et ces valeurs satisfont identiquement à l'équation (c); les deux constantes arbitraires seront déterminées par la condition qu'à partir de $m=1$ $Z_{2m}(n-2)=0$, pour $n=1$ et $n=3$.

Connaissant ainsi Z_{2m} et par conséquent aussi ζ_{2m} et z_{2m}, la première des équations (b) ne contiendra d'autres termes inconnus que $\alpha_0 a_{2m}$, $\alpha_{2m} a_0$ et $2A_0 A_{2m}$, qui, au second membre, est contenu dans F_{2m}; transposant ce terme au premier membre et tous ceux qui sont connus au second, on aura une équation de la forme

$$\alpha_0 a_{2m} - 2A_0 A_{2m} + \alpha_{2m} a_0 = \mathrm{X}'(n),$$

ou, substituant à α_0, A_0 et a_0 leurs valeurs $n-2$, n et $n+2$, et mettant en evidence que α, A et a sont trois valeurs consécutives d'une même fonction de n,

$$(n-2)A(n+2) - 2nA(n) + (n+2)A(n-2) = \mathrm{X}'(n);$$

cette équation aux différences finies, dont les coëfficients sont variables, donnerait par son intégrale $A(n)$, c'est-à-dire A_{2m}, mais on peut aussi, et par un calcul plus simple, déterminer cette fonction au moyen des deux dernières (b), qui se déduisent l'une de l'autre par le changement de n en $-n$. La troisième ne contient d'autres termes inconnus que $\zeta_0 a_{2m}$ et $A_{2m} Z_0$, qui au second est contenu dans P_{2m} et V_{2m}; transposant ce terme au premier membre et tous ceux qui sont connus au second, ce dernier sera une fonction connue de n; désignant cette fonction par $Y_{2m}(n)$, on aura

$$\zeta_0 a_{2m} - A_{2m} Z_0 - \frac{2(2m+1)}{n} A_{2m} Z_0 = Y_{2m}(n),$$

ou, substituant pour ζ_0 et z_0 leurs valeurs, et réduisant,

$$A_{2m}(n+2) - \frac{n+2(2m+1)}{n} A_{2m}(n) = Y_{2m}(n);$$

de plus, on voit facilement que Y_{2m} sera de la même forme que A_{2m} et Z_{2m}, c'est-à-dire que sa forme générale sera

$$Y_{2m}(n) = \overset{2m}{Y}_0(1+k^{2m}) + \ldots \overset{2m}{Y}_{2\mu}(1+k^{2m-4\mu})k^{2\mu} + \ldots + \left\{ \begin{array}{l} \overset{2m}{Y}_m k^m, \\ \overset{2m}{Y}_{m-1}(1+k^2)k^{m-1}, \end{array} \right.$$

de sorte que de l'équation précédente il suit aussi

$$\overset{2m}{A}_{2\mu}(n+2) - \frac{n+2(2m+1)}{n} \overset{2m}{A}_{2\mu}(n) = \overset{2m}{Y}_{2\mu}(n).$$

Si dans cette équation l'on écrit $-n$ à la place de n, et si l'on y diminue n de deux unités, l'on obtient

$$\overset{2m}{A}_{2\mu}(n-2) - \frac{n-2(2m+1)}{n} \overset{2m}{A}_{2\mu}(n) = -\overset{2m}{Y}_{2\mu}(-n),$$

$$\overset{2m}{A}_{2\mu}(n) - \frac{n+4m}{n-2} \overset{2m}{A}_{2\mu}(n-2) = \overset{2m}{Y}_{2\mu}(n-2).$$

qui donnent

(e)

$$\overset{2m}{A}_{2\mu}(n) = -\frac{n}{8m(2n+1)}\{(n+4m)\overset{2m}{Y}_{2\mu}(-n) - (n-2)\overset{2m}{Y}_{2\mu}(n-2)\}.$$

Faisant dans la deuxième (b) $m = 1$, on trouve $X_2(n) = 0$, donc (d) donnera $Z_2(n) =$ constant, et comme $Z_2(1) = 0$, il s'en suit généralement $Z_2(n) = 0$; ensuite on trouvera, par la troisième (b),

$$Y_2(n) = -2(n+1)(1+k^2),$$

ce qui donnera (e) la valeur A_2 ci-après (17).

Faisant $m = 2$, on trouve

$$X_4(n) = -2k^2(2n^2+1),$$

qui par la double intégration (d), donne Z_4 ci-après (18), et ensuite on trouve

$$Y_4(n) = \frac{(n^2-1)(n+3)}{3}(1+k^4) + \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}k^2,$$

qui donne A_4 ci-après (17).

Faisant $m = 3$, on trouve

$$X_6(n) = \frac{4n^2(n^2+2)}{3}(1+k^2),$$

qui donne Z_6 ci-après (18), et ensuite l'on trouve

$$Y_6(n) = -\frac{(n^2-1)(n+3)}{3.4.5}[(n-3)(n+5)(1+k^6)+(9n^2+8n-5)(1+k^2)k^2],$$

qui donne A_6 ci-après (17).

Faisant $m = 4$, l'on trouve

$$X_8(n) = -\frac{4n^2(n^2-1)(2n^2+7)}{3^2.5}(1+k^4)k^2 - \frac{n^2(34n^4+175n^2+61)}{2.3^2.5}k^4,$$

qui donne Z_8 ci-après (18), et ensuite l'on trouve

$$Y_8(n) = \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)(n+7)}{3.4.5.6.7}(1+k^8)$$
$$+\frac{(n^2-1)(n^2-9)(n+5)(16n^2+11n-14)}{3.4.5.6.7}(1+k^4)k^2$$
$$-\frac{2(n+1)(3n^6+4n^5+185n^4+515n^3-53n^2-339n+315)}{3.4.5.6.7}k^4,$$

qui donne A_8 ci-après (17).

Faisant encore $m=5$, on trouve

$$X_{10}(n)$$

$$=\frac{n^2(n^2-1)}{3^2.5.7}[4(n^2-4)(n^2+5)(1+k^6)k^2+(15n^4+127n^2+92)(1+k^2)k^4]$$

qui donne Z_{10} ci-après (18), et ensuite l'on trouve, calculant de $Y_{10}(n)$ seulement le coëfficient de $(1+k^2)k^4$, c'est-à-dire celui de $\overset{10}{Y}_4(n)$,

$$\overset{10}{Y}_4(n)=$$

$$\frac{2(n^2-1)(n+3)}{3.4.5.6.7.8.9}[247n^6+780n^5+2431n^4+4812n^3-1769n^2-2244n+6615]$$

dont on déduira pour $\overset{10}{A}_4$ la valeur ci-après (17).

Connaissant les valeurs de Z_8 et Z_{10} on, peut encore calculer B_8 et B_{10}, au moyen de (7), ce qui donne les valeurs ci-après (19).

Par les équations (a) et (a′) on peut donc déterminer autant de coëfficients successifs Z et A qu'on le voudra, mais le calcul devient de plus en plus laborieux, sans qu'il paraisse qu'une loi générale se manifeste. Se bornant donc au calcul de A_{10} et Z_{10}, on laisse suivre ici les valeurs des coëfficients trouvé par ce qui précède:

$$A_0=(-1)^{\frac{n-1}{2}}Z_{4p}k^{-2p}=n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$A_2=(-1)^{\frac{n-1}{2}}Z_{4p-2}k^{-(2p-2)}=-\frac{n(n^2-1)}{2.3}(1+k^2),$$

$$A_4=(-1)^{\frac{n-1}{2}}Z_{4p-4}k^{-(2p-4)}=\frac{n(n^2-1)}{2.3.4.5}[(n^2-9)(1+k^4)+2(2n^2-3)k^2],$$

$$A_6=(-1)^{\frac{n-1}{2}}Z_{4p-6}k^{-(2p-6)}$$

$$=-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5.6.7}[(n^2-25)(1+k^6)+3(3n^2-5)(1+k^2)k^2],$$

$$A_8=(-1)^{\frac{n-1}{2}}Z_{4p-8}k^{-(2p-6)}$$

$$=\frac{n(n^2-1)}{2.3....8.9}\{(n^2-9)(n^2-25)[(n^2-49)(1+k^8)+4(4n^2-7)(1+k^4)k^2]$$

$$-6(n^6+85n^4-671n^2+945)k^4\},$$

$$A_{10}=(-1)^{\frac{n-1}{2}} Z_{4p-10}\, k^{-(2p-10)}$$

$$=-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3\ldots.10.11}\{(n^2-25)(n^2-49)[(n^2-81)(1+k^{10})$$

$$+5(5n^2-9)(1+k^6)k^2]-2(247n^6+325n^4-13757n^2+23625)(1+k^2)k^4\}.$$

$$Z_0=(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{4p}\, k^{-2p}=1,\quad Z_2=A_{4p-2}=0,\quad \ldots\ldots \quad (18)$$

$$Z_4=(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{4p-4}\, k^{-(2p-4)}=-\frac{n^2(n^2-1)}{2^2.3}k^2,$$

$$Z_6=(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{4p-6}\, k^{-(2p-6)}=\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{2.3^2.5}(1+k^2)k^2,$$

$$Z_8=(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{4p-8}\, k^{-(2p-8)}$$

$$=-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{2^5.3^2.5.7}\{8(n^2-9)(1+k^4)+(17n^2-69)k^2\}k^2,$$

$$Z_{10}=(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_{4p-10}\, k^{-(2p-10)}$$

$$=\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{2^3.3^4.5^2.7}\{4(n^2-16)(1+k^6)+15(n^2-4)(1+k^2)k^2\}k^2.$$

$$B_0=1,\quad B_2=-\frac{n^2-1}{2}k^2,\quad B_4=\frac{n^2-1}{2^3.3}[2n^2+(n^2-9)k^2]k^2,\quad (19)$$

$$B_6=-\frac{n^2-1}{2^4.3^2.5}[8n^2(n^2-4)+6n^2(n^2-9)k^2+(n^2-9)(n^2-25)k^4]k^2,$$

$$B_8=\frac{n^2-1}{2^7.3^2.5.7}[32n^2(n^2-4)(n^2-9)+4n^2(n^2-4)(15n^2-107)k^2$$

$$+12n^2(n^2-9)(n^2-25)k^4+(n^2-9)(n^2-25)(n^2-49)k^6]k^2,$$

$$B_{10}=-\frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2^8.3^4.5^2.7}[128n^2(n^2-4)(n^2-16)+32n^2(n^2-4)(14n^2-89)k^2$$

$$+12n^2(n^2-4)(29n^2-329)k^4+20n^2(n^2-25)(n^2-49)k^6$$

$$+(n^2-25)(n^2-49)(n^2-81)k^8]k^2.$$

On pourra vérifier ces formules, ainsi que les valeurs particulières et les relations trouvées dans ce qui précède, aux valeurs de F et π qui suivent, et d'où celles de φ et π' se déduisent sans aucun calcul. $F(5)$ et $F(7)$ ont été calculées au moyen de

la 1[e] équation (9) y faisant successivement $n=3$ et $n=5$; puis π' a été déduite de F au moyen des formules (6).

$$n=3,\quad p=2.$$

$$F(x.k)=3-4(1+k^2)x^2+6k^2x^4-k^4x^8;$$
$$\pi(x.k)=1-4k^2x^2+6k^2x^4-4k^2x^6+k^4x^8.$$

$$n=5,\quad p=6.$$

$$\begin{aligned}F(x.k)=5&-20(1+k^2)x^2+[16(1+k^4)+94k^2]x^4-80(1+k^2)k^2x^6\\&-105k^4x^8+360(1+k^2)k^4x^{10}-[240(1+k^4)+780k^2]k^4x^{12}\\&+[64(1+k^6)+560(1+k^2)k^2]k^4x^{14}-[160(1+k^4)+445k^2]k^6x^{16}\\&+140(1+k^2)k^8x^{18}-50k^{10}x^{20}+k^{12}x^{24};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(x.k)=1&-12k^2x^2+(50+16k^2)k^2x^4-(140+80k^2)k^2x^6\\&+(160+335k^2)k^2x^8-(64+464k^2+264k^4)k^2x^{10}\\&+[208(1+k^4)+508k^2]k^4x^{12}-(264+464k^2+64k^4)k^6x^{14}\\&+(335+160k^2)k^8x^{16}-(80+140k^2)k^8x^{18}\\&+(16+50k^2)k^8x^{20}-12k^{10}x^{22}+k^{12}x^{24}.\end{aligned}$$

$$n=7,\quad p=12.$$

$$\begin{aligned}F(x.k)=\;&7-56(1+k^2)x^2+[112(1+k^4)+532k^2]x^4\\&-[64(1+k^6)+1136(1+k^2)k^2]x^6+[672(1+k^4)-1610k^2]k^2x^8\\&+19656(1+k^2)k^4x^{10}-[47040(1+k^4)+113932k^2]k^4x^{12}\\&+[60928(1+k^6)+271040(1+k^2)k^2]k^4x^{14}\\&-[48384(1+k^8)+372736(1+k^4)k^2+683935k^4]k^4x^{16}\\&+[21504(1+k^{10})+311808(1+k^6)k^2+1005200(1+k^2)k^4]k^4x^{18}\\&-[4096(1+k^{12})+144896(1+k^8)k^2+890720(1+k^4)k^4\\&\qquad\qquad+1582104k^6]k^4x^{20}\\&+[28672(1+k^{10})+434560(1+k^6)k^2+1490272(1+k^2)k^4]k^6x^{22}\\&-[89600(1+k^8)+765632(1+k^4)k^2+1463980k^4]k^8x^{24}\\&+[164864(1+k^6)+739536(1+k^2)k^2]k^{10}x^{26}\\&-[111552(1+k^4)+265272k^2]k^{12}x^{28}\\&-[35840(1+k^6)+108864(1+k^2)k^2]k^{12}x^{30}\\&+[8960(1+k^8)+116480(1+k^4)k^2+230713k^4]k^{12}x^{32}\\&-[1024(1+k^{10})+30208(1+k^6)k^2+145240(1+k^2)k^4]k^{12}x^{34}\\&+[3584(1+k^8)+39536(1+k^4)k^2+86660k^4]k^{14}x^{36}\\&-[4928(1+k^6)+25200(1+k^2)k^2]k^{16}x^{38}\\&+[3360(1+k^4)+8022k^2]k^{18}x^{40}\\&-1176(1+k^2)k^{20}x^{42}+196k^{22}x^{44}-k^{24}x^{48};\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pi(x.k) = \; & 1 - 24k^2x^2 + [196+80k^2]k^2x^4 - [1176+784k^2+64k^4]k^2x^6 \\
& + [3360 + 6594k^2 + 672k^4]k^2x^8 \\
& - [4928 + 22288k^2 + 15288k^4]k^2x^{10} \\
& + [3584 + 36176k^2 + 65716k^4 + 29120k^6]k^2x^{12} \\
& - [1024 + 28160k^2 + 120120k^4 + 153280k^6 + 43520k^8]k^2x^{14} \\
& + [8448 + 100608k^2 + 334831k^4 + 252416k^6 + 39168k^8]k^4x^{16} \\
& - [31744 + 380608k^2 + 630448k^4 + 245248k^6 + 19456k^8]k^6x^{18} \\
& + [270272 + 883336k^2 + 674016k^4 + 129536k^6 + 4096k^8]k^8x^{20} \\
& - [164864 + 850864k^2 + 1069152k^4 + 382592k^6 + 28672k^8]k^8x^{22} \\
& + [89600(1 + k^8) + 660800(1 + k^4)k^2 + 1203356k^4]k^8x^{24} \\
& - [28672 + 382592k^2 + 1069152k^4 + 850864k^6 + 164864k^8]k^8x^{26} \\
& + [4096 + 129536k^2 + 674016k^4 + 883336k^6 + 270272k^8]k^8x^{28} \\
& - [19456 + 245248k^2 + 630448k^4 + 380608k^6 + 31744k^8]k^{10}x^{30} \\
& + [39168 + 252416k^2 + 334831k^4 + 100608k^6 + 8448k^8]k^{12}x^{32} \\
& - [43520 + 153280k^2 + 120120k^4 + 28160k^6 + 1024k^8]k^{14}x^{34} \\
& + [29120 + 65716k^2 + 36176k^4 + 3584k^6]k^{16}x^{36} \\
& - [15288 + 22288k^2 + 4928k^4]k^{18}x^{38} \\
& + [672 + 6594k^2 + 3360k^4]k^{18}x^{40} - [64 + 784k^2 + 1176k^4]k^{18}x^{42} \\
& + [80 + 196k^2]k^{20}x^{44} - 24k^{22}x^{46} + k^{24}x^{48}.
\end{aligned}
$$

II. (n un entier pair.)

Si n est un entier pair la forme générale de y est

$$y = x\frac{F(x.k)}{\varphi(x.k)}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

où par rapport à x F est du dégré n^2-4, et φ du dégré n^2, tandis que ces fonctions entières et rationnelles ne contiennent que des puissances paires de x et de k; dans ce cas l'on a

$$\text{Sin. amp.}(nu + niK') = \text{Sin. amp.}\, nu,$$

donc si l'on change u en $u + iK'$, ce qui change x en $\frac{1}{kx}$, y ne change pas, et le radical devient

$$-\frac{1}{kx^2}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

de sorte que l'on obtient

$$y = -k^2 x \frac{F\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{n^2-4}x^{n^2-4}}{\varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{n^2}x^{n^2}} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

donc, on devra avoir identiquement

$$F(x.k) = \pm MF\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{n^2-2}x^{n^2-4}, \quad \varphi(x.k) = \mp M\varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{n^2}x^{n^2},$$

M étant un facteur qui ne contient pas x. Mettant dans ces identités $\frac{1}{kx}$ à la place de x, on a

$$F\left(\frac{1}{kx}.k\right) = \pm MF(x.k)k^2x^{-(n^2-4)}, \quad \varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right) = \mp M\varphi(x.k)x^{-n^2},$$

d'où par la multiplication par les précédentes

$$M = \mp k^{-\frac{n^2}{2}};$$

pour déterminer le signe de M, on remarque qu'en prenant

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} = \text{Sin.amp.}[K \pm \tfrac{1}{2}iK'],$$

il s'en suit

$$y = \text{Sin.amp.}[nK \pm \tfrac{n}{2}iK'],$$

c'est-à-dire

si $\frac{n}{2}$ est impair, $y=0$ et par conséquent $F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}.k\right)=0$,

„ $\frac{n}{2}$ „ pair, $y=\infty$ „ „ „ $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{k}}.k\right)=0$;

donc on aura

$$F(x.k) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} F\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{\frac{n^2-4}{2}}x^{n^2-4}, \quad . \; . \; . \quad (2')$$

$$\varphi(x.k) = (-1)^{\frac{n}{2}} \varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{\frac{n^2}{2}}x^{n^2}.$$

Posant

$$n^2 - 4 = 4p, \quad n^2 = 4q,$$

et

$$F(x.k) = A_0 + A_2x^2 + \dots + A_{2m}x^{2m} + \dots + A_{4p-2m}x^{4p-2m} + \dots + A_{4p}x^{4p},$$

$$\varphi(x.k) = Z_0 + Z_2x^2 + \dots + Z_{2m}x^{2m} + \dots + Z_{4q-2m}x^{4q-2m} + \dots + Z_{4q}x^{4q},$$

on trouvera, de la même manière que dans le cas où n est impair,

$$A_0 = n, \quad Z_0 = 1,$$

et, ayant égard à la relation (2'),

$$A_{4p-2m} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} A_{2m} k^{2p-2m}, \quad Z_{4q-2m} = (-1)^{\frac{n}{2}} Z_{2m} k^{2q-2m},$$

donc

$$F(x.k) = A_0(1 \pm k^{2p} x^{4p}) + A_2(1 \pm k^{2p-2} x^{4p-4}) x^2$$
$$+ \ldots + A_{2m}(1 \pm k^{2p-2m} x^{4p-4m}) x^{2m} + \ldots + A_{2p} x^{2p},$$
$$\varphi(x.k) = Z_0(1 \mp k^{2q} x^{4q}) + \ldots + Z_{2m}(1 \mp k^{2q-2m} x^{4q-4m}) x^{2m} + \ldots + Z_{2q} x^{2q},$$

où il faudra prendre le signe supérieur si $\frac{n}{2}$ est impair, et le signe inférieur si $\frac{n}{2}$ est pair; faisant dans $F(x.k)$ $m = p$, et dans $\varphi(x.k)$ $m = q$, l'on voit que dans le premier cas l'on aura $Z_{2q} = 0$ et dans le second $A_{2p} = 0$.

On trouvera aussi, comme dans le cas où n est impair,

$$F(kx.\tfrac{1}{k}) = F(x.k), \quad \varphi(kx.\tfrac{1}{k}) = \varphi(x.k),$$

d'où il suit que la forme générale des coëfficients A et Z sera la même que dans ce cas.

On a encore

$$\sqrt{(1-k^2y^2)} = \frac{\pi(x.k)}{\varphi(x.k)}, \quad \sqrt{(1-y^2)} = \frac{\pi'(x.k)}{\varphi(x.k)},$$

où π et π' sont du dégré n^2; n étant pair, l'on a

$$\text{Cos.amp.}(nu + niK') = (-1)^{\frac{n}{2}} \text{Cos.amp.} nu,$$

$$\Delta \text{amp.}(nu + niK') = (-1)^{\frac{n}{2}} \Delta \text{amp.} nu,$$

donc, si l'on change u en $u + iK'$, ou x en $\frac{1}{kx}$,

$$\sqrt{(1-k^2y^2)} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)}{\varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right)}, \quad \sqrt{(1-y^2)} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\pi'\left(\frac{1}{kx}.k\right)}{\varphi\left(\frac{1}{kx}.k\right)},$$

ou

$$\sqrt{(1-k^2y^2)} = \frac{\pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{\frac{n^2}{2}}x^{n^2}}{\varphi(x.k)}, \quad \sqrt{(1-y^2)} = \frac{\pi'\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{\frac{n^2}{2}}x^{n^2}}{\varphi(x.k)},$$

donc

$$\pi(x.k) = \pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{\frac{n^2}{2}}x^{n^2}, \quad \pi'(x.k) = \pi'\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{\frac{n^2}{2}}x^{n^2},$$

tandisque l'on obtient encore de la même manière que dans le cas où n est impair,

$$\pi(x.k) = \pi'(kx.\tfrac{1}{k}), \quad \pi'(x.k) = \pi(kx.\tfrac{1}{k}),$$

et par conséquent

$$\pi\left(\frac{1}{kx}.k\right)k^{\frac{n^2}{2}}x^{n^2} = \pi'(kx.\tfrac{1}{k}), \quad \pi'\left(\frac{1}{kx}\right)k^{\frac{n^2}{2}}x^{n^2} = \pi(kx.\tfrac{1}{k}).$$

Ainsi l'on obtient, pour la forme générale des fonctions π et π',

$$\pi(x.k) = B_0(1+k^{2q}x^{4q}) + \dots + B_{2m}(1+k^{2q-2m}x^{4q-4m})x^{2m} + \dots + B_{2q}x^{2q},$$

$$\pi'(x.k) = B_0'(1+k^{2q}x^{4q}) + \dots + B_{2m}'(1+k^{2q-2m}x^{4q-4m})k^{2m}x^{2m} + \dots$$
$$\dots + B_{2q}'k^{2q}x^{2q},$$

où B' est ce que devient B lorsqu'on y change k en $\frac{1}{k}$, de sorte que B_{2m} sera par rapport à k tout au plus du dégré $2m$, tandisque l'on a aussi $B_0 = B_0' = 1$.

De la même manière que pour n impair l'on trouve

1. à la place des équations (6):

$$F(\xi.k_1) = F\left(\frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.k\right)(1-\xi^2)^{\frac{n^2-4}{2}}, \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

$$\varphi(\xi.k_1) = \pi'\left(\frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.k\right)(1-\xi^2)^{\frac{n^2}{2}},$$

$$\pi'(\xi.k_1) = \varphi\left(\frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.k\right)(1-\xi^2)^{\frac{n^2}{2}},$$

$$\pi(\xi.k_1) = \pi\left(\frac{\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.k\right)(1-\xi^2)^{\frac{n^2}{2}}.$$

Ici il ne parait pas que l'on puisse déduire de la fonction F les trois autres φ, π et π', mais de l'une de ces dernières l'on peut déduire les deux autres, et tandisque la deuxième et la troisième des équations précédentes ne different pas entre-elles, la quatrième en est une conséquence. En effet la deuxième donne, si l'on échange k et k_1 entre-eux, et en vertu de la relation $\pi'(x.k_1) = \pi(k_1 x.\frac{1}{k_1})$,

$$\varphi(\xi.k) = \pi\left(\frac{k_1\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}, \frac{1}{k_1}\right)(1-\xi^2)^{\frac{n^2}{2}},$$

et celle-ci, remarquant que $\varphi(k\xi.\frac{1}{k}) = \varphi(\xi.k)$, et que par la substitution de $\frac{1}{k}$ à la place de k, k_1^2 devient $1-\frac{1}{k^2} = -\frac{k_1^2}{k^2}$,

$$\varphi(\xi.k) = \pi\left(\frac{-k_1\xi}{\sqrt{(1-k^2\xi^2)}}\cdot\frac{k}{k_1}\sqrt{-1}\right)(1-k^2\xi^2)^{\frac{n^2}{2}},$$

donc

$$\pi\left(\frac{k_1\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}\cdot\frac{1}{k_1}\right)(1-\xi^2)^{\frac{n^2}{2}} = \pi\left(\frac{-k_1\xi}{\sqrt{(1-k^2\xi^2)}}\cdot\frac{k}{k_1}\sqrt{-1}\right)(1-k^2\xi^2)^{\frac{n^2}{2}},$$

ce qui, en posant

$$\frac{k_1\xi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\xi^2)}} = \eta,$$

devient

$$\pi(\eta.\frac{1}{k_1}) = \pi\left(\frac{\eta\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-\eta^2)}}\cdot\frac{k}{k_1}\sqrt{-1}\right),$$

qui, changeant k_1 en $\frac{1}{k_1}$, ou k^2 en $1-\frac{1}{k_1^2} = -\frac{k^2}{k_1^2}$, et par conséquent $\frac{k}{k_1}\sqrt{-1}$ en k, est la même que la quatrième des équations (6').

Ecrivant dans les formules (7) et (8) q à la place de p, on aura les coëfficients de π et π', exprimés en ceux de φ, et réciproquement.

2. à la place des équations (9), (10), et (11):

$$F(n-2)F(n+2) = \varphi^2(2)F^2(n) - F^2(2)\varphi^2(n), \quad \ldots\ldots \quad (9')$$

$$\varphi(n-2)\varphi(n+2) = \varphi^2(2)\varphi^2(n) - k^2x^4(1-x^2)^2(1-k^2x^2)^2F^2(2)F^2(n),$$

$$\varphi(n\mp 2)F(n\pm 2) = \pi(2)\pi'(2)F(n)\varphi(n) \pm F(2)\varphi(2)\pi(n)\pi'(n).$$

$$\varphi(n \mp 2)\,\pi(n \pm 2) \quad \ldots\ldots \quad (10')$$
$$= \varphi(2)\,\pi(2)\,\varphi(n)\,\pi(n) \mp k^2x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)\,F(2)\,\pi'(2)\,F(n)\,\pi'(n),$$
$$F(n \mp 2)\,\pi(n \pm 2) = \varphi(2)\,\pi(2)\,F(n)\,\pi(n) \mp F(2)\,\pi(2)\,\varphi(n)\,\pi'(n).$$

$$\varphi(n \mp 2)\,\pi'(n \pm 2) \quad \ldots\ldots \quad (11')$$
$$= \varphi(2)\,\pi'(2)\,\varphi(n)\,\pi'(n) \mp x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)\,F(2)\,\pi(2)\,F(n)\,\pi(n),$$
$$F(n \mp 2)\,\pi'(n \pm 2) = \varphi(2)\,\pi(2)\,F(n)\,\pi'(n) \mp F(2)\,\pi'(2)\,\varphi(n)\,\pi(n);$$

3. pour la valeur particulière de k, $k=0$,

$$\varphi(x.0) = \pi(x.0) = 1, \quad F(x.0) = \frac{\mathrm{Sin}\,[n\,\mathrm{Arc.Sin} = x]}{x\sqrt{(1-x^2)}},$$
$$\pi'(x.0) = \mathrm{Cos}\,[n\,\mathrm{Arc.Cos} = x],$$

donc,

$$F(x.0) = n - \frac{n(n^2-4)}{1.2.3}x^2 \quad \ldots\ldots \quad (12')$$
$$+ \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5}x^4 - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7}x^6 + \ldots,$$

$$\pi'(x.0) = 1 - \frac{n^2}{1.2}x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \ldots;$$

4. pour la valeur particulière de k, $k=1$,

$$F(x.1) = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{2x}(1-x^2)^{\frac{(n-2)(n+2)}{4}}, \ldots \quad (13')$$
$$\varphi(x.1) = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}(1-x^2)^{\frac{n(n-1)}{4}},$$
$$\pi(x.1) = \pi'(x.1) = (1-x^2)^{\frac{n^2}{4}};$$

5. pour les valeurs particulières de x, $x=1$, $x=\frac{1}{k}$ et $x=\frac{1}{\sqrt{\pm k}}$,

(14′)

$$F(1.k) = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\,n(1-k^2)^{\frac{n^2}{4}-1}, \qquad F\left(\frac{1}{k}.k\right) = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\,n\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{n^2}{4}-1},$$

$$\varphi(1.k) = (1-k^2)^{\frac{n^2}{4}}, \qquad \varphi\left(\frac{1}{k}.k\right) = \left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{n^2}{4}},$$

$$\pi'(1.k) = (-1)^{\frac{n}{2}}(1-k^2)^{\frac{n^2}{4}}, \qquad \pi'\left(\frac{1}{k}.k\right) = \left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{n^2}{4}},$$

$$\pi(1.k) = (1-k^2)^{\frac{n^2}{4}}; \qquad \pi\left(\frac{1}{k}.k\right) = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{n^2}{4}};$$

$$n = 4m \qquad \text{ou} \qquad n = 4m+2$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right) = 0, \qquad \text{,,} \quad = (-1)^{\frac{n-2}{4}} 2\left[\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{k}}\right]^{\frac{n^2-4}{4}},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right) = (-1)^{\frac{n}{4}}\left[\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{k}}\right]^{\frac{n^2}{4}}, \qquad \text{,,} \quad = 0,$$

$$\pi'\left(\frac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right) = \left[\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{k}}\right]^{\frac{n^2}{4}}, \qquad \text{,,} \quad = \sqrt{k}\left[\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{k}}\right]^{\frac{n^2}{4}};$$

$$\pi\left(\frac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right) = \pi'\left(\frac{1}{\sqrt{\pm k}}.k\right), \qquad \text{,,} \quad = \mp\sqrt{k}\left[\frac{2(1\mp k)}{\sqrt{k}}\right]^{\frac{n^2}{4}}.$$

Les valeurs des deux dernières colonnes ont été trouvées de la manière suivante; si l'on fait $x = \sqrt{\frac{1}{\pm k}}$ les équations (9') deviennent:

$$F(n-2)\,F(n+2) = -4\varphi^2(n), \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\varphi(n-2)\,\varphi(n+2) = -4\,\frac{(1\mp k)^4}{k^2}\,F^2(n),$$

$$\varphi(n-2)\,F(n+2) = \varphi(n+2)\,F(n-2),$$

dont la dernière, en y diminuant n de deux unités, donne successivement

$$\frac{F(n)}{\varphi(n)} = \frac{F(n-4)}{\varphi(n-4)} = \frac{F(n-8)}{\varphi(n-8)} = \ldots = \frac{F(n-4m)}{\varphi(n-4m)},$$

donc, si n est de la forme $4m$,

$$\frac{F(n)}{\varphi(n)} = \frac{F(0)}{\varphi(0)} = \frac{0}{1} = 0,$$

et $\varphi(n)$ ne pouvant devenir infiniment grande pour une valeur finie de x,

$$F(n) = F(4m) = 0,$$

mais, si n est de la forme $4m+2$, $\varphi(2)$ étant nul pour la valeur $x = \frac{1}{\sqrt{\pm k}}$,

$$\frac{F(n)}{\varphi(n)} = \frac{F(2)}{\varphi(2)} = \infty;$$

donc

$$\varphi(n) = \varphi(4m+2) = 0$$

ce qui s'accorde avec les relations (2'). Ainsi l'on a par les deux premières (α)

$$F(4m-2)\,F(4m+2) = -4\varphi^2(4m), \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

$$\varphi(4m)\,\varphi(4m+4) = -4\frac{(1\mp k)^4}{k^2}F^2(4m+2),$$

qui en posant

$$\alpha = \frac{2(1\mp k)}{\sqrt{k}}.$$

par la multiplication conduisent à

$$\frac{\varphi(4m+4)}{F(4m+2)} = \alpha^4\frac{\varphi(4m)}{F(4m-2)},$$

d'où successivement

$$\frac{\varphi(4m)}{F(4m-2)} = \alpha^4\frac{\varphi(4m-4)}{F(4m-6)},$$

$$\ldots = \ldots$$

$$\frac{\varphi(4)}{F(2)} = \alpha^4\frac{\varphi(0)}{F(-2)};$$

le produit de ces m dernières donne

$$\frac{\varphi(4m)}{F(4m-2)} = \alpha^{4m}\frac{\varphi(0)}{F(-2)} = -\tfrac{1}{2}\alpha^{4m}, \quad \ldots \quad (\gamma)$$

qui par la combinaison avec (β), où

$$\frac{\varphi^2(4m)}{F^2(4m-2)} = -4\frac{F(4m+2)}{F(4m-2)},$$

conduit à

$$F(4m+2) = -\alpha^{8m}F(4m-2)$$

d'où successivement

$$F(4m-2) = -\alpha^{8m-8}F(4m-6),$$

$$\ldots = \ldots\ldots$$

$$F(2) = -F(-2),$$

de sorte que le produit des $m+1$ équations donne

$$F(4m+2) = (-1)^{m+1}\alpha^{4m(m+1)}F(-2) = (-1)^m 2\alpha^{4m(m+1)}$$

d'où, par (γ),

$$\varphi(4m) = (-1)^m \alpha^{4m^2}$$

ce qui, écrivant pour m sa valeur $\frac{n-2}{4}$ ou $\frac{n}{4}$, donnera les premières formules des deux dernières colonnes (14'), dont les autres se déduisent d'une maniere analogue des équations (10') et (11').

Comme dans le cas de n impair, l'on aura $\overset{2m}{A_0} = 0$ quand $2m =$ ou $> n$, ainsi que $\overset{2m}{Z_0} = 0$ quelque soit m, excepté $m = 0$, et $Z_2 = 0$ quelque soit n, tandisque la première des équations (6') conduit à une relation entre les coëfficients A qui est la même que (15); ainsi l'on obtiendra de même les deux polynomes G et H, et l'on aura généralement

$$-\frac{m}{1}\overset{2m}{A_0} - 2\overset{2m}{A_2} = \frac{2p-m+1}{1}\overset{2m-2}{A_0},$$

où

$$p = \frac{n^2-4}{4}$$

tandisque $F(x.0)$ fait voir que l'on a

$$\overset{2m}{A_0} = (-1)^m \frac{n(n^2-4)(n^2-16)\dots(n^2-(2m)^2)}{1.2.3.4.5\dots 2m(2m+1)},$$

d'où, diminuant m d'une unité,

$$\overset{2m-2}{A_0} = (-1)^{m-1} \frac{n(n^2-4)(n^2-16)\dots(n^2-(2m-2)^2)}{1.2.3.4.5\dots(2m-2)(2m-1)}$$

et l'on obtiendra

$$\overset{2m}{A_2} = (-1)^m \frac{n(n^2-4)\dots(n^2-(2m-2)^2)}{1.2.3\dots(2m-2)(2m-1)} \cdot \frac{m(mn^2-(3m+1))}{2m(2m+1)},$$

ainsi l'on connaitra les coëfficients A_{2m} jusqu'à A_6 inclusivement. Pour déterminer $\overset{8}{A_4}$, connaissant par ce qui précède $\overset{8}{A_0}$ et $\overset{8}{A_2}$, l'on substitue ces valeurs dans l'équation qui à servie dans le cas de n impair, ce qui donnera, après la réduction,

$$\overset{8}{A_0} + 2\overset{8}{A_2} + \overset{8}{A_4} = \frac{n(n^2-4)(n^2-10)(3n^4-310n^2+1392)}{2^7.3^2.5.7},$$

puis l'on trouvera

$$\overset{8}{A_0} + 2\overset{8}{A_2} = \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)(11n^2-56)}{2^7.3^3.5.7};$$

par substraction l'on trouvera $\overset{8}{A}_4$, et l'on connaitra la valeur totale A_8 ci-après (17').

Pour déterminer $\overset{10}{A}_4$, connaissant par ce qui précède $\overset{10}{A}_0$ et $\overset{10}{A}_2$, on a premièrement (voyez le cas de n impair)

$$10\overset{10}{A}_0+6\overset{10}{A}_2+5\overset{10}{A}_4=\frac{n(n^2-4)(n^2-12)(7n^6+118n^4-3182n^2+17232)}{2^7.3^3.5.7},$$

puis

$$10\overset{10}{A}_0+6\overset{10}{A}_2=-\frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)(n^2-64)(4n^2-37)}{2^5.3^4.5.7.11};$$

ayant déterminé par substraction $\overset{10}{A}_4$, on connaitra la valeur totale de A_{10} ci-après (17') qui est le dernier des coëfficients A_{2m} que l'on puisse déterminer au moyen des équations (6).

Posant, dans π et π',

$$B_{2m}=\overset{2m}{B}_0+\overset{2m}{B}_2k^2+\dots+\overset{2m}{B}_{2m}k^{2m},$$

on aura, en vertu de $\pi(x.0)=1$, $\overset{2m}{B}_0=0$ excepté $\overset{0}{B}_0=1$, et parce que

$$B_{2m}'k^{2m}=\overset{2m}{B}_{2m}+\overset{2m}{B}_{2m-2}k^2+\dots+\overset{2m}{B}_2k^{2m-2}$$

on aura, ayant égard à la valeur de $\pi'(x.0)$,

$$\overset{2m}{B}_{2m}=(-1)^m\frac{n^2(n^2-4)\dots(n^2-(2m-2)^2)}{1.2.3.4\dots(2m-1)2m},$$

et par conséquent

$$\overset{2m-2}{B}_{2m-2}=(-1)^{m-1}\frac{n^2(n^2-4)\dots\{n^2-(2m-4)^2\}}{1.2.3.4\dots(2m-3)(2m-2)};$$

ensuite on aura

$$-\binom{m}{1}\overset{2m}{B}_{2m}-2\overset{2m}{B}_{2m-2}=\binom{2q-m+1}{1}\overset{2m-2}{B}_{2m-2},\ \text{où}\ q=\frac{n^2}{4},$$

et l'on trouvera

$$\overset{2m}{B}_{2m-2}=(-1)^m\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)\dots\{n^2-(2m-4)^2\}}{1.2.3.4.5.6\dots(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{(m-1)(n^2-1)}{2(2m-1)},$$

et ainsi l'on connaitra les coëfficients B_{2m} jusqu'à B_4 inclusivement. Pour déterminer B_6, l'on a, comme dans le cas de n impair,

$$\overset{6}{B}_6+\overset{6}{B}_4+\overset{6}{B}_2=-\binom{2q}{3}\overset{0}{B}_0,$$

ou

$$\overset{6}{B}_6+\overset{6}{B}_4+\overset{6}{B}_2=-\frac{n^2(n^2-2)(n^2-4)}{1.2.3.2^3}$$

puis, par les formules précédentes,

$$\overset{6}{B}_6+\overset{6}{B}_4=-\frac{n^2(n^2-4)(7n^2-22)}{2.3.4.5.6},$$

d'où

$$\overset{6}{B}_2=-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{2.3^2.5},$$

de sorte que l'on aura B_6 ci-après (19'), tandis que les B_{2m} suivants ne peuvent plus être déterminés de cette manière.

Ecrivant dans la formule (8) q à la place de p, on a

$$Z_{2m}'=(-1)^m\left[\binom{2q}{m}B_0'+\binom{2q-1}{m-1}B_2'k^2+\dots+B_{2m}'k^{2m}\right]$$

et, substituant dans cette formule

$$B_0'=1,\quad B_2'=-\frac{n^2}{1.2}k^{-2},\quad B_4'=\frac{n^2}{1.2}\left[\frac{n^2-4}{3.4}+\frac{n^2-1}{2.3}k^2\right]k^{-4},$$

$$B_6'=-\frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}\left[\frac{n^2-16}{5.6}+\frac{n^2-1}{5}k^2+\frac{4(n^2-1)}{3.5}k^4\right]k^{-6},$$

on trouvera, faisant successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$, $m=3$,

$$Z_0'=1,\quad Z_2'=0 \text{ (ce qu'on savait déjà)},$$

$$Z_4'=-\frac{n^2(n^2-1)}{2^2.3}(1-k^2),\quad Z_6'=\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{2.3^2.5}(2-3k^2+k^4),$$

qui, en y changeant k en k_1 ou k^2 en $1-k^2$, donneront pour Z_4 et Z_6 les mêmes expressions algébriques que celles que l'on a trouvées dans le cas de n impair; il en sera de même des Z_{2m} suivants, qui au moyen de la formule (7), y écrivant q à la place de p, donneront encore B_8 et B_{10}, de sorte que l'on aura les formules suivantes:

$$A_0 = n, \quad A_2 = -\frac{n(n^2-4)}{1.2.3}(1+k^2), \quad . \quad . \quad . \quad (17')$$

$$A_4 = \frac{n(n^2-4)}{1.2.3.4.5}[(n^2-16)(1+k^4)+2(2n^2-7)k^2],$$

$$A_6 = -\frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6.7}[(n^2-36)(1+k^6)+3(3n^2-10)(1+k^2)k^2],$$

$$A_8 = \frac{n(n^2-4)}{2.3.4....8.9}\{(n^2-16)(n^2-36)[(n^2-64)(1+k^8)+4(4n^2-13)(1+k^4)k^2]$$
$$-6(n^6+196n^4-2114n^2+4752)k^4\},$$

$$A_{10} = -\frac{n(n^2-4)}{2.3....10.11}\{(n^2-16)(n^2-36)(n^2-64)[(n^2-100)(1+k^{10})$$
$$+5(5n^2-16)(1+k^6)k^2]$$
$$-2(247n^8-882n^6-72102n^4+661112n^2-1368000)(1+k^2)k^4\}.$$

Les coëfficients Z_{2m} ont les mêmes expressions algébriques que les Z_{2m} dans le cas de n impair.

$$B_0 = 1, \quad B_2 = -\frac{n^2}{2}, \quad B_4 = \frac{n^2}{2^3.3}[2(n^2-1)+(n^2-4)k^2]k^2], \quad (19')$$

$$B_6 = -\frac{n^2(n^2-4)}{2^4.3^2.5}[8(n^2-1)+6(n^2-1)k^2+(n^2-16)k^4]k^2,$$

$$B_8 = +\frac{n^2(n^2-4)}{2^7.3^2.5.7}[32(n^2-1)(n^2-9)+4(n^2-1)(15n^2-51)k^2$$
$$+12(n^2-1)(n^2-16)k^4+(n^2-16)(n^2-36)k^6]k^2,$$

$$B_{10} = -\frac{n^2(n^2-4)}{2^8.3^4.5^2.7}[128(n^2-1)(n^2-9)(n^2-16)$$
$$+64(n^2-1)(n^2-9)(7n^2-22)k^2+12(n^2-1)(n^2-9)(29n^2-104)k^4$$
$$+20(n^2-1)(n^2-16)(n^2-36)k^6+(n^2-16)(n^2-36)(n^2-64)k^8]k^2.$$

Si l'on pose généralement, que n soit impair ou pair,

$$y_n = \frac{f(x.k)}{\varphi(x.k)},$$

les équations (9) et (9'), qui déterminent entièrement les fonctions F et φ, deviennent identiquement les mêmes, ce qui prouve la remarque, que l'expression algébrique des coëfficients de φ sera la même que n soit pair ou impair; tandis que l'on voit encore, l'expression algébrique de f étant unique; que l'expression algébrique de $F(x.k)$ si n est impair sera la même que celle de $F(x.k)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ si n est pair. De la même manière on verra que l'expression algébrique des fonctions π et π' pour des valeurs paires de n sera la même que celle de $\pi\sqrt{(1-k^2x^2)}$ et $\pi'\sqrt{(1-x^2)}$ pour des valeurs impaires de n. Si nous distinguons les fonctions F, π et π', pour des valeurs paires de n de celles pour des valeurs impaires de n, par un trait, en écrivant pour les premières $\overline{F}$, $\overline{\pi}$ et $\overline{\pi}'$, on aura que l'expression algébrique de

$$\overline{F}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \text{ est identique avec } F,$$
$$\overline{\varphi} \quad „ \quad „ \quad „ \quad \varphi,$$
$$\overline{\pi} \quad „ \quad „ \quad „ \quad \pi\sqrt{(1-k^2x^2)},$$
$$\overline{\pi}' \quad „ \quad „ \quad „ \quad \pi'\sqrt{(1-x^2)}.$$

On pourra encore vérifier cette remarque aux valeurs de ces fonctions pour la valeur particulière $k=1$, données par les formules (13) et (13'). Multipliant la première des formules (13') par $(1-x^2)$ on obtient la première (13); la deuxième (13') et (13) sont identiquement les mêmes, et multipliant la troisième (13) par $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ on obtient la troisième (13'). Cette remarque s'applique aussi aux fonctions goniométriques que l'on obtient en faisant $k=0$.

Remarquons encore que l'on peut aussi déterminer les coëfficients A et Z par l'intégration d'une équation aux différences finies, de la même manière que dans le cas où n est impair.

Par la formule pour l'addition, l'on obtient encore, raisonnant comme l'on a fait pour obtenir les équations (9) etc., et distinguant les fonctions où le multiplicateur est pair par un trait de celles où il est impair,

1. si n est impair,

$$\overline{F}(n-1)\,\overline{F}(n+1)=\frac{F^2(n)-\varphi^2(n)}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$\overline{\varphi}(n-1)\,\overline{\varphi}(n+1)=\varphi^2(n)-k^2x^4\,F^2(n),$$

$$\overline{\varphi}(n\mp1)\,\overline{F}(n\pm1)=F(n)\,\varphi(n)\pm\pi(n)\,\pi'(n);$$

$$\bar{\varphi}(n\mp 1)\bar{\pi}(n\pm 1)=(1-k^2x^2)\varphi(n)\pi(n)\mp k^2x^2(1-x^2)F(n)\pi'(n),$$
$$\bar{F}(n\mp 1)\bar{\pi}(n\pm 1)=F(n)\pi(n)\mp\varphi(n)\pi'(n);$$

$$\bar{\varphi}(n\mp 1)\bar{\pi}'(n\pm 1)=(1-x^2)\varphi(n)\pi'(n)\mp x^2(1-k^2x^2)F(n)\pi(n),$$
$$\bar{F}(n\mp 1)\bar{\pi}'(n\pm 1)=F(n)\pi'(n)\mp\varphi(n)\pi(n).$$

2. si n est pair

$$F(n-1)F(n+1)=(1-x^2)(1-k^2x^2)\bar{F}^2(n)-\bar{\varphi}^2(n),$$
$$\varphi(n-1)\varphi(n+1)=\bar{\varphi}^2(n)-k^2x^4(1-x^2)(1-k^2x^2)\bar{F}^2(n),$$
$$\varphi(n\mp 1)F(n\pm 1)=(1-x^2)(1-k^2x^2)\bar{F}(n)\bar{\varphi}(n)\pm\bar{\pi}(n)\bar{\pi}'(n);$$

$$\varphi(n\mp 1)\pi(n\pm 1)=\bar{\varphi}(n)\bar{\pi}(n)\mp k^2x^2(1-x^2)\bar{F}(n)\bar{\pi}'(n),$$
$$F(n\mp 1)\pi(n\pm 1)=(1-x^2)\bar{F}(n)\bar{\pi}(n)\mp\bar{\varphi}(n).\bar{\pi}'(n);$$

$$\varphi(n\mp 1)\pi'(n\pm 1)=\bar{\varphi}(n)\bar{\pi}'(n)\mp x^2(1-k^2x^2)\bar{F}(n)\bar{\pi}(n)$$
$$F(n\mp 1)\pi'(n\pm 1)=(1-k^2x^2)\bar{F}(n)\bar{\pi}'(n)\mp\bar{\varphi}(n)\bar{\pi}(n).$$

La formule pour la duplication, ou

$$y_{2n}=\frac{2y_n\sqrt{(1-k^2y_n^2)(1-y_n^2)}}{1-k^2y_n^4},$$

donne, 1. si n est impair,

$$\bar{F}(2n)=2F(n)\varphi(n)\pi(n)\pi'(n),$$
$$\bar{\varphi}(2n)=\varphi^4(n)-k^2x^4F^4(n).$$

2. Si n est pair:

$$\bar{F}(2n)=2\bar{F}(n)\bar{\varphi}(n)\bar{\pi}(n)\bar{\pi}'(n),$$
$$\bar{\varphi}(2n)=\bar{\varphi}^4(n)-k^2x^4(1-x^2)^2(1-k^2x^2)^2\bar{F}^4(n).$$

Si n est pair $F(2n)$ sera divisible par $1-k^2x^4$, mais si n est impair $\varphi(2n)$ aura ce facteur; il s'en suit, par les relations contenues dans les formules (6'), que dans ce dernier cas $\pi(2n)$ et $\pi'(2n)$ auront le facteur $1-2k^2x^2+k^2x^4$ et $1-2x^2+k^2x^4$.

On pourra vérifier les formules et les relations trouvées dans ce qui précède aux valeurs suivantes de F, φ et π pour les valeurs de n, $n=2$, $n=4$ et $n=6$.

$$n=2,\quad p=0,\quad q=1.$$

$$F(x.k)=2,\quad \varphi(x.k)=1-k^2x^4,\quad \pi(x.k)=1-2k^2x^2+k^2x^4.$$

$$n=4,\quad p=3,\quad q=4.$$

$$F(x.k)=4(1-k^6x^{12})-8[1+k^2](1-k^4x^8)x^2+20k^2(1-k^2x^4)x^4,$$

$$\varphi(x.k)=(1+k^8x^{16})-20k^2(1+k^4x^8)x^4+32[1+k^2]k^2(1+k^2x^4)x^6$$
$$-[16(1+k^4)+58k^2]k^2x^8,$$

$$\pi(x.k)=(1+k^8x^{16})-8k^2(1+k^6x^{12})x^2+[20+8k^2]k^2(1+k^4x^8)x^4$$
$$-[32+24k^2]k^2(1+k^2x^4)x^6+[16+54k^2]k^2x^8.$$

$$n=6,\quad p=8,\quad q=9.$$

$$F(x.k)=6(1+k^{16}x^{32})-32[1+k^2](1+k^{14}x^{28})x^2$$
$$+[32(1+k^4)+208k^2](1+k^{12}x^{24})x^4-224[1+k^2]k^2(1+k^{10}x^{20})x^6$$
$$-[728k^4(1+k^8x^{16})x^8+2912[1+k^2]k^4(1+k^6x^{12})x^{10}$$
$$-[3360(1+k^4)+9296k^2]k^4(1+k^4x^8)x^{12}$$
$$+[2048(1+k^6)+11680(1+k^2)k^2]k^4(1+k^2x^4)x^{14}$$
$$-[512(1+k^8)+7680(1+k^4)k^2+16220k^4]k^4x^{16},$$

$$\varphi(x.k)=(1-k^{18}x^{36})-105k^2(1-k^{14}x^{28})x^4+448[1+k^2]k^2(1-k^{12}x^{24})x^6$$
$$-[864(1+k^4)+2172k^2]k^2(1-k^{10}x^{20})x^8$$
$$+[768(1+k^6)+4608(1+k^2)k^2]k^2(1-k^8x^{16})x^{10}$$
$$-[256(1+k^8)+4384(1+k^4)k^2+10740k^2]k^2(1-k^6x^{12})x^{12}$$
$$+[1536(1+k^6)+10944(1+k^2)k^2]k^4(1-k^4x^8)x^{14}$$
$$-[4032(1+k^4)k^2+9954k^4]k^4(1-k^2x^4)x^{16},$$

$$\pi(x.k)=(1+k^{18}x^{36})-18k^2(1+k^{16}x^{32})x^2+[105+48k^2]k^2(1+k^{14}x^{28})x^4$$
$$-[448+336k^2+32k^4]k^2(1+k^{12}x^{24})x^6$$
$$+[864+1956k^2+240k^4]k^2(1+k^{10}x^{20})x^8$$
$$-[768+4416k^2+3384k^4]k^2(1+k^8x^{16})x^{10}$$
$$+[256+4320k^2+9620k^4+4368k^6]k^2(1+k^6x^{12})x^{12}$$
$$-[1536+10560k^2+15408k^4+4320k^6]k^4(1+k^4x^8)x^{14}$$
$$+[4032+20574k^2+16848k^4+2304k^6]k^6(1+k^2x^4)x^{16}$$
$$-[12160+26220k^2+9728k^4+512k^6]k^8x^{18}.$$

XII.

Noch ein Beitrag zur Berechnung des mittleren Zahlungstermines bei Ratenzahlungen.

Von

Herrn Dr. *L. R. Schulze*,

Gymnasiallehrer in Schwerin i. M.

In Thl. XXXIV. Hft. 3. dieses Archivs pag. 291—295 befindet sich ein Aufsatz des Herrn Dr. Schlechter, in welchem die bisher angewendete Formel für Berechnung des mittleren Zahlungstermines bei Ratenzahlungen als nicht rationell dargestellt und eine andere an ihre Stelle gesetzt wird. Wenn man sich auch vollkommen mit der Widerlegung der älteren Formel einverstanden erklären kann, so muss ich doch gestehen, dass es mir scheint, als genüge die von Herrn Dr. Schlechter gegebene Gleichung ebenfalls nicht vollständig der Aufgabe, und es sei mir gestattet, meine Bedenken im Folgenden offen auszusprechen.

Die gestellte Aufgabe war folgende: Eine Anzahl von Kapitalien c_1, c_2, c_3, ... c_n sind resp. nach den Zeitabschnitten t_1, t_2, t_3, ... t_n unverzinslich zu bezahlen. Wann ist der Zeitpunkt, in welchem alle diese Zahlungen auf einmal geleistet werden dürfen, ohne dass eine der beiden Parteien etwas verliert; einfache Zinsen zu p $^0/_0$ gerechnet. Es wurde die Lösung vorgeschlagen: man discontire jedes einzelne Kapital auf den jetzigen Zeitpunkt und sehe zu, nach welcher Zeit die Summe der discontirten Kapitale mit einfachen Zinsen so weit angewachsen ist, dass sie der Summe der Ratenzahlungen gleicht. Die auszuführende Rechnung gestaltet sich daher folgendermaassen: man bestimme den gesuchten Zeitabschnitt T, nach dessen Ablauf die Zahlung zu leisten ist, aus der Gleichung

$$(1+zT)\sum_{k=1}^{k=n}\frac{c_k}{1+zt_k}=\sum_{k=1}^{k=n}c_k, \tag{I}$$

in welcher, wie überhaupt im Folgenden, $\frac{p}{100}=z$ gesetzt ist. Aufgelöst giebt die Gleichung:

$$T=\frac{\Sigma\frac{c_k t_k}{1+zt_k}}{\Sigma\frac{c_k}{1+zt_k}}. \tag{II}$$

Sehen wir zu, wie die gegebene Lösung mit der Berechnung ähnlicher Aufgaben übereinstimmt, die im Leben alltäglich vorkommen. Ist ein Kapital c nach t Jahren fällig, man will es aber mit Berücksichtigung von p % jährlichen einfachen Zinsen nach τ Jahren abtragen, so wird die dann zu zahlende Summe C niemals dadurch berechnet, dass man das Kapital auf irgend einen dritten Zeitpunkt, z. B. den jetzigen, zurückdiscontirt und dann diese Summe von da ab bis zur wirklichen Zahlung verzinst. Man rechnet also nicht

$$C=\frac{c}{1+zt}(1+z\tau); \tag{A}$$

sondern man unterscheidet in der Praxis zwei Fälle:

1) Ist $\tau>t$, so verzinst man c von der Zeit t an bis zur Zeit τ, setzt also:

$$C=c[1+z(\tau-t)]. \tag{B}$$

2) Ist aber $\tau<t$, so discontirt man das Kapital c von der Zeit t auf τ zurück nach der Formel

$$C=\frac{c}{1+z(t-\tau)}. \tag{C}$$

Warum man bei der Berechnung des mittleren Zahlungstermines von diesem Usus abweichen und die einzelnen Posten auf den jetzigen Zeitpunkt zurückdiscontiren und von da an bis zum Termin der wirklichen Zahlung verzinsen soll nach Analogie der Formel (A), dafür weiss ich keinen Grund anzugeben. Deshalb geht mein Vorschlag dahin, dass man den gesuchten Zeitpunkt so bestimme, dass alle früher fälligen Zahlungen nach Formel (B) bis dahin verzinst plus allen später fälligen Zahlungen nach (C) darauf zurückdiscondirt gleich der Summe der ungeänderten Raten ist.

Die Rechnung, welche man nach meinem Dafürhalten ausführen müsste, würde demnach folgende sein:

Nehmen wir an, die Zeiten seien, der Grösse nach geordnet, $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots . < t_n$, so ist zunächst zu entscheiden, zwischen welche zwei unter ihnen T fällt. Man wird selten irren, wenn man als diese Grenzwerthe diejenigen annimmt, zwischen welche das nach der althergebrachten Formel

$$(T) = \frac{\Sigma c_k t_k}{\Sigma c_k} \qquad \text{(III)}$$

berechnete (T) fällt. Sei $t_i < (T) < t_{i+1}$, so berechne man T durch Approximation aus der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=i} c_k[1 + z(T - t_k)] + \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{c_k}{1 + z(t_k - T)} = \sum_{k=1}^{k=n} c_k. \qquad \text{(IV)}$$

Fällt dieses T zwischen t_i und t_{i+1}, so ist damit die Rechnung beendigt; liegt es aber zwischen zwei anderen Zeiten t_r und t_{r+1}, so ist dieselbe Formel von Neuem anzuwenden, nur dass man als obere Grenze der ersten Summe $k = r$, als untere der zweiten Summe $k = r + 1$ zu setzen hat.

Der somit gefundene Zahlungstermin zeigt sich unabhängig von dem Tage, an welchem der Contract abgeschlossen ist, und einzig abhängig von den Daten, an welchen die Zahlungen laut Uebereinkunft zu leisten sind, während sich nach Formel (II) dieser Termin ändert, wenn man auf verschiedene Zeitpunkte zurückdiscontirt. Aendert man alle t um dieselbe Grösse a, so findet man nach (IV) ein neues T, das von dem vorher berechneten ebenfalls um a verschieden ist, was nach (II) nicht stattfindet. Ob das eine oder andere der Natur der Aufgabe besser entspricht, wage ich nicht zu entscheiden, erlaube mir nur noch die Bemerkung, dass das Datum des mittleren Zahlungstermines, welches man mit Zugrundelegung der Zinseszinsformel

$$\Sigma c_k (1 + z)^{T - t_k} = \Sigma c_k \qquad \text{(V)}$$

findet, keine Aenderung erleidet, mag man als Ausgangspunkt der Rechnung einen Tag wählen, welchen man nur immer will.

Zum Schlusse mögen noch einige Beispiele folgen, in welchen die, nach Formel (II), (IV) und (V) berechneten Zahlungstermine zur Vergleichung neben einander geschrieben sind.

1) Es sind 400 Thlr. nach drei Jahren und 600 Thlr. nach acht Jahren fällig; wann muss die ganze Summe von 1000 Thlr. auf einmal bezahlt werden?

Formel (III) giebt $(T) = 6$, doch findet man nach Formel

	(II)	(IV)	(V)
für $p=2$	$T=5{,}8909$	5,9516	5,9412
3	5,8436	5,9265	5,9105
4	5,8000	5,9026	5,8809
5	5,7600	5,8779	5,8516

2) Kehren wir die vorige Aufgabe um: sei das Kapital von 600 Thlr. nach 3 Jahren, das von 400 Thlr. nach 8 Jahren zu zahlen, so ist nach (III) $(T) = 5$, aber nach

	(II)	(IV)	(V)
für $p=2$	$T=4{,}8928$	4,9289	4,9410
3	4,8474	4,8941	4,9123
4	4,8064	4,8598	4,8840
5	4,7692	4,8261	4,8563

3) Will man eine jährliche Rente, welche 10 Jahre nach einander ausgezahlt werden soll und deren erster Termin nach einem Jahre fällig ist, mit einem Male bezahlen, so findet man nach (III) $(T) = 5{,}5$; aber nach

	(II)	(IV)	(V)
für $p=2$	$T=5{,}3520$	5,4194	5,4184
3	5,2866	5,3806	5,3782
4	5,2276	5,3427	5,3384
5	5,1732	5,3056	5,2991.

Man sieht, dass sich die aus (IV) berechneten Werthe in allen drei Beispielen näher an die, mit Berücksichtigung der Zinseszinsen gefundenen anschliessen, als die aus (II) bestimmten, ein Umstand, der mir auch zu Gunsten der Formel (IV) zu sprechen scheint.

XIII.

Nachtrag zu der Abhandlung: „Ueber die Inhaltsberechnung der Körper“ in Thl. XXXII. Nr. XXIV. S. 241.

Von

Herrn Doctor *Ligowski*,

Lehrer an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und am See-Cadetten-Institut in Berlin.

Um die Formeln für die mechanische Quadratur nach Gauss zu erhalten, war nach Band 32. Seite 243. des Archivs die Auflösung der Gleichungen

$$
\text{(I)}\left\{\begin{array}{lll}
1) & K_0+K_1+K_2\,\ldots\ldots\; K_r & =1,\\
2) & K_0\mu_0+K_1\mu_1+K_2\mu_2\,\ldots\; K_r\mu_r & =\frac{1}{2},\\
3) & K_0\mu_0^2+K_1\mu_1^2+K_2\mu_2^2\,\ldots\; K_r\mu_r^2 & =\frac{1}{3},\\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
h+1) & K_0\mu_0^h+K_1\mu_1^h+K_2\mu_2^h\,\ldots\; K_r\mu_r^h & =\frac{1}{h+1},\\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
2r+2) & K_0\mu_0^{2r+1}+K_1\mu_1^{2r+1}+K_2\mu_2^{2r+1}\ldots K_r\mu_r^{2r+1} & =\frac{1}{2r+2}
\end{array}\right.
$$

nöthig. Zur Auflösung dieser Gleichungen setze man:

$$
\text{(II)}\qquad \begin{array}{l}
f(\mu)=(\mu-\mu_0)(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)\ldots(\mu-\mu_r)=0\\
\quad =\mu^{r+1}+C_1\mu^r+C_2\mu^{r-1}+\ldots C_r\mu+C_{r+1}=0.
\end{array}
$$

Multiplicirt man nun der Reihe nach die Gleichungen

$$
\begin{array}{l}
1),\ 2),\ 3),\ \ldots\ r+2),\\
2),\ 3),\ 4),\ \ldots\ r+3),\\
3),\ 4),\ 5),\ \ldots\ r+4),\\
\ldots\ldots\ldots\\
r+1),\ r+2),\ r+3),\ \ldots\ 2r+2)
\end{array}
$$

mit

$$C_{r+1},\ C_r,\ C_{r-1},\ \ldots .\ C_1,\ 1$$

und addirt je $r+2$ solcher multiplicirten Gleichungen, so erhält man, da

$$K_s\mu_s^p(C_{r+1}+C_r\mu_s+C_{r-1}\mu_s^2\ldots .\ C_1\mu_s^r+\mu_s^{r+1})$$

nach (II) gleich Null ist, zur Bestimmung der C die linearen Gleichungen:

$$\text{(III)}\quad\begin{cases}\frac{C_{r+1}}{1}+\frac{C_r}{2}+\frac{C_{r-1}}{3}\ldots .\frac{C_1}{r+1}+\frac{1}{r+2}=0,\\ \frac{C_{r+1}}{2}+\frac{C_r}{3}+\frac{C_{r-1}}{4}\ldots .\frac{C_1}{r+2}+\frac{1}{r+3}=0,\\ \frac{C_{r+1}}{3}+\frac{C_r}{4}+\frac{C_{r-1}}{5}\ldots\frac{C_1}{r+3}+\frac{1}{r+4}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{C_{r+1}}{r+1}+\frac{C_r}{r+2}+\frac{C_{r-1}}{r+3}\ldots\frac{C_1}{2r+1}+\frac{1}{2r+2}=0.\end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}\ldots . & \frac{1}{r+1}\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}\ldots . & \frac{1}{r+2}\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}\ldots . & \frac{1}{r+3}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{1}{r+1}, & \frac{1}{r+2}, & \frac{1}{r+3}\ldots . & \frac{1}{2r+1}\end{vmatrix}C_{r+1-\varrho}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}\ldots . & \frac{1}{\varrho}, & -\frac{1}{r+2}, & \frac{1}{\varrho+2}\ldots . & \frac{1}{r+1}\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}\ldots . & \frac{1}{\varrho+1}, & -\frac{1}{r+3}, & \frac{1}{\varrho+3}\ldots . & \frac{1}{r+2}\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}\ldots . & \frac{1}{\varrho+2}, & -\frac{1}{r+4}, & \frac{1}{\varrho+4}\ldots . & \frac{1}{r+3}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{1}{r+1}, & \frac{1}{r+2}\ldots . & \frac{1}{\varrho+r}, & -\frac{1}{2r+2}, & \frac{1}{\varrho+2+r}\ldots . & \frac{1}{2r+1}\end{vmatrix}$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \cdots & \frac{1}{r+1} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4} \cdots & \frac{1}{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{r+1}, & \frac{1}{r+2}, & \frac{1}{r+3} \cdots & \frac{1}{2r+1} \end{vmatrix} C_{r+1-\varrho}$$

$$=(-1)^{r+1-\varrho} \begin{vmatrix} \frac{1}{1}, & \frac{1}{2} \cdots & \frac{1}{\varrho}, & \frac{1}{\varrho+2} \cdots & \frac{1}{r+1}, & \frac{1}{r+2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \cdots & \frac{1}{\varrho+1}, & \frac{1}{\varrho+3} \cdots & \frac{1}{r+2}, & \frac{1}{r+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{r+1}, & \frac{1}{r+2} \cdots & \frac{1}{\varrho+r}, & \frac{1}{\varrho+r+2} \cdots & \frac{1}{2r+1}, & \frac{1}{2r+2} \end{vmatrix}$$

Bezeichnen wir der Kürze halber die oben stehende Determinante durch D, die unten stehende durch Δ, dann ist

$$\text{(IV)} \qquad C_{r+1-\varrho} = (-1)^{r+1-\varrho} \cdot \frac{\Delta}{D}.$$

Nach Cauchy (man sehe Theorie der Determinanten von Baltzer S. 52.) ist nun:

$$\text{(V)}$$

$$\frac{P(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) \cdot P(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)}{\underset{i,k}{\Pi}(\alpha_i - \beta_k)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1-\beta_1}, & \frac{1}{\alpha_1-\beta_2}, \cdots & \frac{1}{\alpha_1-\beta_n} \\ \frac{1}{\alpha_2-\beta_1}, & \frac{1}{\alpha_2-\beta_2}, \cdots & \frac{1}{\alpha_2-\beta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\alpha_n-\beta_1}, & \frac{1}{\alpha_n-\beta_2}, \cdots & \frac{1}{\alpha_n-\beta_n} \end{vmatrix}$$

in welchem Ausdrucke

$$\begin{aligned} P(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_1) \text{mal} \\ (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2) \ldots (\alpha_n - \alpha_2) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

und $\overset{i,k}{\Pi}(\alpha_i-\beta_k)$ das Product aller Nenner der Determinante ist.

Die Determinante D in (IV) lässt sich nun in folgender Form darstellen:

$$D=\left|\begin{matrix} \frac{1}{r+2-(r+1)}, & \frac{1}{r+2-r} \cdots & \frac{1}{r+2-(\varrho+r+2)} \cdots & \frac{1}{r+2-1} \\ \frac{1}{r+3-(r+1)}, & \frac{1}{r+3-r} \cdots & \frac{1}{r+3-(\varrho+r+2)} \cdots & \frac{1}{r+3-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2r+2-(r+1)}, & \frac{1}{2r+2-r} \cdots & \frac{1}{2r+2-(\varrho+r+2)} \cdots & \frac{1}{2r+2-1} \end{matrix}\right|$$

Durch Vergleichung mit (V)

$$\alpha_1=r+2,\quad \alpha_2=r+3\ \ldots\ \alpha_{r+1}=2r+2,$$
$$\beta_1=r+1,\quad \beta_2=r\qquad \beta_{r+1}=1.$$

Daher

$$P(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{r+1})=2!\,3!\,4!\ldots r!,$$

$$P(\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_{r+1})=(-1)^{\frac{(r+1)r}{2}}P(\beta_{r+1}\,\beta_r\ldots\beta_1)=(-1)^{\frac{(r+1)r}{2}}.2!\,3!\,4!\ldots r!,$$

$$\underset{i,k}{\Pi}(\alpha_i-\beta_k)=(r+1)!\,(r+2)!\,\frac{(r+3)!}{2!}\ldots\frac{(2r+1)!}{r!},$$

mithin:

$$\text{(VI)}\qquad D=\frac{(2!\,3!\,4!\ldots r!)^3}{(r+1)!\,(r+2)!\,(r+3)!\ldots(2r+1)!}.$$

Es ist ferner:

$$\Delta=\left|\begin{matrix} \frac{1}{r+3-(r+2)}, & \frac{1}{r+3-(r+1)} \cdots & \frac{1}{r+3-(r+3-\varrho)}, & \frac{1}{r+3-(r+1-\varrho)} \\ & & & \cdots\frac{1}{r+3-1} \\ \frac{1}{r+4-(r+2)}, & \frac{1}{r+4-(r+1)} \cdots & \frac{1}{r+4-(r+3-\varrho)}, & \frac{1}{r+4-(r+1-\varrho)} \\ & & & \cdots\frac{1}{r+4-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2r+3-(r+2)}, & \frac{1}{2r+3-(r+1)} \cdots & \frac{1}{2r+3-(r+3-\varrho)}, & \\ & & \frac{1}{2r+3-(r+1-\varrho)} \cdots & \frac{1}{2r+3-1} \end{matrix}\right|$$

Durch Vergleichung mit (V):

$$\alpha_1 = r+3,\quad \alpha_2 = r+4,\quad \alpha_3 = r+5, \ldots .\ \alpha_{r+1} = 2r+3;$$
$$\beta_1 = r+2,\quad \beta_2 = r+1,\quad \beta_3 = r, \ldots .\ \beta_\varrho = r+3-\varrho,\quad \beta_{\varrho+1} = r+1-\varrho.$$
$$\ldots .\ \beta_{r+1} = 1.$$

Daher

$$P(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots . \alpha_{r+1}) = 2!\,3!\,4! \ldots .\, r!,$$

$$P(\beta_1\beta_2 \ldots . \beta_{r+1}) = (-1)^{\frac{(r+1)r}{2}} . \frac{2!\,3!\,4! \ldots . r!\,(r+1)!}{\varrho!\,(r+1-\varrho)!}$$

und

$$\Pi_{i,k}(\alpha_i - \beta_k) = \frac{\varrho!\,(r+2)!\,(r+3)! \ldots . (2r+2)!}{(r+1+\varrho)!\,2!\,3! \ldots . r!},$$

also:

$$\text{(VII)}\qquad \varDelta = \frac{(2!\,3!\,4! \ldots . r!)^3 (r+1)!\,(r+1+\varrho)!}{(\varrho)!^2 (r+1-\varrho)!\,(r+2)!\,(r+3)! \ldots . (2r+2)!}.$$

Mithin ist:

$$C_{r+1-\varrho} = (-1)^{r+1} . \frac{\varDelta}{D},$$

$$\text{(VIII)}\qquad C_{r+1-\varrho} = (-1)^{r+1-\varrho} . \frac{((r+1)!)^2 (r+1+\varrho)!}{(\varrho!)^2 (r+1-\varrho)!\,(2r+2)!}.$$

Da hierdurch die Gleichung $f(\mu) = 0$ bestimmt ist, so laseen sich die Unbekannten $\mu_0, \mu_1, \ldots . \mu_n$ berechnen, wodurch die Bestimmung von $K_0, K_1, \ldots . K_r$ auf die Lösung linearer Gleichungen zurückgeführt ist.

Für den speciellen Fall $r=2$ hat man:

1) $K_0 + K_1 + K_2 = 1$, 2) $K_0\mu_0 + K_1\mu_1 + K_2\mu_2 = \frac{1}{2}$,

. . . .

6) $K_0\mu_0^5 + K_1\mu_1^5 + K_2\mu_2^5 = \frac{1}{6}$.

Aus (VII) erhält man:

$C_1 = -\frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{3}{5}$, $C_3 = -\frac{1}{20}$, also $f(\mu) = \mu^3 - \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{3}{5}\mu - \frac{1}{20} = 0$.

Da nun nach S. 244. des 32. Bandes des Archivs $\mu_1 = \frac{1}{2}$ ist, so ergiebt sich zur Bestimmung von μ_0 und μ_2: $\mu^2 - \mu + \frac{1}{10} = 0$, also $\mu_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{3}{5}})$ und $\mu_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{3}{5}})$, und hieraus $K_0 = K_2 = \frac{5}{18}$, $K_1 = \frac{8}{18}$.

Die Auflösung der linearen Gleichungen, welche zur Bestimmung von $K_0, K_1, \ldots . K_r$ dienen, hat Lagrange allgemein gegeben; man sehe darüber Baltzer, Theorie der Determinanten S. 53.

Die vorstehende Bestimmung der Constanten für die mechanische Quadratur nach Gauss ist vollständig verschieden von dem, was darüber von Jacobi im I. und Schellbach im XVI. Bde. des Crelle'schen Journals veröffentlicht worden ist.

XIV. *)

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Doctor O. Böklen zu Sulz a. N. in Würtemberg.

1. Beschreibt man in ein Dreieck und um dasselbe einen Kreis, so gibt es noch unendlich viele Dreiecke, welche dem ersten Kreis einbeschrieben und dem andern umbeschrieben sind. Bei allen diesen Dreiecken sind konstant:

a) das Produkt der Sinus der halben Winkel,
b) das Produkt der Cosinus der halben Winkel,
c) das Produkt der Tangenten der halben Winkel,
d) die Summe der Cotangenten der halben Winkel,
e) die Quadratsumme der Sinus der halben Winkel,
f) die Quadratsumme der Cosinus der halben Winkel,
g) die Summe der Cosinus der ganzen Winkel,
h) die Summe der Sinus der ganzen Winkel,
i) die Summe der Sinus der doppelten Winkel,
k) die Summe der Seiten,
l) das Produkt der Seiten,
m) der Inhalt,
n) das Produkt der Höhen,
o) die Summe der reciproken Werthe der Höhen,
p) die Summe der Mittellothe,
q) die Summe der Halbmesser der drei äusseren Berührungskreise,
r) das Produkt der Halbmesser dieser Berührungskreise,
s) das Produkt der drei Linien, welche vom Mittelpunkt des inneren Berührungskreises nach den Ecken gezogen werden,
t) das Produkt der drei Linien, welche vom Mittelpunkt eines äusseren Berührungskreises nach den Ecken gezogen werden,
u) das Produkt der drei Linien, welche von den Ecken nach den Mittelpunkten der die Gegenseiten von aussen berührenden Kreise gezogen werden,

*) Weil die folgende grössere Abhandlung in diesem Hefte abgebrochen werden musste, so konnten diese Aufgaben diesmal nicht, wie sonst immer gewöhnlich, an's Ende des Heftes gebracht werden. Der lehrreiche Inhalt derselben machte aber einen baldigen Abdruck wünschenswerth. G.

v) das Produkt der drei Linien, welche die Berührungspunkte des inneren Berührungskreises verbinden,

w) der Inhalt des durch diese Linien gebildeten Dreiecks.

Bezeichnet man die Halbmesser der festen Kreise, welchen die Dreiecke ein- und umbeschrieben sind, mit R und r, so findet noch Folgendes statt:

*) x) Der Höhendurchschnitt der Dreiecke bewegt sich auf einem Kreis, dessen Halbmesser $= R - 2r$.

Der Schwerpunkt dieser Dreiecke bewegt sich auf einem Kreis, dessen Halbmesser

$$= \tfrac{1}{3}(R - 2r).$$

y) Bei den Dreiecken, welche die Fusspunkte der Höhen von den oben genannten Dreiecken bilden, ist konstant:

aa) die Summe der Sinus der halben Winkel,
bb) die Summe der Cosinus der halben Winkel,
cc) das Produkt der Cosinus der halben Winkel,
dd) die Summe der Sinus der ganzen Winkel,
ee) die Summe der Seiten,
ff) der Halbmesser des umschriebenen Kreises, dessen Mittelpunkt sich auf einem Kreise vom Halbmesser $\tfrac{1}{2}R - r$ bewegt.

z) Bei den Dreiecken, welche die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise von den im Anfang dieses Satzes genannten Dreiecken bilden, ist konstant:

aa) das Produkt der Cosinus der Winkel,
bb) das Produkt der Sinus der Winkel,
cc) das Produkt der Tangenten der Winkel,
dd) die Summe der Cotangenten der Winkel,
ee) die Quadratsumme der Cosinus der Winkel,
ff) die Quadratsumme der Sinus der Winkel,
gg) die Summe der Sinus der doppelten Winkel,
hh) die Summe der Cosinus der doppelten Winkel,
ii) die Summe der Cosinus der vierfachen Winkel,
kk) das Produkt der Seiten,
ll) der Inhalt,
mm) der Halbmesser und die Lage des umbeschriebenen Kreises,
nn) der Höhendurchschnitt dieser Dreiecke ist unbeweglich,
oo) der Mittelpunkt ihrer umbeschriebenen Kreise bewegt sich auf einem Kreis, dessen Halbmesser $\tfrac{1}{2}R - r$.

---

*) Dieser Satz ist kürzlich in den Nouv. Annales von Terquem et Gérono vorgelegt.

pp) die Mitten der Seiten, die Fusspunkte der Höhen und die Mitten der oberen Abschnitte der Höhen bewegen sich auf Einem festen Kreis.

Aehnliche Eigenschaften haben die Dreiecke, welche den durch die Ecken gehenden Kreis und einen äusseren Berührungskreis gemeinschaftlich haben.

2. Wenn man die beiden Kreise konstruirt, welche einem sphärischen Dreiecke umbeschrieben und einbeschrieben sind, so gibt es noch unendlich viele sphärische Dreiecke, deren Seiten den ersteren Kreis berühren und deren Ecken auf dem andern Kreisbogen liegen. Für alle diese Dreiecke ist konstant:

a) das Produkt der Sinus der halben Winkel,
b) das Produkt der Cosinus der halben Winkel,
c) das Produkt der Tangenten der halben Winkel,
d) das Produkt der Sinus der ganzen Winkel,
e) die Summe der Cosinus der ganzen Winkel,
f) die Summe der Sinus der ganzen Winkel,
g) das Produkt der Sinus der halben Seiten,
h) das Produkt der Cosinus der halben Seiten,
i) das Produkt der Tangenten der halben Seiten,
k) das Produkt der Sinus der ganzen Seiten,
l) die Summe der Cosinus der ganzen Seiten,
m) die Summe der Sinus der ganzen Seiten,
n) der Inhalt,
o) die Summe der Seiten,
p) der Inhalt des durch ihre Ecken bestimmten ebenen Dreiecks,
q) das Produkt der Seiten des durch ihre Ecken bestimmten ebenen Dreiecks,
r) das Produkt der Sinus der Winkel dieses Dreiecks,
s) das Produkt der Sinus der Winkel, welche die Ebene dieses Dreiecks mit den durch die Seiten der entsprechenden sphärischen Dreiecke gehenden Ebenen macht,
t) das Produkt von den Tangenten der Halbmesser ihrer äusseren Berührungskreise,
u) das Produkt von den Tangenten der Halbmesser der drei Kreise, wovon jeder durch zwei Ecken eines solchen Dreiecks und die Gegenpunkte der dritten Ecke geht,
v) das Produkt der Sinus von den drei Höhen.

3. Wenn sich ein sphärisches Dreieck so bewegt, dass seine Ecken auf einem bestimmten Kugelkreis liegen und seine Seiten einen andern Kreis berühren, so ist dasselbe auch bei seinem Polardreieck der Fall.

XV.

Weitere Ausführung der politischen Arithmetik.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

Erstes Kapitel.

Begründung einiger Lehrsätze in der politischen Arithmetik.

§. 1.

Die sogenannte politische Arithmetik erhält mit Ausbildung der socialen Verhältnisse immer grössere Bedeutung. Die Renten-Anstalten, Lebensversicherungen, Tontinen, Annuitäten, Wittwenkassen u. s. w., überhaupt alle derartige Wohlthätigkeits-Anstalten finden darin ihre Begründung. Die Staats-Anleihen und ihre Amortisation, die Operationen des Geldmarkts, die Werthbestimmung der Staatspapiere nach verschiedenem Kurse und Zinsfuss können nur durch sie erörtert und festgestellt werden.

Die Feststellung und Begründung derjenigen Lehrsätze, auf welchen die Einrichtung aller der genannten Anstalten beruht und die allen dabei vorkommenden Geldgeschäften eine sichere Unterlage gibt, hat eine nicht minder wichtige Bedeutung und wird daher um so mehr gerechtfertigt erscheinen, als sie bisher nicht versucht wurde.

Seit etwa zwei Jahrhunderten werden in den hieher gehörigen Schriften zwei Methoden über die Lehre von der Zinsrechnung „die mit einfachen Zinsen" und „die mit zusammengesetzten oder Zinseszinsen" aufgestellt und von Vielen als gleichzeitig neben einander zu Recht bestehend angenommen. Wendet man nun die beiden Methoden auf einen und denselben Fall an, so zeigt sich leicht, dass sie auf verschiedene Resultate führen und führen müssen. Der Unterschied ihrer

Ergebnisse ist um so grösser, je grösser die Zahl der Jahre und die in Frage kommenden Summen sind. Die Verschiedenheit der Resultate aber muss Jeden, den Mathematiker wie den Nichtmathematiker, überraschen; denn es ist offenbar die erste Bedingung einer richtigen Logik, dass die Beantwortung eines und desselben Problems, auch durch verschiedene Auflösungsmethoden, auf ein und dasselbe Resultat führen müsse.

Geschieht diess nicht und kommt man durch verschiedene Methoden auf verschiedene Resultate, so ist es nothwendig, über die Richtigkeit der angewendeten Methoden selbst weiter nachzuforschen und über ihre Zulassbarkeit zu entscheiden. Die unrichtige muss dann als solche bezeichnet und entfernt werden.

Diese Bemerkungen, die so einfach sind, dass, wie ich glaube, kein gegründeter Einwurf ihnen entgegen gestellt werden kann, fanden dennoch bis jetzt nicht die verdiente Geltung. Noch hat man sich bis auf die neueste Zeit nicht über sie geeinigt und sie als Führer zur Feststellung der ersten Grundsätze in der politischen Arithmetik benutzt, wie sich diess beispielsweise an der lange Jahre hindurch geführten Streitfrage in der Mathematik und Jurisprudenz über die richtige Berechnung des Interusuriums als deutlicher Beleg zeigt.

Die Frage tritt deutlicher hervor, wenn man sie an einen bestimmten Fall anschliesst, wozu der folgende von einer etwas grösseren Zeitdauer gewählt wird.

Ein Kapital von 1000 (Thlr. oder Gulden) *) ist zwanzigmal am Ende der zwanzig folgenden Jahre ohne Zinsen fällig. Wie gross ist der gegenwärtige Werth sämmtlicher Zahlungen bei 5 Proc. Zinsen?

Berechnet man den fraglichen Werth bei einfachen Zinsen nach der Formel:

$$1)\qquad R = K.\frac{100}{100+np} = \frac{K}{1+n\frac{p}{100}} = \frac{K}{1{,}0np}$$

(s. meine Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen §. 13. S. 20.), setzt $K=1000$, $p=5$; $n=1,2,3....20$, so findet sich Folgendes:

*) Da es gleichgültig ist, ob man bei Kapital-Werth-Berechnungen in Gulden oder Thalern etc. rechnet, so wird künftig dieses Prädikat nicht besonders beigefügt werden.

$$R = \frac{1000}{1,05} + \frac{1000}{1,1} + \frac{1000}{1,15} + \ldots \frac{1000}{1,95} + \frac{1000}{2}$$

$= 952,380952\ldots$	$+\ 645,161290\ldots$
$909,090909\ldots$	$625,000000\ldots$
$869,565217\ldots$	$606,060606\ldots$
$833,333333\ldots$	$588,235294\ldots$
$800,000000\ldots$	$571,428571\ldots$
$769,230769\ldots$	$555,555555\ldots$
$740,740740\ldots$	$540,540540\ldots$
$714,285714\ldots$	$526,315789\ldots$
$689,655172\ldots$	$512,820512\ldots$
$666,666666\ldots$	$500,000000\ldots$
$7944,949475\ldots$	$5671,118160\ldots$

$$= 13616,067635\ldots$$

Rechnet man mit Zinseszinsen nach der Formel

$$2)\qquad R = \frac{K}{(1+\frac{p}{100})^n} = \frac{K.100^n}{(100+p)^n} = \frac{K}{1,0p^n},$$

(§. 27. S. 50. m. Anleit.), so ist der gegenwärtige Werth sämmtlicher Kapitalzahlungen bei Einführung der oben angegebenen Werthe:

$$R = \frac{1000}{1,05} + \frac{1000}{1,05^2} + \frac{1000}{1,05^3} + \ldots \frac{1000}{1,05^{20}} = 1000.\frac{1-1,05^{-20}}{0,05}$$

$$= 12462,210343\ldots.$$

Im ersten Falle ist der Werth 13616,067635...., im zweiten 12462,210343.... Diese Resultate stimmen nicht überein. Der Unterschied beträgt 1153,857292.... Welches ist die richtige, in der Natur der Sache begründete Werthbestimmung?

Diese Frage soll nun beantwortet werden. Es dürfte dabei nicht uninteressant sein, erst die Geschichte der Streitfrage zu verfolgen, worüber schon in meiner Anleitung einige Andeutungen gegeben wurden. Es soll in Kürze geschehen, wobei jedoch nicht eine vollständige Darlegung beabsichtigt ist, sondern nur insoweit, als mir die Schriften aus früherer Zeit zugänglich waren.

§. 2.

Geschichtliche Notizen. Seit etwas mehr als zwei Jahr-

hunderten scheint man die Rechnung mit Zinseszinsen gekannt zu haben.

Kästner berichtet nämlich (Fortsetzung der Rechenkunst. 2. Aufl. S. 170.) dass Stevin (Les oeuvres mathématiques de Simon Stevin, revues et augmentées p. Alb. Girard. Fol. Leyde. Elzev. 1634.) Tafeln für die Rechnung mit Zinseszinsen aufgestellt und sie auf die Werthbestimmung fälliger Kapitalien angewendet habe. Die von ihm befolgte Rechnungsweise ist eine eigenthümliche, von der jetzigen theilweise verschiedene. Die Tafeln erstrecken sich auf dreissig Jahre und verschiedene Zinsfüsse. Sie zerfallen in drei Classen. Die erste gibt den Anwuchs eines gegenwärtigen Kapitals sammt Zinseszins für diesen Zeitraum an; die zweite den gegenwärtigen Werth einer später fälligen, unverzinslichen Summe; die dritte den gegenwärtigen Werth wiederholt fälliger, unverzinslicher Summen (Renten). Hiernach fehlt im Vergleich mit den jetzigen Tafeln diejenige Classe, welche Anwuchs wiederholt fälliger Kapitalien mit Zinseszinsen angibt.

Nach Kästner hat Stevin in der Practique de l'Arithmétique pg. 185. beide Rechnungsarten, die mit einfachen Zinsen (usurae simplices) und die mit Zinseszinsen (usurae compositae) gelehrt, und zwar so, dass schon vor Stevin's Zeiten die Frage: was jetzt statt eines nach einigen Jahren unverzinslich fälligen Kapitals gezahlt werden müsse, dahin beantwortet wurde, dass man nach Beschaffenheit der Umstände einfache Interessen oder zusammengesetzte gerechnet hat.

Ob Stevin die Rechnung mit Zinseszinsen zuerst oder ein Anderer vor ihm lehrte, ist nicht gesagt. So viel aber ist ersichtlich, dass Simon Stevin sie gekannt hat. Jedenfalls ist hiernach die Ansicht, wornach Leibnitz als der Begründer oder Erfinder der Rechnung mit Zinseszinsen gilt, als unrichtig zu bezeichnen, da sie schon geraume Zeit vor ihm gekannt war. Möglich ist, dass Leibnitz bei Bearbeitung seiner Abhandlung die Schriften Stevin's, ob sie gleich schon im Jahre 1608 zu Leyden in der Ursprache erschienen waren, nicht kannte.

Von nun an knüpft sich die Geschichte dieser für die politische Arithmetik wichtigen Rechnungsmethoden an die Geschichte der richtigen Berechnungsweise des Interusuriums, einer in der Wirklichkeit praktisch wichtigen Frage, und ist ganz innig mit ihr verwoben.

Carpzov theilte in seinem Werke „Opus Decisionum illustrium Saxonicarum. Lips." zuerst in der 1. Ausg. (vom

Jahre 1660) und dann in der zweiten (vom Jahre 1704) Decisio 275. pg. 597. Pinckard's Methode, das Interusurium zu berechnen, mit. Sie besteht im Wesentlichen darin, dass der Käufer oder Schuldner, der nach Verlauf einer bestimmten Zeit eine oder mehrere Summen zu zahlen hat, die Zinsen dieser Summen voll anrechnen, und im Falle er sogleich bezahlt, von der Schuldsumme abziehen darf.

Nach der nämlichen Bezeichnung wie im vorigen Paragraphen wäre demnach der gegenwärtige Werth einer nach n Jahren fälligen unverzinslichen Schuld bei p Procent

$$1) \qquad R = K - K.\frac{pn}{100} = K\left(1 - \frac{pn}{100}\right).$$

Im Jahre 1683 erschien in den Acta Eruditorum pg. 425. eine Abhandlung: „Meditatio juridico-mathematica de interusurio simplice" von Leibnitz, worin er seine Ansicht dahin ausspricht, dass der Werth des Interusuriums von den Rechtsgelehrten nicht hinlänglich und von andern nicht ganz richtig bestimmt werde. Er wendet nun die Zinszins-Rechnung auf die Werth-Ermittlung desselben an und fügt hinzu, dass sich dasselbe so auf eine genaue Weise bestimmen lasse. Den Beweis, dass diess die richtige Berechnungsart sei, gab er aber nicht, sondern blieb ihn schuldig *), denn er sagt nur, dass man den fraglichen Werth auf diese Weise bestimmen könne, nicht dass man ihn so und nicht anders bestimmen müsse, stellt sich dabei auch nicht ausschliesslich auf den Boden der Mathematik, die allein bei Entscheidung dieser Streitfrage maassgebend sein kann.

Die von Leibnitz aufgestellte Formel ist die §. 1. Nr. 2. angegebene:

$$2) \qquad R = \frac{K}{1{,}0p^n} = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} = \frac{K.100^n}{(100+p)^n}.$$

Er entwickelte sie aber nicht auf eine einfache naturgemässe Art

---

*) Die hierher gehörigen Worte, womit Leibnitz seine Abhandlung eröffnet, sind: Interusurium sive resegmentum anticipationis, vulgo Rabat, est differentia inter pecuniam in diem certum debitam et praesentem ejus valorem, seu quanto plus petat, qui plus temporis petit, vel quanto minus solvere aequum sit, qui post aliquot annos demum debiturus, nunc solvit. Hujus quantitas, quae apud Jurisconsultos passim non satis, et apud aliquos non satis recte explicatur, accurato calculo definiri potest, duabus suppositionibus ex jure assumtis.

und in der vorstehenden Form, sondern durch eine unendliche Reihe mittelst Auflösung des im Nenner stehenden Binomiums, nämlich durch:

$$3)\quad R = K\left(1 - n.\frac{p}{100} + \frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{p^2}{100^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.\frac{p^3}{100^3} + \ldots\right).$$

Diese allgemeine Reihe selbst theilte er nicht mit, sondern auf eine sehr umständliche Art die sich aus ihr ergebenden fünf ersten Fälle für $n=1, 2, 3, 4, 5$ und $p=5$. Er schreibt ferner für $\frac{p}{100}$ die Zahlen $\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$, setzt dann für die Vorzahlen (Fakultäten von n) der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Potenz die Einheiten, dann die natürliche Zahlenreihe, die Triangular- und Pyramidal-Zahlen, welche den Potenzen von $\frac{20}{21}, \frac{20^2}{21^2}, \frac{20^3}{21^3}, \ldots$ zugehören. Schliesslich ist eine Tafel angegeben, worin die Zahlenwerthe von $1{,}0p^{-n}$ auf 40 Jahre für den Zinsfuss 5 berechnet sind. pg. 432.

Die von Leibnitz aufgestellte Rechnungsart wurde vielfach missverstanden, wie sich später zeigen wird, und wobei die nicht zweckmässige Entwicklungsweise durch unendliche Reihen hauptsächlich mitgewirkt haben mag.

Gegen die beiden eben genannten Rechnungsarten trat zu Anfange des vorigen Jahrhunderts G. A. Hoffmann in einem Anhange zu seiner Schrift „Klugheit Haus zu halten“ oder „Prudentia oeconomica in formam artis redacta“ Dresden und Leipzig. (1. Aufl. 1731. 2. Aufl. 1737.) auf und zeigte darin das Unhaltbare der Pinckard'schen Methode, indem bei später fällig werdenden Kapitalien der Schuldner entweder zu einer viel zu geringen oder zu gar keiner Zahlung (wenn $1-\frac{np}{100}=0$ in Nr. 1 wird) angehalten werden, oder gar noch mit einer Forderung gegen den Gläubiger auftreten könne, wenn $\frac{np}{100}>1$ wird. Er machte mit Recht darauf aufmerksam, dass ein auch noch so spät fälliges Kapital nie, wie die Pinckard'sche Methode behauptet, durch das Interusurium aufgezehrt werden könne, sondern immer in der Gegenwart einen bestimmten, wenn auch kleinern oder sehr kleinen Werth habe.

Die von ihm aufgestellte Regel ist die Rechnung mit einfachen Zinsen. Sie wird durch die oben §. 1. angegebene Formel:

$$4) \qquad R = \frac{K}{1 + \frac{np}{100}} = \frac{K.100}{100 + np} = \frac{K}{1{,}0np}$$

ausgedrückt. Hoffmann entwickelt die Formel nicht in der vorstehenden Gestalt, sondern verdeutlicht sein Verfahren an besondern Fällen bei dem Zinsfuss 5. Er bestimmt zuerst den Werth des Interusuriums für sich auf eine ziemlich weitläufige und etwas zusammengesetzte Weise und leitet dann durch dessen Abzug die Grösse des dem Gläubiger auszuzahlenden Kapitals ab. Den Schluss auf die allgemeine Formel überlässt er dem Leser.

Merkwürdig ist, dass Hoffmann, wahrscheinlich durch die Leibnitz'sche Reihen-Entwicklung irre geführt, die Zins-Zins-Methode unrichtig auffasste, sie mit der Pinckard'schen zusammenwarf (§. 11. seiner Abhandlung) und behauptete, dass sie wie jene das Kapital endlich absorbire, jedoch bei 5 Procent erst in 21 Jahren, anstatt wie jene in 20. Seine sehr ausgedehnte Abhandlung umfasst 42 Seiten in 30 Paragraphen.

Von da an wurde die Pinckard'sche Methode als unverträglich mit richtigen Principien verlassen und aus der Wissenschaft verbannt. Der Streit aber, ob die Rechnung mit einfachen Zinsen (die Hoffmann'sche) oder die mit Zinses-Zinsen (die Leibnitz'sche) die richtige sei, fortgeführt.

Polack, Professor Juris und Matheseos auf der Universität zu Frankfurt a. d. O., trat in der ersten Auflage seiner Mathesis forensis v. J. 1734 (7. Kap. §. 32. u. ff.) als Vertheidiger der Hoffmann'schen und Gegner der Leibnitz'schen Methode auf und verwarf letztere aus den nämlichen unhaltbaren Gründen, als es Hoffmann gethan hatte.

Dagegen trat Bilfinger für die Richtigkeit der Leibnitzschen Methode in einer besondern, hiefür verfassten gründlichen Abhandlung in die Schranken, zeigte, dass die Leibnitz'sche Methode von ihren Gegnern unrichtig verstanden worden sei, dass eine sorgfältigere und bessere Benutzung des sogleich fälligen Kapitals, als die Hoffmann'sche Methode voraussetzt, von Seiten des Gläubigers möglich, ja geboten sei, und wies nach, dass diese durch die Leibnitz'sche Berechnungsweise gesichert sei. Auch machte Bilfinger darauf aufmerksam, dass der Schuldner oder Nutzniesser durch Anwendung der Hoffmann'schen Methode benachtheiligt werde, und hob die starken Differenzen hervor, welche sich durch Anwendung der beiden Rechnungsmethoden in der Werthbestimmung der Kapitalien bei nur einigermaassen bedeutenden Summen und Zeiträumen ergeben.

Er schickte diese Abhandlung dem Professor Polack zu. Letzterer nahm sie als Anhang zur dritten Auflage seiner Mathesis forensis vom Jahre 1756 auf, erkannte die von ihm begangenen Irrthümer (§. 53. und §. 54.) mit lobenswerther Aufrichtigkeit an, meinte indessen doch, dass die Leibnitz'sche Methode dem Rechte zuwider sei, weil die Gesetze die Forderung von Zinseszinsen (anatocismus) verbieten, und beharrte desshalb und zum Theil aus Rücksicht der Billigkeit auf der Richtigkeit der Hoffmann'schen Methode.

Von Clausberg entwickelt im vierten Theil seiner „demonstrativen Rechenkunst" zweite Aufl. vom Jahre 1748. Leipzig (die erste Auflage erschien im Jahre 1732) S. 1108 u. ff. beide Rechnungsarten und nennt die Rechnung mit einfachen Zinsen „gemeine Interessen-Rechnung" und die mit Zinseszinsen „Rechnung der Interesse auf Interesse." Auf die Frage: welcher von den beiden Arten man sich bei gerichtlichen „Subhastationibus" bedienen solle? gibt er S. 1233. §. 1278. folgende Antwort, „dass die Erörterung dieser Frage nicht den Arithmeticis, sondern den Rechtsgelehrten obliege, denn jene haben sich beflissen, die Richtigkeit beiderlei Rechnungsarten zu zeigen, und wird man wenig rechtschaffene Rechenbücher finden, in welchen solche zwei Arten zur Berechnung des Rabatts oder Interusurii von etlichen oder vielen Jahren nicht sollten angewiesen worden sein. Diese müssen hingegen aus den Rechten die Ursachen untersuchen, warum eigentlich Interesse auf Interesse zu nehmen verboten wird, auch wie weit solches Verbot zu extendiren, oder ob es ohne Exception sei; und aus solchen Gründen deduciren, welche Art zu erwählen."

Von einem gelehrten Freunde aufgefordert, seine eigene Ansicht über die Streitfrage auszusprechen, nimmt er keinen Anstand, zu erklären, dass seines Bedünkens, jedoch unmaassgeblich, die Rechnung mit Zinseszinsen der mit einfachen Zinsen „vorzuziehen sei", sucht dann den Einwurf des Anatocismus zu entkräften, S. 1234. §. 1279., und fügt bei, dass er in Gutachten, zu deren Erstattung er aufgefordert wurde, die erste Art angewendet habe.

Er bespricht darauf, §. 1282., die Carpzov'sche (Pinckard-sche), Leibnitz'sche und Hoffmann'sche Methode und bemerkt, dass Hoffmann die Leibnitz'sche Methode ganz unrichtig aufgefasst habe, dass Hoffmann die von ihm entwickelte Methode als eine „neue" bezeichne, was durchaus irrig sei, da er selbst (v. Clausberg) dieselbe schon im Jahre 1732 gelehrt habe und sie auch fast in „allen alten und neuen Rechenbüchern zu finden sei."

Dadurch geräth er mit Hoffmann in einen Streit, worauf letzterer in einem besondern Anhange zu Polack's Mathesis forensis, 3. Aufl., S. 129. ausführlich antwortet und die von ihm aufgestellte Methode als sein Eigenthum vindicirt. Augenscheinlich geht aber aus diesen Erörterungen hervor, dass Hoffmann nicht der Erfinder oder Begründer der nach ihm benannten Methode ist, obgleich er sich dafür hält, und dass sie mit Unrecht seinen Namen trägt, wie diess auch bei der Leibnitz'schen Methode der Fall ist.

Verfolgt man von jetzt an die Geschichte dieses Streits weiter, so lassen sich die dahin einschlagenden Schriften in Gruppen ordnen, welche sich für die eine oder die andere Rechnungsart erklären, oder die Sache unentschieden lassen und meinen, dass der Gesetzgebung und ihrer Auslegung, dem Uebereinkommen zwischen Schuldner und Gläubiger, den Umständen, Billigkeits-Rücksichten, der besondern Entscheidung im einzelnen Falle u. s. w. überlassen werden müsse, wie gerechnet werden soll.

Man sieht, dass es nicht gelang, einen festen Standpunkt zu gewinnen, und dass man nicht darauf dachte, aus derjenigen Wissenschaft Entscheidungsgründe zu holen, von welcher sie doch einzig und allein in dieser Streitfrage hergeholt werden können, nämlich von der Mathematik, denn nicht die Jurisprudenz, nicht Rücksicht, nicht besondere Umstände u. s. w. können die Richtigkeit des Calculs feststellen.

Kästner sucht in einem 1739 zu Leipzig erschienenen Programm: „Pro justitia calculi interusurii Leibnitziani" zu zeigen, dass die Rechnung mit Zinseszinsen vollkommen mit den Rechten übereinstimme (Fortsetzung der Rechenkunst, 2. Aufl., S. 175). Diesen Gedanken hält er aber nicht fest, denn er stellt in der zuletzt genannten Schrift die Lehre der Rechnung mit Zinseszinsen und der mit einfachen Zinsen zusammen, ohne den schuldigen Beweis für die Richtigkeit der einen oder der andern zu geben, und beschränkt sich darauf, den Einwurf des Anatocismus zu entfernen.

Auch Chassot de Florencourt spricht sich für die Zulassbarkeit der Rechnung mit Zinseszinsen in seinen „Abhandlungen aus der juridischen und politischen Rechenkunst, 1781", S. 8. und 9. aus und entwickelt in seiner Schrift nur diese, nicht die mit einfachen Zinsen.

Dasselbe thun Tetens in seiner „Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, 1785" und Meyer in seiner „Anleitung zur Berechnung der Leib-

renten und Anwartschaften, 1823"; eben so J. A. Grunert in seiner „Politischen Arithmetik, Leipzig 1841" u. A. Ferner wird nur die Lehre von der Zinszins-Rechnung in folgenden Schriften vorgetragen: „Traité des Annuités ou de rentes à terme connu p. M. Deparcieux. Paris 1781"; „Theorie von Wittwenkassen von Karsten, Halle 1784"; „Neue Theorie der Berechnung zusammengesetzter Zinse von J. J. Gremilliet (deutsch von Deyhle), Ulm 1825"; „Die Theorie der Lebensrenten, Lebensversicherungen, Wittwenkassen etc. von Baily (deutsch von Schnuse), Weimar 1839" u. A., so dass wohl vorauszusetzen ist, dass diese Rechnungsart von den genannten Schriftstellern als die richtige angenommen wird.

Dagegen erklärt sich Unger in seinen „Beiträgen zur Mathesi forensi" vom Jahre 1746, 1. Abhandl., unter gewissen Modifikationen für die Rechnung mit einfachen Zinsen, also für die Hoffmann'sche Methode, theilt aber auch in der 5. Abhandl. die Rechnung mit Zinseszinsen mit.

Michelsen entwickelt beide Rechnungs-Methoden in seiner „Anleitung zur juristischen, politischen und ökonomischen Rechenkunst, Halle 1782, 2 Thle.", lässt die Entscheidung der Frage: ob nach der einen oder andern Art bei der Anwendung auf den einzelnen Fall gerechnet werden müsse, von den Umständen abhängen, und meint, dass „diejenigen irren, welche ausschliessungsweise die eine oder die andere angewandt wissen wollen, und es lässt sich die angeführte Frage, allgemein genommen, auf keine Art und Weise bestimmt beantworten." Er erörtert seine Ansicht näher (S. 240. u. ff. 1. Thl.) und wird dadurch auf einen Vermittlungsvorschlag geführt, wornach das Mittel aus der Differenz genommen werden soll, falls sich eine solche durch Anwendung beider Rechnungsarten ergeben sollte.

Koch erklärt sich für die Zulässigkeit der Rechnung mit Zinseszinsen mit den durch die Gesetze bestimmten Einschränkungen in seiner „Gemein verständlichen Anleitung zur Anwendung der Logarithmen-Rechnung, Magdeb. 1809", S. 56. §. 39. Eben so hält Schweins in seiner „Zinszins-Rechnung für Geschäftsmänner, Darmst. 1812", Vorr. S. IV. die Rechnung mit Zinseszinsen in bestimmten Fällen für erlaubt.

Brune lässt die Streitfrage in seiner „Kurzgefassten Darstellung der einfachen und zusammengesetzten Zinsrechnung, Lemgo 1813" unentschieden und äussert sich in der Vorrede S. V. so: „Zwar ist in den meisten Rechnungsgeschäften

die Anwendung der einfachen Zinsrechnung nicht mehr gebräuchlich; allein es ist doch wenigstens nützlich, die Verschiedenheit der Resultate, welche eine nach einfachen und zusammengesetzten Zinsen berechnete Aufgabe hervorbringt, zu kennen. Es ist nicht die Sache des Calculators, sondern die der interessirten Partheien oder des Gesetzes, zu entscheiden, ob nach dieser oder jener Art gerechnet werden soll, und daher habe ich mich auch aller Untersuchungen darüber, welche von beiden in jedem vorgegebenen Falle eigentlich angewandt werden muss, enthalten. Ich habe nur gezeigt, wie man rechnen muss, wenn einfache oder Zinseszinsen vorausgesetzt werden."

Von woher, so muss man fragen, kann aber die Gesetzgebung die Entscheidungsgründe für die Richtigkeit der einen oder der andern Methode entnehmen, als von der Mathematik? d. i. von den Arithmeticis oder Calculatoren.

In diesen Worten ist im Wesentlichen die Geschichte der Streitfrage: ob die Rechnung mit einfachen oder mit Zinseszinsen die richtige sei? bis in die neuere Zeit bezeichnet. Nirgends zeigt sich ein fester Anhaltspunkt. Die Ansichten für die Richtigkeit der einen oder der andern stehen sich einerseits schroff entgegen, andererseits herrscht rathloses Schwanken, grosse Unsicherheit und Inconsequenz, denn da beide Rechnungsarten, wie in §. 1. angedeutet und bereits auch anerkannt ist, im einzelnen Falle auf verschiedene Resultate führen, können sie nicht zusammen zu Recht bestehen. Soll nun die Mathematik leisten, was sie zu leisten hat, so muss sie diese Streitfrage zu lösen im Stande sein, oder sie verdient den Vorzug nicht, der ihr bisher ohne Widerspruch eingeräumt wurde und wornach sie keine Controverse auf ihrem Gebiete duldet, und kann sie diese Streitfrage nicht lösen, so ist der politischen Arithmetik jede sichere Basis entzogen und sie kann auf den Namen einer Wissenschaft keinen Anspruch ferner machen.

Sieht man sich, um diese Frage zur Entscheidung zu bringen, nach den Gründen um, welche bisher für die Richtigkeit der genannten Rechnungsarten geltend gemacht wurden, so bestehen sie hauptsächlich in folgenden:

a. Für die Rechnung mit einfachen Zinsen (Hoffmann'sche Methode).

1) Das römische Recht gestattet den anatocismus nicht. Es kann also eine Methode, welche Zinse von Zinsen in Rechnung bringt, keine Anwendung finden. Die Leibnitz'sche Me-

thode rechnet Zins von Zins, die Hoffmann'sche nicht. Daher kann erstere nicht, sondern nur die letztere angewendet werden.

2) Die Rechnung mit einfachen Zinsen entspricht besser den Verhältnissen des praktischen Lebens als die Zinszins-Rechnung. Die letztere setzt voraus, dass die Zinszahlung richtig auf den Verfalltag erfolge und dass die Zinsen sogleich wieder nutzbringend angelegt werden. Ersteres wird nicht immer eintreten und letzteres wird nicht immer und namentlich bei kleinen Summen nicht geschehen können.

3) Der Gläubiger wird durch die Zinszins-Rechnung (Leibnitz'sche Methode) beeinträchtigt. Der Nutzen, welchen ein Kapital durch Zinseszinsen abwirft, wird grösser angenommen, als bei aller Sorgfalt und Thätigkeit des Gläubigers erreicht werden kann. Der Werth der Forderung wird also geringer, als die Benutzung in der Wirklichkeit zulässt, angeschlagen. Der Gläubiger kommt dadurch in Schaden; durch die Berechnung mit einfachen Zinsen nicht.

b. Für die Rechnung mit Zinseszinsen (Leibnitz'sche Methode).

1) Wird ein nach Ablauf einer Zeitfrist fälliges Kapital schon jetzt an den Gläubiger gezahlt, so kann von ihm verlangt werden, dass er dasselbe möglichst sorgfältig behandle, die Zinsen der Zwischenzeit nicht geniesse, sondern sie zinstragend zum Kapitale schlage und das Kapital nebst Zinsen als für die Zwischenzeit nicht für ihn existirend betrachte, wie diess auch wirklich stattgefunden hätte, wenn es erst nach Umlauf der Nutzniessungszeit an ihn ausgezahlt worden wäre. Recht und Billigkeit verlangt, dass er die jeweils fälligen Zinse nicht müssig liegen lasse. Hieraus folgt nun:

2) dass der unter No. 1, a. gemachte Vorwurf des Anatocismus nicht gegründet ist. Zinse nämlich, die von einem Kapitale eingegangen sind, können als ein Kapital betrachtet werden, und werden in der Wirklichkeit auch so betrachtet. Sie können also, wie es auch geschieht, als zinstragend angelegt werden. Der Einwurf des Anatocismus trifft daher nicht zu, wie denn auch die meisten Rechtslehrer und manche Gesetzgebungen keinen Anatocismus darin erblicken.

3) Demnach widerlegt sich auch der Vorwurf No. 3, a. wegen Beeinträchtigung des Gläubigers.

Es ist nun nicht zu verkennen, dass die hier zusammengestellten Gründe für und wider von Zufälligkeiten hergeholt sind,

und sich nicht auf die Sache als solche, sondern auf Aeusserlichkeiten beziehen, als da sind: verspätetes Eingehen der fälligen Zinsen, Möglichkeit, dieselben sogleich wieder zu benutzen, Disponibilität eines Geldmarkts, Sorgfalt in Benutzung der empfangenen Summen, Thätigkeit und Fleiss des Empfängers, Stipulationen bestimmter Gesetze, besondere Rücksichtnahme auf den Vortheil des Gläubigers und Betonung desselben (No. 3, a.), während doch der Schuldner oder Nutzniesser die gleiche Rücksicht verdient, da die Benutzung der ihm im Laufe der Zeit zufallenden Zinsen noch viel schwieriger wird, weil sie immer nur ein kleiner Theil des Kapitals sind, u. s. w. Zudem ist der so oft und stark betonte Einwurf wegen verspäteten Eingehens der Zinse der schwächste, da diesem Umstande durch Zurückschiebung der Zahlung auf eine etwas spätere Zeit, etwa ein viertel oder halbes Jahr nach der Verfallzeit, ganz leicht begegnet werden kann, wie auch einzelne Gesetzgebungen thun.

Nach innern Gründen, die meines Erachtens nur aus der Mathematik unter Zugrundelegung allgemein anerkannter Thatsachen hergeholt werden müssen, hat man sich, wie aus dem Gesagten hervorgeht, nicht umgesehen, denn weder Leibnitz, noch ein anderer nach ihm hat den schuldigen Beweis geliefert, dass die Rechnung mit Zinseszinsen zu einem richtigen Resultate und die mit einfachen Zinsen zu einem unrichtigen führe, eben so wenig, als umgekehrt Hoffmann und seine Nachfolger bisher nachgewiesen haben, dass die Rechnung mit einfachen Zinsen zu dem richtigen und die mit Zinseszinsen zu einem unrichtigen Resultate führe.

Ich habe nun in meiner Anleitung §§. 28—30. S. 56. u. ff. das Verhältniss zwischen der Rechnung mit einfachen Zinsen und derjenigen mit Zinseszinsen festzustellen gesucht, und glaube für ein unbefangenes Urtheil dort den Beweis geliefert zu haben, dass beide Rechnungsarten immer auf verschiedene Resultate führen, wenn die Zeit, worin die Kapitalien fällig sind, sich auf mehr als ein Jahr erstreckt, und dass dann nur die Rechnung mit Zinseszinsen auf ein richtiges und die mit einfachen Zinsen auf ein unrichtiges Resultat führe.

Da mit dieser Untersuchung die Streitfrage über die richtige Berechnung des Interusuriums auf das Genaueste zusammenhängt, so habe ich die dort entwickelten Sätze in dem 4. Kapitel meiner Anleitung §. 44. u. ff. hierauf angewendet, so dass ich wohl annehmen darf, dass, wer Algebra versteht und vorurtheilsfrei an die Beantwortung dieser Frage geht, diesen lange dauernden Streit für hinlänglich erörtert und entschieden halten wird.

Endlich findet sich im Archiv für civilistische Praxis Bd. XXIX. Hft. 1. S. 34—111. eine von mir besonders für Juristen geschriebene Abhandlung über das Interusurium abgedruckt, worin ausführlich die nämlichen Sätze angewendet und durch verschiedene Beispiele verdeutlicht sind. Zugleich habe ich dort, da hauptsächlich der Einwurf des Anatocismus von den Vertheidigern der einfachen Zinsrechnung stark betont wird, eine neue, ausschliesslich auf der Rechnung mit einfachen Zinsen beruhende Methode angegeben, die zu dem nämlichen Resultate, wie die Rechnung mit Zinseszinsen (ein Beweis für die Richtigkeit beider Methoden) führt, und die auch später hier in aller Strenge vorgetragen werden wird, so dass zwei unter sich ganz verschiedene, auf das gleiche Resultat führende Methoden der Hoffmann'schen Methode gegenüber stehen und gemeinschaftlich ihre Unrichtigkeit bezeugen, und will nun über den Erfolg meiner Bemühung berichten.

Lauteschläger urtheilt hierüber in seinem Werke: „Die Lehre von den einfachen und zusammengesetzten Zinsen, Darmstadt 1851" S. 163. wie folgt: „Wie vom Standpunkte der reinen Theorie der aus innern Gründen geschöpfte strenge Beweis für die Richtigkeit der Leibnitz'schen Methode (Rechnung mit Zinseszinsen) geführt werden kann, darüber sehe man Oettinger, „Anleitung zu finanz., polit. u. juridischen Rechnungen", §§. 28—31. und §§. 48—49."

Ritter äussert sich in seiner „Anleitung zur Auflösung, Entwicklung und Berechnung der wichtigsten Aufgaben, Formeln und Tabellen der einfachen und zusammengesetzten Zins- und Zeitrenten-Rechnung, Stuttgart 1846" übereinstimmend mit obigen Angaben über die in den hierher gehörigen Schriften herrschende grosse Unsicherheit, Willkühr und Inkonsequenz mit folgenden Worten im Vorwort: „Nicht selten verwirft der eine Autor die Voraussetzungen und Ansichten des andern. So sagt z. B. Clausberg (in seiner „Demonstrativen Rechnenkunst"), dass es nicht den Arithmeticis, sondern den Rechtsgelehrten, obliege zu entscheiden, in welchen Fällen man einfache oder zusammengesetzte Zinsen rechnen soll; indess Oettinger in seiner Anleitung von der Ansicht ausgeht, es können hierüber nur arithmetische Gründe entscheiden. Ich selbst halte mich bei der Aufstellung und Nachweisung arithmetischer Sätze gleichfalls an innere Gründe, welche allein der Calcul an die Hand geben kann, habe aber durch einen langjährigen Verkehr mit Finanzmännern und andern Geschäftsleuten die feste Ueberzeugung gewonnen, dass in jedem vorkommenden Falle eine vorhergetroffene Uebereinkunft zwischen dem Gläubiger und Schuld-

ner, und in Ermangelung einer solchen der herkömmliche Gebrauch oder das Gesetz entscheide, ob einfache oder zusammengesetzte Zinse gerechnet werden müssen. Aus diesem Grunde beschränkte ich mich auch in dieser Schrift darauf, überall zu zeigen, wie man rechnen müsse, wenn einfache oder zusammengesetzte Zinsen vorausgesetzt werden."

Ritter tritt im Wesentlichen der Ansicht Clausberg's und Brune's bei. Stellt man aber die innern Gründe als ersten Grundsatz auf, so lässt sich damit sehr schwer das Rekurriren auf das Urtheil der Finanzmänner oder anderer Geschäftsleute, also auf eine fremde Autorität vereinigen, und der Nachsatz hebt den Vordersatz auf. Gibt man sogar zu, dass im concreten Falle die Entscheidung der Uebereinkunft zwischen Gläubiger und Schuldner überlassen werden müsse, da Zwang nicht anwendbar ist, so liegt doch die Pflicht vor, jeden Interessenten darüber zu verständigen, welche Methode die richtige ist und welche dem einen oder andern von ihnen Schaden bringt. Diess alles aber kann nur durch eine klare Schlussfolgerung der Mathematik geschehen.

Was nun die im Archiv für civilistische Praxis von mir erschienene Abhandlung betrifft, so findet sich in dem Lehrbuche der Pandecten von Dr. Ludw. Arndts, München 1852, p. 332. §. 220. hierüber Folgendes: „Die mathematische Richtigkeit ihres Ergebnisses (der Leibnitz'schen Methode) ist neuerdings nachgewiesen von Oettinger im civil. Archiv XXIX., 2, welcher zugleich eine im Resultat übereinstimmende neue Methode angibt, wornach gleichmässig jene beiden Grössen (für den Schuldner und Gläubiger) ermittelt werden."

Ueber die Hoffmann'sche Methode findet sich ebendaselbst Folgendes: „Diese Berechnung wird gleichwohl noch von manchen als die juristisch richtige angesehen, z. B. von Schrader Abth. II, 2; F. Zachariae, Ueber die richtige Berechnung des Interusuriums nach Grundsätzen des Rechts, Greifswald 1831; v. Vangerow III. S. 180–188. Diess kann aber als Regel nicht zugegeben werden."

Auch v. Vangerow räumt in seinem Lehrbuch der Pandecten, 6. Aufl., 3. Bd., §. 587., S. 199. unter einiger Modification der oben angeführten Ansicht ein, „dass nur nach der Leibnitz'schen Methode der wahre Werth einer später fällig werdenden Forderung in mathematisch genauer Weise festgestellt wird und namentlich nur durch ihre Anwendung eine wahrhaft gleichheitliche Behandlung des Schuldners und Gläubigers stattfinde, vergl. besonders Oettinger a. a. O. S. 85.", macht auf die neue,

von mir angegebene, im Resultate mit der Leibnitz'schen übereinstimmende Berechnungsart aufmerksam, glaubt aber doch, dass den Verhältnissen des praktischen Lebens, durch die eine ganz strenge Durchführung ihrer Anforderungen nicht möglich ist, Rücksicht zu tragen sei und schlägt vor „keine der beiden Berechnungsarten rein zur Anwendung zu bringen, sondern eine den concreten Verhältnissen des einzelnen Falles entsprechende Combination beider.“

Wie soll aber das richtige Bindeglied zwischen einer richtigen und unrichtigen Rechnungsart gefunden werden? so kann man mit Recht fragen. Wäre es nicht sachgemässer, die richtige Rechnungsart festzuhalten und an sie diejenigen Modifikationen anzuknüpfen, die sich mit ihr in Rücksicht auf Billigkeitsgründe verbinden lassen?

Während nun die genannten Schriftsteller die Rechnung mit Zinseszinsen als die richtige anerkennen, tritt Dr. Keil in seiner Schrift: „Das Interusurium oder die richtige Bestimmung der Forderungswerthe zu andern, als den Verfallszeiten, Jena 1854“ ganz entschieden gegen die in meiner Abhandlung über das Interusurium gegebenen Nachweisungen in die Schranken.

Er gibt zwar S. 89. seiner Schrift zu, dass die Rechnung mit Zinseszinsen „die genügendste Lösung des Interusuriums bildet“, bemerkt jedoch, dass „die wohl mehrseitig z. E. von Dr. Oettinger in der angeführten Abhandlung daraus hergeleitete Folgerung, dass sie darum auch überall als die richtige unterlegt werden müsse, schon an sich und insbesondere aus den §§. 3—9. bereits angeführten Gründen (in der Schrift des Dr. Keil) irrig“ sei.

Ich könnte mich begnügen, einfach diese Aeusserung anzuführen, denn diese Worte, in andere übergetragen, können wohl nur folgenden Sinn haben: Es ist zwar richtig, dass 2 mal 2 = 4 ist. Soll aber dieser Satz überall als richtig angewendet werden, so ist das ein völliger Irrthum. Soll ferner dieser Satz nach den von Dr Keil gegebenen Erörterungen bewiesen werden, so dürfte diess nach S. 93. und 94. seiner Schrift keine besondere Schwierigkeit haben. Hat man nämlich eine Kugel von 2 Fuss Cubikinhalt und wünscht Jemand eine Kugel von 2 mal 2 = 4 Cubikfuss Inhalt zu erhalten, so wird diess Verlangen nicht durchführbar sein, denn es wird einem Arbeiter, auch dem geschicktesten, kaum gelingen, mit der vollen Präcision eine Kugel von genau 4 Cubikfuss Inhalt zu verfertigen. Q. e. d.

Ich sehe mich aber veranlasst, mich gegen einen andern mir von Dr. Keil gemachten Vorwurf zu verwahren. S. 94. seiner

Schrift fanden sich folgende Stellen: „Allerdings sind für die irrige, obwohl durch ihren ansprechenden Inhalt im Voraus für sich einnehmende Ansicht, „„„dass bei Diskontirungen stets das Guthaben beider Theile gleichmässig berechnet werden müsse"" verschiedene, im gewählten Beispiele verdeutlichte, zugleich aber auch anscheinend allgemein giltige Gründe erdenkbar, deren Haltlosigkeit vielleicht nicht auf den ersten Blick zu erkennen ist, allein doch einer hinlänglich sorgsamen Kritik nicht zu entgehen vermag", und ferner: „Dr. Oettinger, welcher überhaupt meines Dafürhaltens sehr scheinbare, zeither wenig beachtete Gründe für die Zinszinsrechnung geltend macht, allein nicht, wie man in mehreren neueren Schriften bemerkt findet, ein ganz neues System aufstellt."

Ich bemerke, dass es mir sehr ferne liegt, in meinen Arbeiten mit „scheinbaren" Gründen und bestechenden Ansichten oder Trugschlüssen, die nur die sorgsame Kritik des Dr. Keil aufzufinden vermag, vorzugehen. Das ist zumal in der Mathematik, auf deren Boden ich mich in meiner Beweisführung, wie Herr Dr. Keil wohl wissen kann, bewege, nicht möglich. Gerade Arndts und Vangerow haben die gleichheitliche, also rechtlich objective Behandlung des Schuldners und Gläubigers von meiner Seite anerkennend hervorgehoben, worin die sorgsame Kritik des Dr. Keil einen trügerisch einnehmenden Schein erblickt. Gegen diese Anschuldigung glaube ich Verwahrung einlegen zu sollen.

Wenn aber Herr Dr. Keil meint, dass die von mir (S. 80. §. 15. meiner Abhandlung) angegebene weitere Methode (ich habe sie nicht „System" genannt), den Werth künftig fälliger Kapitalien zu berechnen, nicht neu sei, so will ich ihm diese Meinung nicht nehmen, da ich nicht weiss, in wie weit ihn seine Kenntnisse in der Mathematik zu diesem Urtheil berechtigen. Ich ersuche ihn daher, den schuldigen Beweis zu führen, und bemerke, dass mir kein Werk bekannt ist, worin diese Methode früher als in meiner Abhandlung gelehrt ist.

Will Herr Dr. Keil meine Beweisführung über die Richtigkeit der Zinszins-Rechnung widerlegen, so ist der geeignete Weg hierzu, zuerst dieselbe in meiner Anleitung, die er nur dem Titel nach zu kennen scheint, anzusehen und dann auf algebraischem Wege zu entkräften, anstatt die so oft von ihren Gegnern wiederholten Gründe wieder vorzuführen, und einen Vermittlungs-Vorschlag zu machen, der mathematisch eben so unrichtig und unhaltbar ist, als die Rechnung mit einfachen Zinsen.

Diess ist im Wesentlichen die Geschichte und der gegenwärtige Stand der oben angeregten Frage. So lange nun nicht nach-

gewiesen ist, welche von beiden Rechnungsarten ein **richtiges Resultat** liefert, kann dieselbe nicht entschieden werden. Der bisher betretene Weg, sie durch Aufstellung äusserer Gründe, wozu auch die Gesetze zu zählen sind, zu entscheiden, führt nicht zum Ziele. Die Frage selbst hat aber eine viel wichtigere Bedeutung, als die Entscheidung über die richtige Berechnung des Interusuriums. Es handelt sich um Gewinnung einer wissenschaftlichen Grundlage für die **politische Arithmetik**. So lange nämlich der oben angedeutete Beweis nicht geführt ist, mangelt es diesem gewiss sehr wichtigen Zweige der Mathematik an einer festen Grundlage, und dieser kann nach meiner Ansicht nur aus innern, dem Calcul zu entnehmenden Gründen geführt werden.

Von diesem Standpunkte aus soll hier die angeregte, ganz allgemein gehaltene Frage beantwortet werden. Daraus, dass in der neuern und neuesten Zeit in manchen Schriften die Lehre von den einfachen Zinsen nicht, sondern nur die von den Zinseszinsen enthalten ist, kann nichts **für** oder **wider** bewiesen und keineswegs die Unzulässichkeit der Lehre von den einfachen Zinsen gefolgert werden, denn die Nichtaufnahme einer vorhandenen Lehre in eine Schrift ist noch nicht als Beweis für die Unrichtigkeit hinzunehmen, eben so wenig wie die Aufnahme beider Lehren als Beweis für die **Richtigkeit** beider gelten kann. Vor allem aber kann aus dem Ignoriren eines Gegenstands nichts für und gegen denselben gefolgert werden, wenn es die Beantwortung einer Streitfrage gilt.

Der Umstand, dass die vorliegende Frage noch nicht zur **Entscheidung** gekommen ist, liegt nach meiner Ansicht darin, dass ihre Beantwortung bis jetzt nicht der **Mathematik**, wohin sie unzweifelhaft gehört, vindicirt, sondern in das Gebiet der **Jurisprudenz**, das reichhaltige Feld der Controversen, geschoben wurde. Hat die Mathematik, wie sie soll, ihre Nachweisungen gegeben, dann können leicht die weitern Consequenzen gezogen werden, und es ist **dann** Sache der Gesetzgebung, diese Nachweisungen anzuerkennen und nach ihnen die Gesetzgebung zu ordnen, denn das auf die socialen Verhältnisse anzuwendende Recht darf doch nicht wohl auf unrichtiger Unterlage ruhen. Wir wenden uns nun zur Sache.

§. 3.

Lehrsatz. **Sind die Summen $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$ am Ende von n gleichen, sich folgenden Zeitabschnitten (gewöhnlich Jahres- oder Halbjahresfristen) ohne Zinse**

fällig und soll ihr gegenwärtiger Werth bei dem Zinsfuss p berechnet werden, so entsteht ein richtiges Resultat, wenn die einzelnen Zahlungen nach dem Zeitverhältniss mit Zinseszinsen rabattirt werden. Das Resultat wird unrichtig und zu gross, wenn die einzelnen Zahlungen mit einfachen Zinsen rabattirt werden.

Zu bemerken ist, dass der vorstehende Lehrsatz, wie schon oben gelegentlich angegeben wurde, nur gilt, wenn sich die Rabattirung auf mehr als den ersten Zeitabschnitt erstreckt, denn die Rabattirungswerthe sind bei einfachen Zinsen und Zinseszinsen für den ersten Zeitabschnitt einander gleich.

Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{p}{100} = 0{,}0p$, wie diess auch in meiner Anleitung geschah, und bezeichnet den gegenwärtigen Werth sämmtlicher, künftig fälliger Summen, der sich aus der Rabattirung mit einfachen und Zinseszinsen nach der Formel No. 2 und 1, §. 1. ergibt, durch R, so stellt sich der vorstehende Lehrsatz nach No. 2 und No. 1, §. 1. auf folgende Weise dar, wenn allmälig 1, 2, 3.... n statt n gesetzt wird:

$$1)\qquad R = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{L_n}{1{,}0p^n},$$

$$2)\qquad R < \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}02p} + \frac{L_3}{1{,}03p} + \cdots \frac{L_n}{1{,}0np}.$$

Erster Beweis.

Bei diesem Beweise gehen wir von Sätzen aus, die allgemein als maassgebend bei Kapitalzahlungen im praktischen Leben anerkannt sind, wenden sie nach ihrer Feststellung auf obige Darstellungen No. 1) und 2) an und untersuchen den Erfolg, wodurch sich dann einfach die Richtigkeit des Lehrsatzes ergeben wird.

Bei Contrahirung einer Schuld treten zwei Personen, Gläubiger und Schuldner, in ein Vertrags-Verhältniss. Der Gläubiger übergibt dem Schuldner zu irgend einem Zeitpunkte eine bestimmte Summe baar. Der Schuldner verpflichtet sich, von diesem Zeitpunkte an im Laufe der Zeit das empfangene Geld (allmälig oder auf einmal) nicht nur zurück zu zahlen, sondern auch stets das noch in Händen habende Kapital zu verzinsen. Sind alle vom Schuldner über Kapital- und Zins-Zahlung eingegangenen Verpflichtungen erfüllt, so ist mit der letzten Zahlung die Forderung des Gläubigers befriedigt und die Schuld getilgt.

Die Thätigkeit des Gläubigers beschränkt sich in der Regel auf einen Act. Die Thätigkeit des Schuldners auf mehrere, in der Zeit nach einander folgende. Bei den gegenseitigen Zahlungsleistungen des Schuldners und Gläubigers werden daher nicht gleichzeitig fällige Werthe mit einander verglichen, sondern solche, die in der Zeit auf einander folgen und die sofort auf einen und denselben Zeitpunkt bezogen werden müssen, denn nur in diesem Falle kann von Gleichsetzen der Werthsummen die Rede sein.

Es handelt sich also hier nicht von wirklicher Gleichheit der vom Gläubiger erlegten und der vom Schuldner im Laufe der Zeit zu erlegenden Summen, sondern nur von der Gleichheit des Inhaltes oder Werthes der gegenseitigen Zahlungsleistungen zwischen Gläubiger und Schuldner, denn der Schuldner gibt im Laufe der Zeit eine ungleich grössere Gesammtsumme zurück, als er empfangen hat.

Um nun die vorliegende Aufgabe bequemer lösen zu können, gehen wir von Folgendem aus:

Es werde eine Schuld K contrahirt. Der Schuldner verpflichtet sich, diese Summe in Jahresfristen und durch jährliche Verzinsung mit p Procent innerhalb n Jahren so zu tilgen, dass er der Reihe nach jährlich die Summen A_1, A_2, A_3, ... A_n vom Kapital abträgt und ausserdem am Ende eines jeden Jahres den Kapitalrest verzinst.

Mit diesen Leistungen hat, wie man sieht, der Schuldner am Ende des $n$ten Jahres seine Schuld vollständig getilgt.

Der Tilgungsplan ist ganz allgemein und man kann unter ihn alle gedenkbaren Tilgungsarten (gleichheitliche Tilgungssummen, wachsende, fallende, einmalige oder allmälige Kapitalabtragungen) durch beliebige Annahme der A mit Leichtigkeit bringen. Bei einer einmaligen Tilgungssumme, wie es gewöhnlich bei kleinern Summen der Fall ist, sind alle vorhergehenden Tilgungssummen gleich 0 und $A_n = K$ zu setzen u. s. w.

Ermittelt man nun die Verpflichtungen, welche der Schuldner im Laufe der Zeit zu erfüllen hat, so stellen sie sich in folgender Weise fest.

Am Ende des ersten Jahres hat er A_1 am Kapital abzutragen und die Zinse vom Gesammtkapital zu zahlen. Es ist daher

$$L_1 = A_1 + K.0{,}0p.$$

Am Ende des zweiten Jahrs hat er A_2 und die Zinse des um A_1 verringerten Kapitals zu zahlen. Diess beträgt:

$$L_2 = A_2 + (K - A_1) . 0{,}0p.$$

Am Ende des dritten Jahres hat er A_3 und die Zinse von dem um A_1 und A_2 verringerten Kapital zu zahlen. Diess beträgt:

$$L_3 = A_3 + (K - A_1 - A_2)\, 0{,}0p$$

u. s. w. Setzt man diese Schlussweise fort, so sind die Gesammtleistungen des Schuldners, wie sie sich im Laufe der Zeit ergeben, in folgender Darstellung enthalten:

3)
$$\begin{aligned} L = L_1 &= A_1 + K . 0{,}0p \\ L_2 &= A_2 + (K - A_1)\, 0{,}0p \\ L_3 &= A_3 + (K - A_1 - A_2)\, 0{,}0p \\ L_4 &= A_4 + (K - A_1 - A_2 - A_3)\, 0{,}0p \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_r &= A_r + (K - A_1 - A_2 - \ldots - A_{r-1})\, 0{,}0p \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n &= A_n + (K - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-1})\, 0{,}0p. \end{aligned}$$

Das Gesagte gibt folgende Grundlagen und Anhaltspunkte für die weitere Entwicklung des Calculs:

4)
$$K = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n,$$

denn die Abtragssummen $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ müssen auf die Tilgung des Kapitels verwendet werden und **kommen ihm daher gleich.**

5) **Durch die in** No. 3) **angegebenen und im Laufe der Zeit allmälig geleisteten Kapital- und Zins-Zahlungen hat der Schuldner seine Schuld vollständig getilgt.** Hieraus folgt weiter:

6) **Die im Laufe der Zeit allmälig zu leistenden und in No. 3) angegebenen Gesammtzahlungen $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$, obwohl der Summe nach grösser, sind ihrem Inhalte oder ihrem Werthe nach dem von dem Gläubiger ausgezahlten Kapitale K gleich. Sie sind, obwohl in Summe grösser, zusammen nicht mehr und nicht weniger, sondern dem Inhalte nach gerade so viel werth, als das gegenwärtig baar hinterlegte Kapital des Gläubigers.**

Die hier aufgestellten, in der Natur der Sache begründeten Sätze sind wichtig, denn sie bezeichnen den Weg, auf welchem

künftig fällige Summen L_1, L_2, L_3, ... L_n mit einem gegenwärtig baar vorräthigen Kapitale dem Werthe nach verglichen oder rabattirt, d. h. auf ihren gegenwärtigen Werth zurückgebracht werden können, und bilden den Prüfstein für die Richtigkeit aller im Calcul anzuwendenden Rechnungsmethoden. Dieselben müssen nämlich Resultate geben, welche mit diesen Sätzen übereinstimmen. Ist diess nicht der Fall, so ist es ein sicheres Kennzeichen, für die Unrichtigkeit und Unzulässigkeit der angewendeten Rechnungsmethode *).

Nach diesen Bemerkungen ist nun die vorliegende Aufgabe darauf zurückgebracht: Methoden anzugeben, welche den Zahlenwerth der in No. 3) angegebenen Gesammtleistungen auf die Summe K zurückzuführen.

Um nun den verlangten Beweis zu geben, hat man auf die unter No. 3) verzeichneten Gesammtleistungen zuerst die Rechnung mit Zinseszinsen, dann die mit einfachen Zinsen anzuwenden und die hieraus folgenden Resultate mit den in No. 4) und 6) aufgestellten Grundsätzen zu vergleichen.

Man kann nun statt No. 3) auch folgende Darstellung wählen, welche die Durchführung des Calculs erleichtert. Aus No. 4) ist nämlich:

7).

$$K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots . - A_{r-1} = A_r + A_{r+1} + A_{r+2} + \ldots . A_{n-1} + A_n.$$

Benutzt man nun diese Darstellung, führt sie in No. 3) ein, indem man für r allmälig die Werthe 1, 2, 3, 4 .... n setzt, rabattirt die einzelnen Jahresleistungen nach der Formel 2, §. 1., indem man statt K allmälig die entsprechenden Werthe und statt n allmälig 1, 2, 3, ... n schreibt, so erhält man durch Rechnung mit Zinseszinsen folgenden Ausdruck für den gegenwärtigen Werth sämmtlicher Zahlungsleistungen:

---

*) Die vorstehenden Sätze sind nach meiner Ansicht so einfach und klar, sind in allen hieher gehörigen Geschäften des praktischen Lebens allenthalben als maassgebend und feststehend so unzweifelhaft anerkannt, dass man in der That kaum einen Einwurf gegen dieselben erwarten sollte. Dennoch ist es in einer Recension über meine Anleitung (Göttinger gel. Anzeigen v. J. 1849. S. 539. u. ff.) geschehen. Die dort gemachten Einwendungen halte ich aber theils für unzutreffend, theils unbegründet; so dass die obige Schlussfolge durch sie nicht beirrt werden kann.

$$8)\quad R=\frac{L_1}{1{,}0p}\quad =\frac{A_1}{1{,}0p}+\frac{(A_1+A_2+A_3+\ldots.A_n)0{,}0p}{1{,}0p},$$

$$\frac{L_2}{1{,}0p^2}\quad =\frac{A_2}{1{,}0p^2}+\frac{(A_2+A_3+A_4+\ldots.A_n)0{,}0p}{1{,}0p^2},$$

$$\frac{L_3}{1{,}0p^3}\quad =\frac{A_3}{1{,}0p^3}+\frac{(A_3+A_4+A_5+\ldots.A_n)0{,}0p}{1{,}0p^3},$$

$$\frac{L_4}{1{,}0p^4}\quad =\frac{A_4}{1{,}0p^4}+\frac{(A_4+A_5+\ldots.A_n)0{,}0p}{1{,}0p^4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{L_{n-2}}{1{,}0p^{n-2}}=\frac{A_{n-2}}{1{,}0p^{n-2}}+\frac{(A_{n-2}+A_{n-1}+A_n)0{,}0p}{1{,}0p^{n-2}},$$

$$\frac{L_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}=\frac{A_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{(A_{n-1}+A_n)0{,}0p}{1{,}0p^{n-1}},$$

$$\frac{L_n}{1{,}0p^n}\quad =\frac{A_n}{1{,}0p^n}+\frac{A_n.0{,}0p}{1{,}0p^n}.$$

Werden nun die Klammern in der vorstehenden Darstellung aufgelöst und sämmtliche, mit $0{,}0p$ verbundene Glieder nach den gleichen Stellenzahlen der A geordnet, so erhält man:

$$R=\frac{L_1}{1{,}0p}+\frac{L_2}{1{,}0p^2}+\frac{L_3}{1{,}0p^3}+\frac{L_4}{1{,}0p^4}+\ldots.\frac{L_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{L_n}{1{,}0p^n}$$

$$=\frac{A_1}{1{,}0p}+\frac{A_2}{1{,}0p^2}+\frac{A_3}{1{,}0p^3}+\frac{A_4}{1{,}0p^4}+\ldots.\frac{A_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{A_n}{1{,}0p^n}$$

$$+\frac{A_1.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{A_2.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{A_3.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{A_4.0{,}0p}{1{,}0p}+\ldots\frac{A_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{A_n.0{,}0p}{1{,}0p}$$

$$+\frac{A_2.0{,}0p}{1{,}0p^2}+\frac{A_3.0{,}0p}{1{,}0p^2}+\frac{A_4.0{,}0p}{1{,}0p^2}+\ldots\frac{A_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p^2}+\frac{A_n.0{,}0p}{1{,}0p^2}$$

$$+\frac{A_3.0{,}0p}{1{,}0p^3}+\frac{A_4.0{,}0p}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{A_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p^3}+\frac{A_n.0{,}0p}{1{,}0p^3}$$

$$+\frac{A_4.0.0p}{1{,}0p^4}+\ldots\frac{A_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p^4}+\frac{A_n.0{,}0p}{1{,}0p^4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{A_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{A_n.0{,}0p}{1{,}0p^{n-1}}$$

$$+\frac{A_n.00p}{1{,}0p^n}.$$

Sämmtliche Vertikalreihen dieser Darstellung, deren Glieder mit $0{,}0p$ verbunden sind, lassen sich nach der nachstehenden Gleichung:

$$\frac{M}{1{,}0p}+\frac{M}{1{,}0p^2}+\frac{M}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{M}{1{,}0p^r}=M.\frac{1-1{,}0p^{-r}}{0{,}0p}$$

(§. 27. No. 1 meiner Anleitung) summiren. Setzt man zu dem Ende statt r allmälig die Werthe 1, 2, 3, ... n, so geht obige Darstellung in folgende über:

$$R=\frac{L_1}{1{,}0p}+\frac{L_2}{1{,}0p^2}+\frac{L_3}{1{,}0p^3}+\frac{L_4}{1{,}0p^4}+\ldots\frac{L_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{L_n}{1{,}0p^n}$$

$$=\frac{A_1}{1{,}0p}+\frac{A_2}{1{,}0p^2}+\frac{A_3}{1{,}0p^3}+\frac{A_4}{1{,}0p^4}+\ldots\frac{A_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{A_n}{1{,}0p^n}$$

$$+A_1.0{,}0p\,\frac{1-1{,}0p^{-1}}{0{,}0p}+A_2.0{,}0p\,\frac{1-1{,}0p^{-2}}{0{,}0p}+A_3.0{,}0p\,\frac{1-1{,}0p^{-3}}{0{,}0p}+\ldots$$

$$\ldots+A_{n-1}.0{,}0p\,\frac{1-1{,}0p^{-(n-1)}}{0{,}0p}+A_n.0{,}0p\,\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

Da nun $A_r.0{,}0p\,\frac{1-1{,}0p^{-r}}{0{,}0p}=A_r-\frac{A_r}{1{,}0p^r}$ ist, so entsteht hieraus:

$$R=\frac{L_1}{1{,}0p}+\frac{L_2}{1{,}0p^2}+\frac{L_3}{1{,}0p^3}+\frac{L_4}{1{,}0p^4}+\ldots\frac{L_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{L_n}{1{,}0p^n}$$

$$=\frac{A_1}{1{,}0p}+\frac{A_2}{1{,}0p^2}+\frac{A_3}{1{,}0p^3}+\frac{A_4}{1{,}0p^4}+\ldots\frac{A_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{A_n}{1{,}0p}$$

$$+A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots A_{n-1}+A_n$$

$$-\frac{A_1}{1{,}0p}-\frac{A_2}{1{,}0p^2}-\frac{A_3}{1{,}0p^3}-\frac{A_4}{1{,}0p^4}-\ldots-\frac{A_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}-\frac{A_n}{1{,}0p^n},$$

oder, da R der gegenwärtige Werth sämmtlicher Zahlungsleistungen bei der Rabattirung mit Zinseszinsen, mit Rücksicht auf die Bedingungs-Gleichung No. 4) und mit Weglassung der sich aufhebenden Glieder, ist:

9)

$$R=\frac{L_1}{1{,}0p}+\frac{L_2}{1{,}0p^2}+\frac{L_3}{1{,}0p^3}+\frac{L_4}{1{,}0p^4}+\ldots\frac{L_n}{1{,}0p^n}=A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots A_n=K.$$

Diese Gleichung sagt Folgendes aus.

10) W e r d e n d i e W e r t h e d e r v o m S c h u l d n e r z u l e i s t e n d e n Z a h l u n g e n L_1, L_2, L_3, ... L_n (No. 3) a u f d i e Ge-

genwart zurückgebracht und wird bei der Reduction die Rechnung mit Zinseszinsen angewendet, so stimmt das hiedurch entstehende Resultat mit den in No. 4)—6) aufgestellten Grundsätzen überein und gibt also den richtigen Werth K an.

Hiedurch ist der erste Theil des obigen Lehrsatzes bewiesen.

Um auch die Richtigkeit des zweiten Theils zu beweisen, ist nöthig, die Gesammtleistungen des Schuldners No. 3) oder 8) mit einfachen Zinsen zu rabattiren. Diess gibt, wenn die gehörigen Werthe eingeführt werden, folgende Darstellung:

$$11)\quad R_1 = \frac{L_1}{1{,}0p} = \frac{A_1}{1{,}0p} + \frac{(A_1+A_2+A_3+\ldots A_n)0{,}0p}{1{,}0p},$$

$$\frac{L_2}{1{,}02p} = \frac{A_2}{1{,}02p} + \frac{(A_2+A_3+A_4+\ldots A_n)0{,}0p}{1{,}02p},$$

$$\frac{L_3}{1{,}03p} = \frac{A_3}{1{,}03p} + \frac{(A_3+A_4+A_5+\ldots A_n)0{,}0p}{1{,}03p},$$

$$\frac{L_4}{1{,}04p} = \frac{A_4}{1{,}04p} + \frac{(A_4+A_5+\ldots\ldots A_n)0{,}0p}{1{,}04p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{L_{n-1}}{1{,}0(n-1)p} = \frac{A_{n-1}}{1{,}0(n-1)p} + \frac{(A_{n-1}+A_n)0{,}0p}{1{,}0(n-1)p},$$

$$\frac{L_n}{1{,}0np} = \frac{A_n}{1{,}0np} + \frac{A_n . 0{,}0p}{1{,}0np}.$$

Dieser Ausdruck lässt, auch wenn man ihn in seine einzelnen Glieder auflöst, keine weitere Reductionen, sondern nur eine andere Anordnung zu. Es bleibt daher nichts übrig, als ihn mit der Formel No. 8) zu vergleichen. Geschieht diess, so sieht man, dass nur die zwei ersten Glieder in beiden Ausdrücken übereinstimmen, alle andern nicht. Das aus No. 11) folgende Ergebniss kann also nicht mit dem aus No. 7) übereinstimmen, und es lässt sich zeigen, dass No. 11) ein grösseres Ergebniss liefert und liefern muss als No. 8) und 9).

Es ist nämlich:

$$1{,}0xp < 1{,}0p^x,$$

oder in anderer Form:

$$1+\frac{xp}{100}<(1+\frac{p}{100})^x$$

$$=1+x\frac{p}{100}+\frac{x(x-1)}{1.2}\left(\frac{p}{100}\right)^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\left(\frac{p}{100}\right)^3+\dots$$

für $x>1$, und der Unterschied wird um so grösser, je grösser x ist. Hieraus folgt weiter, dass

$$\frac{M}{1{,}0xp}>\frac{M}{1{,}0p^x}$$

für $x>1$. Diess gibt nun folgende Vergleichungen aus No. 11) und 8) an die Hand:

$$\frac{L_2}{1{,}02p}=\frac{A_2}{1{,}02p}+\frac{(A_2+A_3+\dots A_n)0{,}0p}{1{,}02p}>\frac{A_2}{1{,}0p^2}+\frac{(A_2+A_3+\dots A_n)0{,}0p}{1{,}0p^2},$$

$$\frac{L_3}{1{,}03p}=\frac{A_3}{1{,}03p}+\frac{(A_3+A_4+\dots A_n)0{,}0p}{1{,}03p}>\frac{A_3}{1{,}0p^3}+\frac{(A_3+A_4+\dots A_n)0{,}0p}{1{,}0p^3},$$

. . . .

u. s. w., d. h. alle Glieder vom zweiten an in No. 11) geben grössere Werthe als die correspondirenden in No. 8) oder 3). Hieraus und aus No. 9) folgt:

12)

$$K=\frac{L_1}{1{,}0p}+\frac{L_2}{1{,}0p^2}+\frac{L_3}{1{,}0p^3}+\dots\frac{L_n}{1{,}0p^n}<\frac{L_1}{1{,}0p}+\frac{L_2}{1{,}02p}+\frac{L_3}{1{,}03p}+\dots\frac{L_n}{1{,}0np}$$

oder

13) $$K<\frac{L_1}{1{,}0p}+\frac{L_2}{1{,}02p}+\frac{L_3}{1{,}03p}+\dots\frac{L_n}{1{,}0np}.$$

Diese Gleichungen sagen Folgendes aus:

14) **Wird der Werth der von dem Schuldner im Laufe der Zeit zu leistenden Zahlungen $L_1, L_2, L_3, \dots L_n$ auf die Gegenwart zurückgebracht und die Rechnung mit einfachen Zinsen angewendet, so stimmt diese Rechnungsart nicht mit den in No. 4)—6) aufgestellten Grundsätzen überein, sondern gibt ein zu grosses und unrichtiges Resultat.**

Der Gläubiger käme bei dieser Rechnungsweise zu Schaden und so ist auch der zweite Theil des Lehrsatzes erwiesen.

Bei dem hier angewendeten Calcul wurde die Rabattirung mit Jahresfristen zu Grunde gelegt. Diese Beschränkung ist nicht

nöthig. Es kann auch die Rabattirung in Jahrestheilen angenommen werden.

Häufig und bei Staatsanleihen gewöhnlich geschieht die Verzinsung in Halbjahresfristen. In diesem Falle können die Kapitalabtragungen auch in Halbjahresfristen gemacht werden und dann werden $2n$ Kapitalabtragungen erforderlich. Es ist dann nach obigen Grundsätzen:

$$15) \qquad K = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_{2n}.$$

Da nun die Zinse halbjährlich gezahlt werden, so kann man $\frac{p}{2} = p_1$ der Kürze wegen schreiben und die Rabattirung in Halbjahresfristen durchführen. Hiernach ergibt sich folgende Darstellung nach dem Vorgange von No. 8):

$$16) \quad R = \frac{L_1}{1{,}0p_1} = \frac{A_1}{1{,}0p_1} + \frac{(A_1 + A_2 + A_3 \ldots A_{2n})0{,}0p_1}{1{,}0p_1},$$

$$\frac{L_2}{1{,}0{p_1}^2} = \frac{A_2}{1{,}0{p_1}^2} + \frac{(A_2 + A_3 + A_4 \ldots A_{2n})0{,}0p_1}{1{,}0{p_1}^2},$$

$$\frac{L_3}{1{,}0{p_1}^3} = \frac{A_3}{1{,}0{p_1}^3} + \frac{(A_3 + A_4 \ldots A_{2n})0{,}0p_1}{1{,}0{p_1}^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{L_{2n-1}}{1{,}0{p_1}^{2n-1}} = \frac{A_{2n-1}}{1{,}0{p_1}^{2n-1}} + \frac{(A_{2n-1} + A_{2n})0{,}0p_1}{1{,}0{p_1}^{2n-1}},$$

$$\frac{L_{2n}}{1{,}0{p_1}^{2n}} = \frac{A_{2n}}{1{,}0{p_1}^{2n}} + \frac{A_{2n} . 0{,}0p_1}{1{,}0{p_1}^{2n}}.$$

Hält man nun den oben angegebenen Entwicklungsgang ein, ordnet die Glieder dieses Ausdrucks und summirt, so ergibt sich:

$$R = \frac{L_1}{1{,}0p_1} + \frac{L_2}{1{,}0{p_1}^2} + \frac{L_3}{1{,}0{p_1}^3} + \ldots \frac{L_{2n}}{1{,}0{p_1}^{2n}} = \frac{A_1}{1{,}0p_1} + \frac{A_2}{1{,}0{p_1}^2} + \frac{A_3}{1{,}0{p_1}^3} + \ldots \frac{A_{2n}}{1{,}0{p_1}^{2n}}$$

$$+ A_1\, 0{,}0p_1 \frac{1 - 1{,}0{p_1}^{-1}}{0{,}0p_1} + A_2 \frac{1 - 1{,}0{p_1}^{-2}}{0{,}0p_1} . 0{,}0p_1 + A_3 . 0{,}0p_1 \frac{1 - 1{,}0{p_1}^{-3}}{0{,}0p_1} \ldots$$

$$\ldots + A_{2n} . 0{,}0p_1 \frac{1 - 1{,}0{p_1}^{-2n}}{0{,}0p_1},$$

und hieraus durch Weglassung der sich aufhebenden Glieder und mit Rücksicht auf 15):

$$17) \quad R = \frac{L_1}{1{,}0p_1} + \frac{L_2}{1{,}0{p_1}^2} + \frac{L_3}{1{,}0{p_1}^3} + \ldots \frac{L_{2n}}{1{,}0{p_1}^{2n}} = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_{2n} = K.$$

Stellt man nun diesem Resultate die Rabattirung mit einfachen Zinsen gegenüber, was weiter keine Schwierigkeit hat, so wird man zu den gleichen Sätzen wie in No. 12)—14) geführt. Hierdurch ist also die Richtigkeit des oben aufgestellten Lehrsatzes für halbjährige Zahlungsfriste bewiesen.

Bei weitem der gewöhnlichste Fall ist aber der, dass die Zinse halbjährlich, die Kapitalabtragungen jährlich geschehen. In diesem Falle modificiren sich die Darstellung und der Calcul in etwas, denn in den Zahlungsleistungen des ersten Halbjahrs eines jeden Jahres sind nur die Zinse zu berücksichtigen. Es ergibt sich dann folgende Zusammenstellung:

$$18)\quad R=\frac{L_1}{1{,}0p_1} = \frac{(A_1+A_2\ldots\ldots A_n)0{,}0p_1}{1{,}0p_1},$$

$$\frac{L_2}{1{,}0p_1{}^2} = \frac{A_1}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{(A_1+A_2+A_3\ldots\ldots A_n)0{,}0p_1}{1{,}0p_1{}^2},$$

$$\frac{L_3}{1{,}0p_1{}^3} = \frac{(A_2+A_3+\ldots\ldots A_n)0{,}0p_1}{1{,}0p_1{}^3},$$

$$\frac{L_4}{1{,}0p_1{}^4} = \frac{A_2}{1{,}0p_1{}^4}+\frac{(A_2+A_3+\ldots\ldots A_n)0{,}0p_1}{1{,}0p_1{}^4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{L_{2n-1}}{1{,}0p_1{}^{2n-1}} = \frac{A_n.0{,}0p_1}{1{,}0p_1{}^{2n-1}},$$

$$\frac{L_{2n}}{1{,}0p_1{}^{2n}} = \frac{A_n}{1{,}0p_1{}^{2n}}+\frac{A_n.0{,}0p_1}{1{,}0p_1{}^{2n}}.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet, so erhält man:

$$R=\frac{L_1}{1{,}0p_1}+\frac{L_2}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{L_3}{1{,}0p_1{}^3}+\frac{L_4}{1{,}0p_1{}^4}+\ldots\ldots\frac{L_{2n}}{1{,}0p_1{}^{2n}}$$

$$=\frac{A_1}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{A_2}{1{,}0p_1{}^4}+\frac{A_3}{1{,}0p_1{}^6}+\frac{A_4}{1{,}0p_1{}^8}+\ldots\ldots\frac{A_{2n}}{1{,}0p_1{}^{2n}}$$

$$+\left(\frac{A_1}{1{,}0p_1}+\frac{A_1}{1{,}0p_1{}^2}\right)0{,}0p_1$$

$$+\left(\frac{A_2}{1{,}0p_1}+\frac{A_2}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{A_2}{1{,}0p_1{}^3}+\frac{A_2}{1{,}0p_1{}^4}\right)0{,}0p_1$$

$$+\left(\frac{A_3}{1{,}0p_1}+\frac{A_3}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{A_3}{1{,}0p_1{}^3}+\frac{A_3}{1{,}0p_1{}^4}+\frac{A_3}{1{,}0p_1{}^5}+\frac{A_3}{1{,}0p_1{}^6}\right)0{,}0p_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{A_n}{1{,}0p_1}+\frac{A_n}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{A_n}{1{,}0p_1{}^3}+\frac{A_n}{1{,}0p_1{}^4}+\ldots\ldots\frac{A_n}{1{,}0p_1{}^{2n}}\right)0{,}0p_1.$$

Summirt man nun die eingeklammerten Reihen, so entsteht der Reihe nach:

$$A_1 0{,}0p_1 \frac{1-1{,}0p_1{}^{-2}}{0{,}0p_1},\quad A_2 0{,}0p_1 \frac{1-1{,}0p_1{}^{-4}}{0{,}0p_1},\quad A_3 0{,}0p_1 \frac{1-1{,}0p_1{}^{-6}}{0{,}0p_1},\ldots$$

$$A_n 0.0p_1 \frac{1-1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p_1}.$$

Führt man nun die von $0{,}0p_1$ befreiten Werthe ein, so folgt durch den Wegfall der sich gleichen positiven und negativen Glieder:

$$19)\qquad R=\frac{L_1}{1{,}0p_1}+\frac{L_2}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{L_4}{1{,}0p_1{}^3}+\frac{L_4}{1{,}0p_1{}^4}+\ldots\frac{L_{2n}}{1{,}0p_1{}^{2n}}$$

$$=A_1+A_2+A_3+\ldots A_n=K,$$

und der aufgestellte Lehrsatz ist auch für halbjährliche Verzinsung und jährliche Kapitalabtragungen bewiesen, denn die Rabattirung mit einfachen Zinsen gibt auch hiefür, wie leicht zu ersehen, einen grössern und unrichtigen Werth.

Uebrigens können, wie ich in meiner Anleitung §. 28—30. bewiesen habe, die Zeitfriste, worin die Zahlungen L_1, L_2, L_2,.... L_n, zu leisten sind, ganz willkührlich angenommen und auch für sie der Beweis der Richtigkeit geführt werden. Ich verweise dorthin, um nicht schon Gesagtes zu wiederholen. Der Beweis ist übrigens hier auf eine andere Art als dort geführt.

Der obige Lehrsatz erweitert sich dann wie folgt:

20) Werden beliebige Kapitalzahlungen L_1, L_2, L_3,... ....L_n in willkührlichen Zeitabschnitten m_1, m_2, m_3, ... m_n gemacht und soll ihr Werth auf den Anfang des ersten Zeitabschnitts zurückgeführt werden, so muss es unter folgenden Bedingungen geschehen:

a. der Rechnung müssen Zinseszinse, nicht einfache Zinse zu Grunde gelegt werden;

b. die Rabattirung muss in den Zeitabschnitten vor sich gehen, in welchen die Zahlungen erfolgen;

c. die Wahl des Zinsfusses und der Verzinsungsart ist willkührlich. Sind aber Gründe vorhanden, woraus ein bestimmter Zinsfuss oder eine bestimmte Verzinsungsart erschlossen oder angenommen werden kann, so ist die Wahl beider nicht willkührlich, sondern es muss der Rabattirung der nämliche Zinsfuss (conforme Zins-

fuss $[(1{,}0p)^{\frac{1}{r}}-1]$, oder der relative $\frac{p}{r.100}$, nach den Jahresabschnitten r) und die nämliche Verzinsungsart zu Grunde gelegt werden, welche sich aus den vorliegenden Umständen ergeben.

§. 4.

Zweiter Beweis.

Obgleich in §. 3. der oben ausgesprochene Lehrsatz vollständig begründet ist, so gebe ich hier doch noch einen zweiten Beweis für seine Richtigkeit, einerseits wegen seiner Bedeutung in der politischen Arithmetik, andererseits desshalb, weil die ihn bedingende Grundlage nicht auf der Rechnung mit Zinseszinsen, sondern auf der mit einfachen Zinsen, respective der Trennung der Zinse von den Kapitalzahlungen beruht, die nur die Rabattirung für den ersten Zeitabschnitt, also einen Grundsatz in Anspruch nimmt, der allgemein, von den Vertheidigern der Leibnitz'schen, so wie der Hoffmann'schen Methode unzweifelhaft anerkannt ist, und der dadurch an Gewicht gewinnt, weil er auf das gleiche Resultat wie die Rechnung mit Zinseszinsen führt und daher wie diese den Ergebnissen der Rechnung mit einfachen Zinsen entgegen tritt.

Zugleich findet hierdurch die oben ausgesprochene Behauptung ihre Bestätigung, dass die richtige Auflösung eines und desselben Problems zu einem und demselben Resultate führen muss, wenn auch die zur Auflösung dienenden Methoden ganz verschieden sind.

Um den Beweis zu vereinfachen stellen wir die Aufgabe wie folgt.

Innerhalb n Jahren werden je am Ende der Jahre die Summen L_1, L_2, L_3, ... L_n gezahlt. Wie gross ist das Kapital K, welches durch diese Summen bei dem Zinsfuss p abgetragen wurde?

Es werden auch hier die oben unter No. 4—6, §. 3. aufgestellten Sätze vorausgesetzt.

Untersucht man hiernach die genannten Summen, so ergibt sich wie dort leicht, dass die Zahlung eines jeden beliebigen Jahres einerseits aus einer vorerst noch unbekannten, aber bestimmten Tilgungssumme und andererseits aus den Zinsen des Kapitalrestes, oder, was dasselbe ist, aus den Zinsen der Tilgungssumme dieses Jahres und denen aller nachfolgenden Jahre besteht.

Bezeichnet man nun die in diesen Jahreszahlungen enthaltenen und vorerst noch unbekannten Tilgungssummen durch A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_n, so erhält man folgende Gleichungen:

$$1)\quad L_1 = A_1 + K.0{,}0p = A_1 + (A_1 + A_2 + A_3 \ldots A_n)0{,}0p,$$
$$L_2 = A_2 + (A_2 + A_3 + A_4 + \ldots A_n)0{,}0p,$$
$$L_3 = A_3 + (A_3 + A_4 + A_5 \ldots A_n)0{,}0p,$$
$$L_4 = A_4 + (A_4 + A_5 + A_6 \ldots A_n)0{,}0p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_{n-1} = A_{n-1} + (A_{n-1} + A_n)0{,}0p,$$
$$L_n = A_n + A_n.0{,}0p.$$

Diess sind n Gleichungen mit n unbekannten Grössen A_1, A_2, A_3, ... A_n und man hat nun diese Grössen zu bestimmen. Ihre Summe gibt das gesuchte Kapital und man erhält wie oben:

$$2)\quad K = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n.$$

Um die unbekannten Grössen zu finden, verfahren wir wie folgt: Wir gehen von der letzten Gleichung aus, die nur eine Unbekannte hat, bestimmen sie; gehen von dieser zur zweitletzten über, bestimmen diese; gehen von dieser zur drittletzten über, bestimmen diese und so fort, bis alle einzelnen Grössen gefunden sind. Man findet dann durch eine einfache Umstellung aus

$$L_n = A_n + A_n.0{,}0p = A_n.1{,}0p:$$
$$A_n = \frac{L_n}{1{,}0p}.$$

Aus

$$L_{n-1} = A_{n-1} + A_{n-1}.0{,}0p + A_n.0{,}0p = A_{n-1}.1{,}0p + A_n.0{,}0p:$$
$$A_{n-1} = \frac{L_{n-1} - A_n.0{,}0p}{1{,}0p}.$$

Aus

$$L_{n-2} = A_{n-2} + A_{n-2}.0{,}0p + (A_{n-1} + A_n)0{,}0p$$
$$= A_{n-2}.1{,}0p + (A_{n-1} + A_n)0{,}0p:$$
$$A_{n-2} = \frac{L_{n-2} - (A_{n-1} + A_n)0{,}0p}{1{,}0p},$$

u. s. w. Setzt man dieses Verfahren fort, so bemerkt man bald ein einfaches Fortgangsgesetz, welches zu folgender Zusammenstellung führt:

$$3)\quad A_n = \frac{L_n}{1{,}0p},$$

$$A_{n-1} = \frac{1}{1{,}0p}[L_{n-1} - A_n . 0{,}0p],$$

$$A_{n-2} = \frac{1}{1{,}0p}[L_{n-2} - (A_{n-1} + A_n)0{,}0p],$$

$$A_{n-3} = \frac{1}{1{,}0p}[L_{n-3} - (A_{n-2} + A_{n-1} + A_n)0{,}0p],$$

. . . .

$$A_{n-k} = \frac{1}{1{,}0p}[L_{n-k} - (A_{n-k+1} + A_{n-k+2} + \dots A_{n-1} + A_n)0{,}0p],$$

. . . .

$$A_1 = \frac{1}{1{,}0p}[L_1 - (A_2 + A_3 + A_4 + \dots . A_n)0{,}0p].$$

Man erkennt aus dieser Darstellung, dass zur Auffindung sämmtlicher Kapitalabtragungen nur die Rabattirung für das erste Jahr erfordert wird.

Geschehen die Zahlungsleistungen sammt Verzinsung halbjährlich, so bleibt der schon gezeigte Entwicklungsgang in Kraft. Die Zahl der Unbekannten verdoppelt sich für n Jahre. Bezeichnet man den Halbjahreszins wie früher durch $\frac{1}{2}p = p_1$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$4)\quad L_1 = A_1 + (A_1 + A_2 + A_3 + \dots . A_{2n})0{,}0p_1,$$

$$L_2 = A_2 + (A_2 + A_3 + A_4 + \dots . A_{2n})0{,}0p_1,$$

$$L_3 = A_3 + (A_3 + A_4 + A_5 + \dots . A_{2n})0{,}0p_1,$$

. . . .

$$L_{2n-1} = A_{2n-1} + (A_{2n-1} + A_{2n})0{,}0p_1,$$

$$L_{2n} = A_{2n} + A_{2n} . 0{,}0p_1,$$

unter der Bedingung, dass

$$5)\quad K = A_1 + A_2 + A_3 + A_n, \dots, A_{2n}$$

ist. Die einzelnen Kapitalabtragungen bestimmen sich durch folgende Gleichungen:

$$6)\quad A_{2n} = \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1}$$

$$A_{2n-1} = \frac{1}{1{,}0p_1}[L_{2n-1} - A_{2n}.0{,}0p_1]$$

$$A_{2n-2} = \frac{1}{1{,}0p_1}[L_{2n-2} - (A_{2n-1} + A_{2n})0{,}0p_1]$$

$$A_{2n-3} = \frac{1}{1{,}0p_1}[L_{2n-3} - (A_{2n-2} + A_{2n-1} + A_{2n})\,0{,}0p_1]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{2n-h} = \frac{1}{1{,}0p_1}[L_{2n-h} - (A_{2n-h+1} + A_{2n-h+2} \ldots A_{2n})0{,}0p_1]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1 = \frac{1}{1{,}0p_1}[L_1 - (A_2 + A_3 + A_4 + \ldots A_{2n})\,0{,}0p_1]$$

In den vorstehenden Darstellungen sind alle gedenkbaren Fälle enthalten, auch die, wenn in einzelnen Zeitfristen keine Kapitalabtragungen vorkommen sollten. Sie fallen dann aus und man hat einfach sie durch 0 zu ersetzen.

Will man nun nach dieser Methode einzelne Fälle berechnen, so hat diess keine Schwierigkeit. Man wird finden, dass die aus ihnen folgenden Resultate genau mit den in §. 3. aufgestellten Sätzen übereinstimmen. Späterhin werden wir hierauf zurückkommen.

Die in No. 3) und 6) angegebene Rechnungsart ist eine zurücklaufende, denn man muss von der Auffindung einer unbekannten Grösse zu der folgenden übergehen und desshalb in der Ausführung etwas mühevoll und umständlich. Sie lässt sich aber durch Substitution früherer Werthe in eine unabhängige verwandeln.

Hierzu bedarf man folgender Reductionsformel:

$$7)\quad \frac{M}{1{,}0p^{r+1}} + \frac{M}{1{,}0p^{r+2}} + \frac{M}{1{,}0p^{r+3}} + \ldots \frac{M}{1{,}0p^{q}} = M\frac{1{,}0p^{-r} - 1{,}0p^{-q}}{0{,}0p},$$

wenn $q > p$ ist.

Setzt man nun zu dem Ende den Werth für A_n in No. 3) aus der ersten Gleichung in die zweite, so entsteht:

$$8)\quad A_{n-1} = \frac{1}{1{,}0p}\left(L_{n-1} - \frac{L_n . 0{,}0p}{1{,}0p}\right) = \frac{L_{n-1}}{1{,}0p} - \frac{L_n . 0{,}0p}{1{,}0p^2}.$$

Eben so erhält man durch Substitution von A_{n-1} und A_n in die dritte:

$$A_{n-2}=\frac{1}{1{,}0p}\left[L_{n-2}-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}\right].$$

Nun ist nach No. 7):

$$\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}=L_n.0{,}0p^2\frac{1{,}0p^{-1}-1{,}0p^{-2}}{0{,}0p}=\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^2},$$

also:

$$A_{n-2}=\frac{1}{1{,}0p}\left[L_{n-2}-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^2}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}\right]$$

oder

$$9)\qquad A_{n-2}=\frac{L_{n-2}}{1{,}0p}-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p^2}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^3}.$$

Durch Substitution von A_{n-2}, A_{n-1}, A_n aus No. 9), 8) und 3) in die vierte Gleichung entsteht:

$$A_{n-3}=\frac{1}{1{,}0p}\left[L_{n-3}-\frac{L_{n-2}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_{n-1}.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}+\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^3}\right.$$
$$-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}$$
$$\left.-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}\right].$$

Werden nun die Glieder der letzten Vertikalreihe nach No. 7) behandelt, so ist:

$$-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}+\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^3}=-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}$$
$$+L_n.0{,}0p^2.\frac{1{,}0p^{-1}-1{,}0p^{-3}}{0{,}0p}=-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^3}$$
$$=-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^3}.$$

Ebenso ist wie vorhin für die Glieder der vorletzten Vertikalreihe:

$$-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_{n-1}.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}=-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p^2}.$$

Hierdurch entsteht, wenn eingeführt und mit $\frac{1}{1{,}0p}$ multiplicirt wird:

$$10)\qquad A_{n-3}=\frac{L_{n-3}}{1{,}0p}-\frac{L_{n-2}.0{,}0p}{1{,}0p^2}-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p^3}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^4}.$$

Ferner wird durch Substitution aus 10), 9), 8):

$$A_{n-4}=\frac{1}{1{,}0p}\Big[L_{n-4}-\frac{L_{n-3}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_{n-2}.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}+\frac{L_{n-1}.0{,}0p^2}{1{,}0p^3}+\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^4}$$
$$-\frac{L_{n-2}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_{n-1}.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}+\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^3}$$
$$-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_n.0{,}0p^2}{1{,}0p^2}$$
$$-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}\Big].$$

Die letzte Vertikalreihe gibt nach No. 7):

$$-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}+L_n.0{,}0p^2\left(\frac{1}{1{,}0p^2}+\frac{1}{1{,}0p^3}+\frac{1}{1{,}0p^4}\right)=-\frac{L_n}{1{,}0p}.0{,}0p$$
$$+L_n.0{,}0p^2\frac{1{,}0p^{-1}-1{,}0p^{-4}}{0{,}0p}=-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}+\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^4}=-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^4}.$$

Die Summen der vorhergehenden Vertikalreihen sind schon oben angegeben worden. Demnach erhält man:

11)
$$A_{n-4}=\frac{L_{n-4}}{1{,}0p}-\frac{L_{n-3}.0{,}0p}{1{,}0p^2}-\frac{L_{n-2}.0{,}0p}{1{,}0p^3}-\frac{L_{n-1}.0{,}0p}{1{,}0p^4}-\frac{L_n.0{,}0p}{1{,}0p^5}.$$

Die Vergleichung von No. 8) — 11) zeigt, dass der Calcul einen festen Gang gewinnt, woraus sich das Fortgangsgesetz leicht erkennen lässt. Es ergibt sich daher zur Bestimmung sämmtlicher Unbekannten folgende Zusammenstellung:

12)
$$A_1=\frac{L_1}{1{,}0p}-\frac{0{,}0pL_2}{1{,}0p^2}-\frac{0{,}0pL_3}{1{,}0p^3}-\frac{0{,}0pL_4}{1{,}0p^4}\cdots-\frac{0{,}0pL_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}-\frac{0{,}0pL_n}{1{,}0p^n}$$
$$A_2=\frac{L_2}{1{,}0p}-\frac{0{,}0pL_3}{1{,}0p^2}-\frac{0{,}0pL_4}{1{,}0p^3}\cdots-\frac{0{,}0pL_{n-1}}{1{,}0p^{n-2}}-\frac{0{,}0pL_n}{1{,}0p^{n-1}}$$
$$A_3=\frac{L_3}{1{,}0p}-\frac{0{,}0pL_4}{1{,}0p^2}\cdots-\frac{0{,}0pL_{n-1}}{1{,}0p^{n-3}}-\frac{0{,}0pL_n}{1{,}0p^{n-2}}$$
$$A_4=\frac{L_4}{1{,}0p}\cdots-\frac{0{,}0pL_{n-1}}{1{,}0p^{n-4}}-\frac{0{,}0pL_n}{1{,}0p^{n-3}}$$
. . . .
$$A_{n-3}=\frac{L_{n-3}}{1{,}0p}-\frac{0{,}0pL_{n-2}}{1{,}0p^2}-\frac{0{,}0pL_{n-1}}{1{,}0p^3}-\frac{0{,}0pL_n}{1{,}0p^4}$$
$$A_{n-2}=\frac{L_{n-2}}{1{,}0p}-\frac{0{,}0pL_{n-1}}{1{,}0p^2}-\frac{0{,}0pL_n}{1{,}0p^3}$$
$$A_{n-1}=\frac{L_{n-1}}{1{,}0p}-\frac{0{,}0pL_n}{1{,}0p^2}$$
$$A_n=\frac{L_n}{1{,}0p}$$

Zählt man nun sämmtliche Vertikalreihen in No. 12) nach dem in No. 7) angegebenen Gesetze zusammen, so ergibt sich als Summenwerth sämmtlicher Unbekannten oder als gegenwärtiger Werth aller Zahlungsleistungen (R) Folgendes:

$$12) \quad R = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_n$$

$$= \frac{L_n}{1{,}0p} - 0{,}0p \,.\, L_n \frac{1{,}0p^{-1} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} = \frac{L_n}{1{,}0p} - \frac{L_n}{1{,}0p} + \frac{L_n}{1{,}0p^n}$$

$$\frac{L_{n-1}}{1{,}0p} - 0{,}0p \,.\, L_{n-1} \frac{1{,}0p^{-1} - 1{,}0p^{-n+1}}{0{,}0p} = \frac{L_{n-1}}{1{,}0p} - \frac{L_{n-1}}{1{,}0p} + \frac{L_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}}$$

$$\frac{L_{n-2}}{1{,}0p} - 0{,}0p \,.\, L_{n-2} \frac{1{,}0p^{-1} - 1{,}0p^{-n+2}}{0{,}0p} = \frac{L_{n-2}}{1{,}0p} - \frac{L_{n-2}}{1{,}0p} + \frac{L_{n-2}}{1{,}0p^{n-2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{L_4}{1{,}0p} - 0{,}0p L_4 \frac{1{,}0p^{-1} - 1{,}0p^{-4}}{0{,}0p} = \frac{L_4}{1{,}0p} - \frac{L_4}{1{,}0p} + \frac{L_4}{1{,}0p^4}$$

$$\frac{L_3}{1{,}0p} - 0{,}0p L_3 \frac{1{,}0p^{-1} - 1{,}0p^{-3}}{0{,}0p} = \frac{L_3}{1{,}0p} - \frac{L_3}{1{,}0p} + \frac{L_3}{1{,}0p^3}$$

$$\frac{L_2}{1{,}0p} - 0{,}0p L_2 \frac{1{,}0p^{-1} - 1{,}0p^{-2}}{0{,}0p} = \frac{L_2}{1{,}0p} - \frac{L_2}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2}$$

$$\frac{L_1}{1{,}0p} = \frac{L_1}{1{,}0p}$$

Durch den Wegfall derselben positiven und negativen Glieder und in Rücksicht auf No. 12) ist der gegenwärtige Werth sämmtlicher Zahlungsleistungen:

$$13) \quad R = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_n = K$$

$$= \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \frac{L_4}{1{,}0p^4} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p^n}$$

Diess ist ein zweiter, auf anderer Basis ruhender Beweis des oben aufgestellten Lehrsatzes. No. 13) fällt mit No. 9), §. 3. zusammen.

Behandelt man nun auf ganz gleiche Weise die Darstellung No. 6), so wird man zu folgendem Resultate geführt:

$$14) \quad R = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_{2n} = K$$

$$= \frac{L_1}{1{,}0p_1} + \frac{L_2}{1{,}0p_1^{\,2}} + \frac{L_3}{1{,}0p_1^{\,3}} + \frac{L_n}{1{,}0p_1^{\,4}} + \ldots \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1^{\,2n}}$$

was mit No. 19), §. 3. übereinstimmt.

Die hier, wie im ersten Beweise, gemachten Schlüsse gehen von der Voraussetzung aus, dass jede der Summen L_1, L_2, L_3, ... L_n eine Tilgungssumme und die Zinse vom Schuldrest enthält, also grösser ist, als die Zinse des Schuldrestes. Diese Beschränkung ist aber nicht nöthig. Die einzelne Summe kann auch bloss die Zinse des Schuldrestes oder auch *weniger* enthalten. Im ersten Falle ergibt sich keine Tilgung, oder das zugehörige A geht in 0 über. Im zweiten Falle entsteht ein negativer Werth. Dieser muss, wenn man No. 3) des zweiten Beweises anwendet, als Guthaben des Gläubigers betrachtet, ihm gut geschrieben und in seinem Interesse behandelt werden. Im Calcul sind aber, da er allgemein ist, diese Fälle schon vorgesehen. Welcher Methode man sich nun bedienen mag, immer wird man das gleiche Resultat finden.

§. 5.

Neue Methode, den gegenwärtigen Werth künftig fälliger Summen durch Rechnung mit einfachen Zinsen zu bestimmen.

Die Darstellung No. 3) und 6), §. 4. gibt eine neue Methode, den Werth künftiger Kapitalzahlungen auf die Gegenwart zurückzuführen, und zwar, wie man sieht, durch *einfache Zinsrechnung*, also mit Ausschluss der Zinszinsrechnung, deren Anwendung so vielen Anstoss und Widerspruch erregt hat. Sie besteht in Folgendem, wie sich vorerst aus No. 3) ergibt.

1) Man rabattire die Kapitalzahlung des letzten Jahrs, mit der man zu beginnen hat, mit einjährigen Zinsen. Der hiedurch erhaltene Betrag ist die Tilgungssumme des letzten Jahres A_n, denn die letzte Zahlungsleistung enthält die letzte Tilgungssumme und deren Zins. Man bemerke diese Summe.

2) Hierauf berechne man den Jahreszins der letzten Tilgungssumme $A_n.0,0p$, ziehe ihn von der Zahlung des zweitletzten Jahres L_{n-1} ab (denn in dieser sind die Zinse der zwei letzten Jahre enthalten) und rabattire nun den Rest mit den Jahreszinsen. Diess gibt die Tilgungssumme des zweitletzten Jahrs A_{n-1}. Man bemerke diese Summe.

3) Hierauf berechne man den Jahreszins der zwei letzten Tilgungssummen $(A_{n-1} + A_n)0,0p$, ziehe ihn von der Zahlung des drittletzten Jahres L_{n-2} ab (denn in dieser sind die Zinse der drei letzten Jahre enthalten) und rabattire dann den Rest mit den Jahreszinsen. Diess gibt die Tilgungssumme des drittletzten Jahres A_{n-2}. Man bemerke diese Summe.

Fährt man auf diese Weise fort nach Vorschrift von No. 3) und berechnet allmälig sämmtliche Tilgungssummen, so hat man den gesuchten Kapitalwerth No. 2), §. 4., und zwar durch einfache Zinsrechnung.

Die in dem Vorhergehenden vorgetragenen Sätze sollen nun an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Die Summen 1500, 1450, 1400, 1350, 1250, 1200, 1150, 1100, 1050 sind der Reihe nach am Ende der zehn folgenden Jahre fällig. Wie gross ist ihr gegenwärtiger Werth bei 5 Procent Zinsen?

Die Antwort hierauf ist sehr einfach, denn man sieht leicht, dass die angegebenen Summen nichts anderes sind, als die Heimzahlung eines Kapitals von 10000 (und deswegen ist auch die Aufgabe in dieser einfachen Form gewählt), wenn jährlich 1000 vom Kapital abgetragen und ausserdem die Zinse vom Schuldrest zu 5 Proc. gezahlt werden. Man weiss, auf welches Resultat die anzuwendende Methode führen muss, und diess gibt ein Merkmal für ihre Richtigkeit.

Wendet man nun die Rechnung mit Zinseszinsen zur Bestimmung des gegenwärtigen Werthes obiger Summen an, so erhält man nach No. 9), §. 3., indem man $p=5$, $n=1, 2, 3, \ldots. 10$ und für die $L_1, L_2, L_3 \ldots\ldots L_{10}$ die entsprechenden Werthe setzt:

$$R=\frac{1500}{1,05}+\frac{1450}{1,05^2}+\frac{1400}{1,05^3}+\frac{1350}{1,05^4}+\frac{1300}{1,05^5}+\frac{1250}{1,05^6}+\frac{1200}{1,05^7}$$

$$+\frac{1150}{1,05^8}+\frac{1100}{1,05^9}+\frac{1050}{1,05^{10}}$$

$$=1500.0,95238095+1450.0,9070295+1400.0,8638376$$

$$+1350.0,8227025+1300.0,7835262+1250.0,7462154$$

$$+1200.0,7106183+1150.0,6768394+1100.0,6446089$$

$$+1050.0,6139133$$

$$\begin{array}{r} =1428,5714285 \\ 1315,1927931 \\ 1209,3726386 \\ 1110,6483412 \\ 1018,5840158 \\ 932,7692462 \\ 852,8175960 \\ 778,3652663 \\ 709,0698076 \\ 644,6089167 \\ \hline 9999,999999 \end{array}$$

Demnach ist:

$$R = 9999{,}99999\ldots. = 10000.$$

Die Rechnung mit einfachen Zinsen gibt dagegen, wenn man die entsprechenden Werthe einführt:

$$R_1 = \frac{1500}{1{,}05} + \frac{1450}{1{,}10} + \frac{1400}{1{,}15} + \frac{1350}{1{,}20} + \frac{1300}{1{,}25} + \frac{1250}{1{,}30} + \frac{1200}{1{,}35} + \frac{1150}{1{,}40} + \frac{1100}{1{,}45} + \frac{1050}{1{,}50}$$

$$\begin{array}{rr} = & 1428{,}571\,428\,571 \\ & 1318{,}181\,818\,181 \\ & 1217{,}391\,304\,347 \\ & 1125{,}000\,000\,000 \\ & 1040{,}000\,000\,000 \\ & 961{,}384\,615\,384 \\ & 888{,}888\,888\,888 \\ & 821{,}428\,571\,428 \\ & 758{,}620\,689\,655 \\ & 700{,}000\,000\,000 \\ \hline & 10259{,}467\,316\,454 \end{array}$$

also

$$R = 10259{,}467\,316\,454\ldots,$$

und folglich mehr als der wahre Werth beträgt.

Behandelt man die vorstehende Aufgabe nach der in diesem Paragraphen angegebenen Methode, so erhält man aus der letzten Jahreszahlung die Tilgungssumme nach No. 3), §. 4.:

$$A_{10} = \frac{L_{10}}{1{,}0p} = \frac{1050}{1{,}05} = 1000.$$

Der Zins hievon beträgt $1000 . 0{,}05 = 50$. Die Tilgungssumme des neunten Jahrs berechnet sich nach dem Abzug dieses Zinsbetrags so:

$$A_9 = \frac{1}{1{,}0p}(L_9 - A_{10} . 0{,}0p) = \frac{1100 - 50}{1{,}05} = 1000.$$

Der Zins der beiden letzten Zahlungen beträgt $2000 . 0{,}05 = 100$. Es ist daher:

$$A_8 = \frac{1}{1{,}0p}[L_8 - (A_9 + A_{10})0{,}0p) = \frac{1150 - 100}{1{,}05} = 1000.$$

Ebenso erhält man:

$$A_7 = \frac{1}{1,0p}[L_7 - (A_8 + A_9 + A_{10})0,0p] = \frac{1200-3000.0,05}{1,05} = \frac{1050}{1,05} = 1000,$$

$$A_6 = \frac{1}{1,0p}[L_6 - (A_7 + A_8 + \ldots A_{10})0,0p] = \frac{1250-4000.0,05}{1,05} = \frac{1050}{1,05} = 1000,$$

$$A_5 = \frac{1}{1,0p}[L_5 - (A_6 + A_7 + \ldots A_{10})0,0p] = \frac{1300-5000.0,05}{1,05} = \frac{1050}{1,05} = 1000,$$

$$A_4 = \frac{1}{1,0p}[L_4 - (A_5 + A_6 + \ldots A_{10})0,0p] = \frac{1350-6000.0,05}{1,05} = \frac{1050}{1,05} = 1000,$$

$$A_3 = \frac{1}{1,0p}[L_3 - (A_4 + A_5 + \ldots A_{10})0,0p] = \frac{1400-7000.0,05}{1,05} = \frac{1050}{1,05} = 1000,$$

$$A_2 = \frac{1}{1,0p}[L_2 - (A_3 + A_4 + \ldots A_{10})0,0p] = \frac{1450-8000.0,05}{1,05} = \frac{1050}{1,05} = 1000,$$

$$A_1 = \frac{1}{1,0p}[L_1 - (A_2 + A_3 + \ldots A_{10})0,0p] = \frac{1500-9000.0,05}{1,05} = \frac{1050}{1,05} = 1000.$$

Jede Jahreszahlung gibt die Tilgungssumme 1000, wie es die Anlage der vorgelegten Aufgabe verlangt. Folglich ist der Werth des abgetragenen Kapitals

$$R = 10000.$$

Die hier mitgetheilte Methode führt also auf einem ganz andern Wege, als die Rechnung mit Zinseszinsen, zu demselben Resultat wie jene. Die Rechnung mit einfachen Zinsen gibt dagegen einen andern und grössern gegenwärtigen Kapitalwerth für die nämlichen Summen. Letzteres ist offenbar falsch und steht im Widerspruch mit dem durch zwei andere Methoden gleichmässig aufgefundenen Resultate.

Man kann auch die Richtigkeit des in §. 3. aufgestellten Lehrsatzes an den beiden aufgefundenen Zahlenwerthen selbst nachweisen, wenn man von dem Guthaben des Gläubigers ausgeht, den Stand desselben Jahr für Jahr verfolgt, die Zahlungsleistungen des Schuldners in Rechnung bringt und so den Stand der Schuld am Ende des zehnten Jahres, an welchem sie offenbar getilgt ist, feststellt.

Hiernach ergibt sich für die durch Zinszinsrechnung und die durch die in diesem Paragraphen mitgetheilte Methode aufgefundene Summe folgende Rechnung bei 5 Proc. Zins:

Der Gläubiger gibt gegenwärtig	10000
Hiezu kommen die Zinse des ersten Jahres	500
	10500
Der Schuldner zahlt am Ende des ersten Jahres	1500
Stand der Schuld am Ende des ersten Jahres	9000
Hiezu die Zinse des zweiten Jahres	450
	9450
Der Schuldner zahlt am Ende des zweiten Jahres	1450
Stand der Schuld am Ende des zweiten Jahres	8000
Hiezu die Zinse des dritten Jahres	400
	8400
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1400
Stand der Schuld am Ende des dritten Jahres	7000
Hiezu die Zinse des vierten Jahres	350
	7350
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1350
Stand der Schuld am Ende des vierten Jahres	6000
Hiezu die Zinse des fünften Jahres	300
	6300
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1300
Stand der Schuld am Ende des fünften Jahres	5000
Hiezu die Zinse des sechsten Jahres	250
	5250
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1250
Stand der Schuld am Ende des sechsten Jahres	4000
Hiezu die Zinse des siebenten Jahres	200
	4200
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1200
Stand der Schuld am Ende des siebenten Jahres	3000
Hiezu die Zinse des achten Jahres	150
	3150
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1150
Stand der Schuld am Ende des achten Jahres	2000
Hierzu die Zinse des neunten Jahres	100
	2100
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1100
Stand der Schuld am Ende des neunten Jahres	1000
Hiezu die Zinse des zehnten Jahres	50
	1050
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1050
Stand der Schuld am Ende des zehnten Jahres	0000

Man sieht, dass hiernach die Forderung des Gläubigers durch die Zahlungen des Schuldners vollständig befriedigt ist.

Für den durch die Rechnung mit einfachen Zinsen aufgefundenen Werth ergibt sich folgende Prüfung:

Der Gläubiger gibt gegenwärtig	10259,4673
Hiezu Zins des ersten Jahres	512,9734
	10772,4407
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	1500
Stand der Schuld am Ende des ersten Jahres	9272,4407
Hiezu Zins des zweiten Jahres	463,6220
	9736,0627
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1450
Stand der Schuld am Ende des zweiten Jahres . . .	8286,0627
Hiezu Zins des dritten Jahres	414,3031
	8700,3658
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1400
Stand der Schuld am Ende des dritten Jahres	7300,3658
Hiezu Zins des vierten Jahres	365,0183
	7665,3841
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1350
Stand der Schuld am Ende des vierten Jahres	6315,3841
Hiezu Zins des fünften Jahres	315,7692
	6631,1533
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1300
Stand der Schuld am Ende des fünften Jahres	5331,1533
Hiezu Zins des sechsten Jahres	266,5577
	5597,7110
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1250
Stand der Schuld am Ende des sechsten Jahres . . .	4347,7110
Hiezu Zins des siebenten Jahres	217,3856
	4565,0966
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1200
Stand der Schuld am Ende des siebenten Jahres . . .	3365,0966
Hiezu Zins des achten Jahres	168,2548
	3533,3514
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1150
Stand der Schuld am Ende des achten Jahres	2383,3514
Hiezu Zins des neunten Jahres	119,1676
	2502,5190
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1100
Stand der Schuld am Ende des neunten Jahres . . .	1402,5190
Hiezu Zins des zehnten Jahres	70,1260
	1472,6450
Hievon Zahlung des Schuldners ab	1050
Stand der Schuld am Ende des zehnten Jahres	422,6450

Hiernach ergibt sich noch ein Schuldrest von 422,645, welchen der Gläubiger zu fordern hat. Der Schuldner hat daher im Laufe der Zeit zu wenig gezahlt oder der Gläubiger hat mehr gezahlt, als er zahlen sollte. Es tritt die Unrichtigkeit der Rechnung mit einfachen Zinsen ganz klar hervor und bestätigt hiedurch die Richtigkeit des oben aufgestellten Lehrsatzes und zugleich der in diesem Paragraphen mitgetheilten Rechnungsmethode, so wie der Rechnung mit Zinseszinsen. Wären derartige, allerdings etwas zeitraubende Untersuchungen angestellt worden, so wäre man schon längst über die oben angeregte Streitfrage in's Klare gekommen.

§. 6.

Lehrsatz. **Wird von einer Person A (Gläubiger) eine Summe K an eine andere B (Schuldner) zur Benutzung gegeben, werden von der letztern die Gegenzahlungen**

$$L_1,\ L_1,\ L_3, \dots L_n,\ L_{n+1},\ L_{n+2} + \dots L_q$$

am Ende von q auf einander folgenden Zeitabschnitten (Jahresfristen gewöhnlich) gemacht, und soll der Stand der gegenseitigen Forderungen nach n Jahren (also in der Zukunft) ermittelt werden, so erhält man ein richtiges Resultat, wenn man mit Zinseszinsen, und ein unrichtiges, zu kleines Resultat, wenn man mit einfachen Zinsen rechnet.

Erster Beweis.

Die Beweisführung ruht ganz auf den in §. 3. aufgestellten Grundsätzen. Es handelt sich hier wie dort um Forderung und Gegenleistungen, um Abgabe eines Kapitals vom Gläubiger und um künftige Gegenleistungen des Schuldners. Letztere müssen hier wie dort aus Kapitalabtragungen und den jeweils fälligen Zinsen des Schuldrestes bestehen. Scheidet man auch hier beide und nennt die entsprechenden Kapitalabtragungen der Reihe nach $A_1,\ A_2,\ A_3, \dots A_n,\ A_{n+1},\ A_{n+2}, \dots A_q$, deren Grösse ganz beliebig ist, und die so gar nicht gekannt zu sein brauchen, da es sich nicht um ihre Ermittelung handelt, so treten auch hier die gleichen Bedingungen wie früher auf und es muss ausser der eben genannten Bestimmung die Summe sämmtlicher Kapitalabtragungen dem dargeliehenen Kapital gleich kommen.

Hiernach lässt sich die vorliegende Aufgabe in folgender, die Auflösung erleichternder Weise darstellen.

Ein Kapital K wird von A (dem Gläubiger) zu p Procent ausgeliehen und in q Jahren so von B (dem Schuldner) getilgt, dass der Reihe nach die Summen

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots A_q$$

je am Ende des Jahres vom Kapitale abgetragen und ausserdem die fälligen Zinse vom Schuldrest gezahlt werden.

Welches ist der Stand der Schuld nach n Jahren, wenn
a. mit Zinseszinsen,
b. mit einfachen Zinsen
gerechnet wird?

Man hat hieraus im Einklang mit §. 3. Folgendes.

Die Grösse der Schuld ist:

$$1)\qquad K = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots A_q.$$

Der Stand der Schuld am Ende des $n$ten Jahres aus No. 1):

$$2)\qquad S = K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots - A_n = A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots A_q.$$

Ferner gelten nach dem Gesagten (vergl. hiemit No. 3), §. 3.) folgende Gleichungen:

$$3)\qquad \begin{aligned} L_1 &= A_1 + K.0{,}0p \\ L_2 &= A_2 + (K - A_1)0{,}0p \\ L_3 &= A_3 + (K - A_1 - A_2)0{,}0p \\ L_4 &= A_4 + (K - A_1 - A_2 - A_3)0{,}0p \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n &= A_n + (K - A_1 - A_2 - A_3 - \ldots A_{n-1})0{,}0p \end{aligned}$$

Rechnet man nun mit Zinseszinsen, so beträgt das Guthaben des Gläubigers nach n Jahren:

$$4)\qquad F = K.1{,}0p^n.$$

Die Zahlungsleistungen des Schuldners, welche sämmtlich erst am Ende der in die Zahlungsperiode fallenden Jahre fällig werden, haben nach n Jahren folgenden Werth:

5)

$$G = L_1 . 1{,}0p^{n-1} = A_1 . 1{,}0p^{n-1} + K . 0{,}0p . 1{,}0p^{n-1}$$
$$L_2 . 1{,}0p^{n-2} = A_2 . 1{,}0p^{n-2} + (K - A_1)\, 0{,}0p . 1{,}0p^{n-2}$$
$$L_3 . 1{,}0p^{n-3} = A_3 . 1{,}0p^{n-3} + (K - A_1 - A_2)\, 0{,}0p . 1{,}0p^{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_{n-1} . 1{,}0p = A_{n-1} . 1{,}0p + (K - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-2})\, 0{,}0p . 1{,}0p$$
$$L_n = A_n + (K - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-2} - A_{n-1})\, 0{,}0p$$

Durch Auflösung der Ausdrücke auf der rechten Seite erhält man:

6)

$$G = L_1 . 1{,}0p^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^{n-2} + L_3 . 1{,}0p^{n-3} \ldots + L_{n-1} . 1{,}0p + L_n$$
$$= A_1 . 1{,}0p^{n-1} + K . 0{,}0p . 1{,}0p^{n-1}$$
$$+ A_2 . 1{,}0p^{n-2} + K . 0{,}0p . 1{,}0p^{n-2} - A_1 . 0{,}0p . 1{,}0p^{n-2}$$
$$+ A_3 . 1{,}0p^{n-3} + K . 0{,}0p . 1{,}0p^{n-3} - A_1 . 0{,}0p . 1{,}0p^{n-3} - A_2 . 0{,}0p . 1{,}0p^{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A_{n-1} . 1{,}0p + K . 0{,}0p . 1{,}0p - A_1 . 0{,}0p . 1{,}0p - A_2 . 0{,}0p . 1{,}0p \ldots - A_{n-2} . 0{,}0p . 1{,}0p$$
$$+ A_n + K . 0{,}0p - A_1 . 0{,}0p - A_2 . 0{,}0p \ldots - A_{n-2} . 0{,}0p - A_{n-1} . 0{,}0p.$$

Die Ausdrücke derselben Vertikalreihe auf der rechten Seite von der zweiten an lassen sich auf folgende Weise summiren:

$$7)\quad M . 1{,}0p^r + M . 1{,}0p^{r+1} + M . 1{,}0p^{r+2} + \ldots M . 1{,}0p^t = M . \frac{1{,}0p^{t+1} - 1{,}0p^r}{0{,}0p}.$$

Geschieht diess, so erhält man aus No. 6), wenn man statt t und r die entsprechenden Werthe setzt:

$$G = L_1 . 1{,}0p^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^{n-2} + L_3 . 1{,}0p^{n-3} - \ldots L_{n-1} . 1{,}0p + L_n$$
$$= A_1 . 1{,}0p^{n-1} + A_2 . 1{,}0p^{n-2} + A_3 . 1{,}0p^{n-3} + \ldots A_{n-1} . 1{,}0p + A_n$$
$$+ K . 0{,}0p . \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} - A_1 . 0{,}0p . \frac{1{,}0p^{n-1} - 1}{0{,}0p} - A_2 . 0{,}0p . \frac{1{,}0p^{n-2} - 1}{0{,}0p} \ldots$$
$$- A_{n-2} . 0{,}0p . \frac{1{,}0p^2 - 1}{0{,}0p} - A_{n-1} . 0{,}0p . \frac{1{,}0p - 1}{0{,}0p},$$

oder wenn gehörig multiplicirt und reducirt wird:

$$G = L_1 . 1{,}0p^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^{n-2} + L_3 . 1{,}0p^{n-3} \dots L_{n-1} . 1{,}0p + L_n$$

$$= A_1 . 1{,}0p^{n-1} + A_2 . 1{,}0p^{n-2} + A_3 . 1{,}0p^{n-2} \dots A_{n-1} . 1{,}0p + A_n$$

$$+ K . 1{,}0p^n - K$$

$$- A_1 . 1{,}0p^{n-1} - A_2 . 1{,}0p^{n-2} - A_3 . 1{,}0p^{n-3} \dots - A_{n-2} . 1{,}0p^2 - A_{n-1} . 1{,}0p$$

$$+ A_1 \qquad + A_2 \qquad + A_3 \qquad + A_{n-2} \qquad + A_{n-1}.$$

Da nun die gleichen positiven und negativen Glieder wegfallen so entsteht für den Werth der Zahlungsleistungen des Schuldners nach n Jahren:

8) $$G = L_1 . 1{,}0p^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^{n-2} + L_3 . 1{,}0p^{n-3} + \dots L_{n-1} . 1{,}0p + L_n$$
$$= K . 1{,}0p^n - K + A_1 + A_2 + A_3 + \dots A_{n-1} + A_n$$

In No. 4) ist das Guthaben des Gläubigers und in No. 8) der Werth der Zahlungsleistungen des Schuldners auf das Ende des $n$ten Jahres angegeben. Werden diese mit einander verglichen, so ergibt sich aus ihrem Unterschied der Stand der Schuld auf diesen Zeitpunkt. Dieser ergibt sich sofort aus No. 4) und No. 8):

$$S = F - G = K . 1{,}0p^n - (L_1 . 1{,}0p^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^{n-2} + \dots L_{n-1} . 1{,}0p + L_n)$$
$$= K . 1{,}0p^n - (K . 1{,}0p^n - K + A_1 + A_2 + A_3 \dots A_n)$$

oder

9)

$$S = K . 1{,}0p^n - L_1 . 1{,}0p^{n-1} - L_2 . 1{,}0p^{n-2} - L_3 . 1{,}0p^{n-3} \dots - L_{n-1} . 1{,}0p - L_n$$
$$= K - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 \dots - A_n = A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + \dots A_q.$$

Werden die Zahlungsleistungen vom Schuldner halbjährlich gemacht, und geschieht die Verzinsung auch halbjährlich $\frac{1}{2}p = p_1$, so ändert diess in der Anlage und dem Entwicklungsgange nichts. Es entsteht dann die doppelte Zahl der Zahlungs-Leistungen $L_1, L_2, L_3, \dots L_{2n}, L_{2n+1}, \dots L_{2q}$ und die doppelte Zahl der Kapitalabtragungen $A_1, A_2, A_3, \dots A_{2n}, A_{2n+1}, \dots A_{2q}$, und man hat:

10) $$K = A_1 + A_2 + A_3 \dots A_{2n} + A_{2n+1} \dots A_{2q}$$

und

11) $$S = K - A_1 - A_2 - A_3 \dots - A_n = A_{2n} + A_{2n+1} + \dots A_{2q}.$$

Es gelten dann folgende Gleichungen:

12) $L_1 = A_1 + K.0{,}0p_1$

$L_2 = A_2 + (K - A_1)\,0{,}0p_1$

$L_3 = A_3 + (K - A_1 - A_2)\,0{,}0p_1$

$L_4 = A_4 + (K - A_1 - A_2 - A_3)\,0{,}0p_1$

. . . .

$L_{2n} = A_{2n} + (K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots - A_{2n-1})\,0{,}0p_1$

Das Guthaben des Gläubigers ist dann nach n Jahren:

13) $$F = K.1{,}0p_1^{2n};$$

die Zahlungsleistungen des Schuldners haben nach n Jahren folgenden Werth:

14) $$G =$$

$L_1.1{,}0p_1^{2n-1} = A_1 . 1{,}0p_1^{2n-1} + K.0{,}0p_1 . 1{,}0p_1^{2n-1}$

$L_2.1{,}0p_1^{2n-2} = A_2 . 1{,}0p_1^{2n-2} + (K - A_1)\,0{,}0p_1 . 1{,}0p_1^{2n-2}$

$L_3.1{,}0p_1^{2n-3} = A_3 . 1{,}0p^{2n-3} + (K - A_1 - A_2)\,0{,}0p_1 . 1{,}0p_1^{2n-3}$

. . . .

$L_{2n-1} . 1{,}0p_1 = A_{2n-1} . 1{,}0p_1 + (K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots - A_{2n-2})\,0{,}0p_1 . 1{,}0p_1$

$L_{2n} = A_{2n} + (K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots - A_{2n-1})\,0{,}0p_1$

Werden nun die Glieder dieser Darstellung gehörig geordnet, die zusammengehörigen Vertikalreihen nach No. 7) summirt, werden dann die weiter nöthigen Reductionen gemacht, so ergibt sich für den Stand der Schuld am Ende des $n$ten Jahres:

15)

$$S = K.1{,}0p_1^{2n} - L_1 . 1{,}0p_1^{2n-1} - L_2 . 1{,}0p_1^{2n-2} - L_3 . 1{,}0p_1^{2n-3} \ldots - L_{2n-1} . 1{,}0p_1 - L_{2n}$$

$$= K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots - A_{2n} = A_{2n+1} + A_{2n+2} \ldots A_{2q},$$

was mit 9) übereinstimmt.

Die in No. 9) und No. 15) gefundenen Resultate stimmen mit den oben aufgestellten Prämissen No. 2) und No. 11) überein, und somit ist der erste Theil des obigen Lehrsatzes bewiesen.

Rechnet man, um auch den zweiten Theil zu beweisen, mit **einfachen Zinsen** und schreibt der Kürze und Bequemlichkeit wegen $0{,}0p = \frac{p}{100} = r$, so beträgt das Guthaben des Gläubigers nach n Jahren:

$$16)\qquad F_1 = K(1+nr) = K + Knr.$$

Die Zahlungsleistungen des Schuldners haben bei einfachen Zinsen nach No. 3) folgenden Werth nach n Jahren, wenn die entsprechenden Werthe eingeführt werden:

$$17)\quad \begin{aligned} G_1 = L_1(1+(n-1)r) &= A_1(1+(n-1)r)+K.r(1+(n-1)r),\\ L_2(1+(n-2)r) &= A_2(1+(n-2)r)+(K-A_1)r(1+(n-2)r),\\ L_3(1+(n-3)r) &= A_3(1+(n-3)r)+(K-A_1-A_2)r(1+(n-3)r),\\ &\dots\dots\dots\\ L_{n-1}(1+r) &= A_{n-1}(1+r)+(K-A_1-A_2-A_3\dots-A_{n-2})r(1+r),\\ L_n &= A_n+(K-A_1-A_2-A_3\dots-A_{n-2}-A_{n-1})r. \end{aligned}$$

Durch Auflösung der Klammern auf der rechten Seite entsteht:

$$\begin{aligned} G_1 &= L_1(1+(n-1)r)+L_2(1+(n-2)r)+L_3(1+(n-3)r)\dots L_{n-1}(1+r)+L_n\\ &= A_1(1+(n-1)r)+A_2(1+(n-2)r)+A_3(1+(n-3)r)\dots A_{n-1}(1+r)+A_n\\ &+ Kr(1+n-1)r)\\ &+ Kn(1+(n-2)r)-A_1r(1+(n-2)r)\\ &+ Kr(1+(n-3)r)-A_1r(1+(n-3)r)-A_2r(1+(n-3)r)\\ &+ Kr(1+(n-4)r)-A_1r(1+(n-4)r)-A_2r(1+(n-4)r)-A_3r(1+(n-4)r)\\ &\dots\dots\dots\\ &+ Kr(1+r)-A_1r(1+r)-A_2r(1+r)-A_3(1+r)r\dots-A_{n-2}r(1+r)\\ &+ Kr \quad -A_1r \quad -A_2r \quad -A_3r\dots-A_{n-2}r-A_{n-1}r. \end{aligned}$$

Die Vertikalreihen auf der rechten Seite lassen sich nach der Formel

$$M.a+M(a+d)+M(a+2d)\dots M(a+(x-1)d)$$

$$= Max + M.\frac{x(x-1)}{1.2}d$$

summiren, wenn man $a=1$, $d=r$, und statt M und x die entsprechenden Werthe setzt. Hierdurch erhält man, wenn man die Glieder der ersten Horizontalreihe trennt:

$$G_1 = L_1(1+(n-1)r)+L_2(1+(n-2)r)+L_3(1+(n-3)r)+\ldots L_{n-1}(1+r)+L_n$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots A_n$$

$$+ A_1(n-1)r + A_2(n-2)r + A_3(n-3)r \ldots A_{n-1}.r$$

$$+ Kn.r + K\frac{n(n-1)}{1.2}r^2$$

$$- A_1(n-1)r - A_1\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}r^2$$

$$- A_2(n-2)r - A_2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}r^2$$

$$- A_3(n-3)r - A_3\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}r^2$$

. . . .

$$- A_{n-2}.2r - A_{n-2}\frac{2.1}{1.2}.r^2$$

$$- A_{n-1}.r.$$

Da nun die gleichen positiven und negativen Glieder aus dieser Gleichung wegfallen, so folgt hieraus:

18) $$G_1 = L_1(1+(n-1)r) + L_2(1+(n-2)r)\ldots L_{n-1}(1+r) + L_n$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n$$

$$+ Knr + K.\frac{n(n-1)}{1.2}r^2$$

$$-[A_1\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + A_2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + A_3\frac{(n-3)(n-4)}{1.2} + \ldots A_{n-2}\frac{2.1}{1.2}]r^2.$$

Vergleicht man nun das Guthaben des Gläubigers No. 16) mit dem Werthe sämmtlicher Zahlungen des Schuldners No. 18), so ist bei einfachen Zinsen der Stand der Schuld am Ende des $n$ten Jahres:

19)

$$S_1 = F_1 - G_1 = K(1+nr) - [L_1(1+(n-1)r) + L_2(1+(n-2)r) \ldots + L_{n-1}(1+r) + L_n]$$

$$= K(1+nr) - (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n) - Knr - K\frac{n(n-1)}{1.2}r^2$$

$$+ (A_1\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + A_2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + A_3\frac{(n-3)(n-4)}{1.2} \ldots A_{n-2}]r^2,$$

oder wenn auch hier die gleichen positiven und negativen Glieder weggelassen werden:

$$20)\quad S_1 = K - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 \ldots - A_n - K\frac{n(n-1)}{1.2}r^2$$

$$+[A_1\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + A_2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + A_3\frac{(n-3)(n-4)}{1.2} \ldots A_{n-2}\frac{2.1}{1.2}]r^2,$$

oder, wenn $r = 0{,}0p$ gesetzt wird:

$$21)\quad S_1 = K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots - A_r - K\frac{n(n-1)}{1.2}0{,}0p^2$$

$$+[A_1\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + A_2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + A_3\frac{(n-3)(n-4)}{1.2} + \ldots A_{n-2}]0{,}0p^2.$$

Da nun $K = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + A_{n+1} + \ldots A_q$ und $q > n$ ist, so ist jedenfalls

$$K\frac{n(n-1)}{1.2} = A_1\frac{n(n-1)}{1.2} + A_2\frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}A_n \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}A_q$$

grösser als die begleitende positive Reihe

$$A_1\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + A_2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + \ldots A_{n-2}\frac{2.1}{1.2},$$

selbst dann noch, wenn

$$K = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \ldots A_n$$

ist.

Die Gleichung 20) widerspricht also dem in No. 1) und No. 2) aufgestellten Satze. Sie gibt den Stand der Schuld nach n Jahren kleiner an, als er ist, und ist also unrichtig.

Man kann diess aus 9) und 21) auch so darstellen:

$$S > S_1$$

oder

$$22)\quad K.1{,}0p^n - L_1.1{,}0p^{n-1} - L_2.1{,}0p^{n-2} - L_3.1{,}0p^{n-3} \ldots - L_n$$

$$> K.1{,}0np - L_1.1{,}0(n-1)p - L_2.1{,}0(n-2)p - L_3.1{,}0(n-3)p \ldots - L_n.$$

Hiernach ist auch der zweite Theil des Lehrsatzes bewiesen.

Sind alle L einander gleich, so ist der Stand der Schuld bei einfachen Zinsen am Ende des $n$ten Jahres aus No. 19):

$$23)\quad S_1 = K.1{,}0np - nL - \frac{n(n-1)}{1.2}L.0{,}0p.$$

Sind alle A einander gleich, so ist aus 21):

$$24)\quad S_1 = K - K\frac{n(n-1)}{1.2}.0{,}0p^2 - nA + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}A.0{,}0p^2,$$

da

$$A\left(\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + \ldots \frac{3.2}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}\right)0{,}0p^2$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}A.0{,}0p^2$$

ist.

Auf ganz die gleiche Weise wird der Beweis geführt, wenn die Zahlungsleistungen und Verzinsung halbjährlich geschehen, weswegen diess bei einfachen Zinsen nicht insbesondere durchgeführt wird.

§. 7.

Zweiter Beweis.

Der zweite Beweis führt sich aus der Methode der gegenseitigen jährlichen Abrechnung, welche schon oben §. 5. als auf richtige Resultate führend benutzt wurde.

Der Gläubiger fordert am Ende des ersten Jahres Kapital sammt Zins. Seine Forderung ist

$$K.1{,}0p.$$

Der Schuldner zahlt am Ende desselben L_1. Hiernach ist der Stand der Schuld am Ende des ersten oder zu Anfange des zweiten Jahres:

$$1)\quad S_1 = K.1{,}0p - L_1.$$

Hiervon fordert der Gläubiger am Ende des zweiten Jahres Zins. Seine Forderung ist daher im Ganzen:

$$S_1.1{,}0p = (K.1{,}0p - L_1)1{,}0p.$$

Der Schuldner zahlt am Ende dieses Jahres L_2. Folglich ist der Stand der Schuld am Ende des zweiten oder zu Anfang des dritten Jahres:

$$2)\quad S_2 = (K.1{,}0p - L_1).1{,}0p - L_2 = K.1{,}0p^2 - L_1.1{,}0p - L_2.$$

Hiervon fordert der Gläubiger den Zins am Ende des dritten Jahres. Seine Forderung beträgt daher sammt Kapital:

$$S_2.1{,}0p = ((K.1{,}0p - L_1)1{,}0p - L_2)1{,}0p.$$

Der Schuldner zahlt am Ende des dritten Jahres L_3. Der Stand der Schuld ist daher am Ende des dritten oder zu Anfang des vierten Jahres:

$$3)\qquad S_3 = ((K.1{,}0p - L_1)1{,}0p - L_2)1{,}0p - L_3$$
$$= K.1{,}0p^3 - L_1.1{,}0p^2 - L_2.1{,}0p - L_3.$$

Eben so findet sich der Stand der Schuld am Ende des vierten Jahres:

$$4)\qquad S_4 = (((K.1{,}0p - L_1)1{,}0p - L_2)1{,}0p - L_3)1{,}0p - L_4$$
$$= K.1{,}0p^4 - L_1.1{,}0p^3 - L_2.1{,}0p^2 - L_3.1{,}0p - L_4.$$

u. s. w. Das hierin liegende Fortgangsgesetz ist sehr einfach und klar. Der Stand der Schuld am Ende des $n$ten Jahres ist:

$$5)$$
$$S_n = (\ldots(((K.1{,}0p - L_1)1{,}0p - L_2)1{,}0p - L_3)1{,}0p \ldots - L_{n-1})1{,}0p - L_n$$
$$= K.1{,}0p^n - L_1.1{,}0p^{n-1} - L_2.1{,}0p^{n-2} - L_3.1{,}0p^{n-3}$$
$$\ldots - L_{n-1}.1{,}0p - L_n.$$

Führt man nun die den L entsprechenden Werthe aus No. 3) §. 6. in diese Darstellung ein, so geht sie in folgende über:

$$6)\quad S_n = K.1{,}0p^n - A_1.1{,}0p^{n-1} - K.0{,}0p.1{,}0p^{n-1}$$
$$- A_2.1{,}0p^{n-2} - (K - A_1)0{,}0p.1{,}0p^{n-2}$$
$$- A_3.1{,}0p^{n-3} - (K - A_1 - A_2)0{,}0p.1{,}0p^{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- A_{n-1}.1{,}0p - (K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots A_{n-2})0{,}0p.1{,}0p$$
$$- A_n \qquad - (K - A_1 - A_2 - A_3 \ldots A_{n-1})0{,}0p.$$

Diess ist dieselbe Darstellung, welche in No. 5) §. 6. gefunden wurde, nur mit dem Unterschiede, dass dort ihre Glieder die entgegengesetzten Zeichen führen. Wendet man nun die dort befolgte Schlussreihe auf die vorstehende Darstellung an, so erhält man für den Stand der Schuld am Ende des $n$ten Jahres in Verbindung mit No. 4):

$$7)$$
$$S_n = K.1{,}0p^n - L_1.1{,}0p^{n-1} - L_2.1{,}0p^{n-2} - L_3.1{,}0p^{n-3} \ldots - L_{n-1}.1{,}0p - L_n$$
$$= K - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 \ldots - A_n = A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots A_q,$$

wie oben No. 9) §. 6.

Sind alle L einander gleich, so ist der Stand:

$$8)\qquad S_n = K.1{,}0p^n - L.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}.$$

Sind die Kapitalabtragungen gleich, so entsteht, wie sich von selbst ergibt:

$$9)\qquad S'_n = K - nA.$$

Bei den in No. 9) und No. 15) §. 6. oder No. 7) dieses Paragraphen aufgestellten Formeln wurde vorausgesetzt, dass jede der Summen L_1, L_2, L_3,.... grösser als die Zinsen des Schuldrestes sind. Diese Voraussetzung ist nicht wesentlich. Sie können eben so gross oder selbst kleiner sein. Es ändert diess die Richtigkeit der Schlüsse nicht, wie klar aus dem zweiten Beweise hervorgeht.

Kommen die Summen L_1, L_2, L_3,.... gerade den jeweiligen Zinsen gleich, so wird vom Kapitale nichts abgetragen und die Schuld bleibt unverändert. Sind sie kleiner, so kömmt das Weniger dem Gläubiger zu gut und die Schuld vergrössert sich anstatt abzunehmen.

§. 8.

Auch hier wollen wir die bezüglichen Sätze durch einen besondern Fall erörtern, was die Richtigkeit der gemachten Schlüsse bestätigen wird.

Ein Schuldner erhält von seinem Gläubiger 20000, und macht am Ende der zehn folgenden Jahre die Gegenzahlungen 3000, 2900, 2800, 2700, 2600, 2500, 2400, 2300, 2200, 2100. Wie gross ist am Ende des zehnten Jahres der Stand der Schuld bei 5 Procent Zinsen?

Auch hier ist das vorgelegte Beispiel absichtlich so gewählt, dass man leicht erkennt, dass die genannten zehn Summen nichts anderes sind, als die Heimzahlung eines Kapitals von 20000 mit jährlicher Kapitalabtragung von 2000 und den fünfprocentigen Zinsen des Schuldrestes, und dass also am Ende des zehnten Jahres das Kapital von 20000 getilgt, der Stand der Schuld gleich 0 ist und dass dieser Werth bei einer richtigen Rechnung sich ergeben muss.

Wendet man nun die Rechnung mit Zinseszinsen an, so ergibt sich der Stand der Schuld nach No. 9) §. 6., wenn man die entsprechenden Werthe einführt:

$$S = 20000.1,05^{10} - 3000.1,05^{9} - 2900.1,05^{8} - 2800.1,05^{7} \ldots$$
$$\ldots - 2300.1,05^{2} - 2200.1,05 - 2100$$
$$= 20000.1,6288946 - 3000.1,5513282 - 2900.1,4774554$$
$$- 2800.1,4071004 - 2700.1,3400956 - 2600.1,2762816$$
$$- 2500.1,21550625 - 2400.1,157625 - 2300.1,1025$$
$$- 2200.1,05 - 2100$$
$$= +32577,8925 - 4653,984648$$

4284,620487
3939,881184
3618,258230
3318,332063
3038,765625
2778,300000
2535,750000
2310,000000
2100,000000
32577,892537

Hiernach ist der Stand der Schuld:

1) $S = 32577,8925 \ldots - 32577,8925 \ldots = 0;$

die gegenseitigen Zahlungen heben sich auf, d. h. das dargeliehene Kapital ist getilgt.

Nach der Methode der jährlichen Abrechnung, §. 7., findet sich Folgendes:

Der Gläubiger gibt gegenwärtig	20000
Hiezu Zins des ersten Jahrs zu 5 Procent	1000
	21000
Der Schuldner zahlt am Ende des ersten Jahres	3000
Stand der Schuld am Ende des ersten Jahres	18000
Hiezu Zins des zweiten Jahres	900
	18900
Hievon die Zahlung des Schuldners ab	2900
Stand der Schuld am Ende des zweiten Jahres	16000
Hiezu Zins des dritten Jahres	800
	16800
Hievon Zahlung des Schuldners ab	2800
Stand der Schuld am Ende des dritten Jahres	14000
Hiezu Zins des vierten Jahres	700
	14700
Hievon Zahlung des Schuldners ab	2700
	12000

Stand der Schuld am Ende des vierten Jahres	12000
Hiezu Zins des fünften Jahres	600
	12600
Hievon Zahlung des Schuldners ab	2600
Stand der Schuld am Ende des fünften Jahres	10000
Hiezu Zins des sechsten Jahres	500
	10500
Hievon Zahlung des Schuldners ab	2500
Stand der Schuld am Ende des sechsten Jahres	8000
Hiezu Zins des siebenten Jahres	400
	8400
Hievon Zahlung des Schulners ab	2400
Stand der Schuld am Ende des siebenten Jahres	6000
Hiezu Zins des achten Jahres	300
	6300
Hievon Zahlung des Schuldners ab	2300
Stand der Schuld am Ende des achten Jahres	4000
Hiezu Zins des neunten Jahres	200
	4200
Hievon Zahlung des Schuldners ab	2200
Stand der Schuld am Ende des neunten Jahres	2000
Hiezu Zins des zehnten Jahres	100
	2100
Hievon Zahlung des Schuldners ab	2100
Stand der Schuld am Ende des zehnten Jahres	0000

Wendet man nun die Rechnung mit einfachen Zinsen an, so ist aus No. 19), §. 6., wenn die entsprechenden Werthe für die L, n und p eingeführt werden:

$$
\begin{aligned}
S_1 = {} & 20000.1{,}5 - 3000.1{,}45 - 2900.1{,}4 - 2800.1{,}35 - 2700.1{,}3 \\
& - 2600.1{,}25 - 2500.1{,}2 - 2400.1{,}15 - 2300.1{,}1 \\
& - 2200.1{,}05 - 2100 \\
= {} & 30000 - \begin{array}{r} 4350 \\ 4060 \\ 3780 \\ 3510 \\ 3250 \\ 3000 \\ 2760 \\ 2530 \\ 2310 \\ 2100 \\ \hline 31650. \end{array}
\end{aligned}
$$

Demnach wäre der Stand der Schuld:

2) $$S_1 = 30000 - 31650 = -1650,$$

d. h. der Schuldner hat nach der Rechnung mit einfachen Zinsen 1650 zu viel gezahlt, folglich ein Guthaben an den Gläubiger oder der Gläubiger muss 1650 an den Schuldner herauszahlen.

Man erkennt hieraus, dass zwei unter sich verschiedene Methoden zu einem und demselben Resultate führen, also unter sich übereinstimmen. Die Rechnung mit einfachen Zinsen gibt dagegen ein abweichendes Resultat, welches offenbar unrichtig und ungereimt ist. Die vorstehenden Resultate bestätigen daher die Richtigkeit des in §. 6. angegebenen Lehrsatzes.

§. 9.

Stellt man die bisher durch Beweise begründeten Resultate zusammen, so erhält man folgende vier Grundgleichungen. Nach No. 9) und No. 19) §. 3. ist:

1) $$R = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \dots \frac{L_n}{1{,}0p^n},$$

2) $$R = \frac{L_1}{1{,}0p_1} + \frac{L_2}{1{,}0p_1^{\,2}} + \frac{L_3}{1{,}0p_1^{\,3}} + \dots \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1^{\,2n}}.$$

Nach No. 6) und No. 14) §. 6. ist:

3) $$S = L_1 . 1{,}0p^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^{n-2} + \dots L_{n-1} . 1{,}0p + L_n,$$

4) $$S = L_1 . 1{,}0p_1^{\,2n-1} + L_2 . 1{,}0p_1^{\,2n-2} + \dots L_{2n} . 1{,}0p_1 + L_{2n}.$$

Die zwei ersten Gleichungen zeigen, wie der Werth künftig fälliger Summen auf richtige Weise durch die Zinszinsrechnung auf die Gegenwart zurückgebracht wird; die zwei letzten, wie der Werth künftig fälliger Summen auf den Zeitpunkt der letzten Zahlung durch Zinszinsrechnung auf richtige Weise übertragen wird. R und S sind in beiden Fällen unbekannt und ergeben sich aus den Zahlungen L, dem Zinsfuss p und der Zeit n. No. 1) und No. 3) gelten für ganzjährige Zahlung und Verzinsung, No. 2) und No. 4) für halbjährige. Zahlungen, die sich auf kleinere Jahrestheile als Halbjahre erstrecken, kommen in der Wirklichkeit nicht wohl vor. Deswegen ist hierauf keine Rücksicht genommen. Sollte es dennoch geschehen, so können die vorstehenden Gleichungen ohne alle Schwierigkeit auf sie angewendet werden.

Hält man nun diese Gleichungen fest und bringt man eine

Reihe solcher Zahlungen zuerst auf einen Zeitpunkt (Gegenwart oder Zukunft) zurück und führt den so erhaltenen Werth auf den andern (Zukunft oder Gegenwart) über, so wird auch der aus dieser Uebertragung hervorgehende Werth ein richtiger sein, denn jede der mit den Zahlungen vorgenommenen Reductionen erzeugt für sich einen richtigen Werth. Eine jede derartige Uebertragung wird daher einen Werth geben, der mit dem ursprünglichen, durch directe Entwicklung gewonnenen übereinstimmt.

Hieraus rechtfertigt sich folgender

Dritter Lehrsatz.

a. **Soll der gegenwärtige Werth einer Reihe künftiger Zahlungen $L_1, L_2, L_3, \ldots. L_n$ ermittelt werden, so kann man dieselben zuerst auf einen künftigen Zeitpunkt zurückbringen und dann den hierdurch erhaltenen Werth auf die Gegenwart reduciren.**

b. **Soll der künftige Werth einer Reihe von Zahlungen $L_1, L_2, \ldots. L_n$ ermittelt werden, so kann man dieselben zuerst auf die Gegenwart zurückbringen und dann den hierdurch erhaltenen Werth auf die Zukunft übertragen.**

In beiden Fällen wird ein richtiger, mit dem direct in den No. 1)—4) gefundenen übereinstimmender Werth entstehen, wenn mit Zinseszinsen gerechnet wird; dagegen ein unrichtiger, wenn mit einfachen Zinsen gerechnet wird.

Der Beweis hiefür führt sich leicht. Man bringe den Werth aller Zahlungen nach a zuerst auf das Ende des $n$ten Jahres zurück. Die erste Zahlung trägt in diesem Falle während $(n-1)$, die zweite während $(n-2)$, die dritte während $(n-3)$ Jahren Zins u. s. w., die letzte keine. Der hieraus folgende Werth ist:

$$S = L_1 . 1{,}0p^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^{n-2} + L_3 . 1{,}0p^{n-3} + \ldots. L_{n-1} . 1{,}0p + L_n.$$

Nun rabattire man diesen Werth für n Jahre. Es entsteht:

$$\frac{S}{1{,}0p^n} = \frac{1}{1{,}0p^n} [L_1 . 1{,}0p^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^2 + \ldots. L_{n-1} . 1{,}0p + L_n)$$

oder, wenn wirklich multiplicirt wird,

$$5) \qquad \frac{S}{1{,}0p^n} = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \ldots. \frac{L_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}} + \frac{L_n}{1{,}0p^n}.$$

Dieses Resultat fällt mit No. 1) zusammen.

Wendet man dieselben Schlüsse auf halbjährige Zahlungen und Verzinsung an, so erhält man nach No. 4) für den künftigen Werth dieser Zahlungen:

$$S = L_1 . 1{,}0p_1^{2n-1} + L_2 . 1{,}0p_1^{2n-2} + \ldots L_{2n-1} . 1{,}0p_1 + L_{2n}.$$

Wird dieser Werth auf $2n$ Halbjahre rabattirt, so entsteht:

6)

$$\frac{S}{1{,}0p_1^{2n}} = \frac{1}{1{,}0p_1^{2n}} [L_1 . 1{,}0p_1^{2n-1} + L_2 . 1{,}0p_1^{2n-2} + \ldots L_{2n-1} . 1{,}0p_1 + L_{2n}]$$

$$= \frac{L_1}{1{,}0p_1} + \frac{L_2}{1{,}0p_1^2} + \frac{L_3}{1{,}0p_1^3} + \ldots \frac{L_{2n-1}}{1{,}0p_1^{2n-1}} + \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1^{2n}}.$$

Dieser Werth fällt mit No. 2) zusammen und hiedurch ist der Satz in a. bewiesen.

Soll nach b. der Werth sämmtlicher Zahlungen für den Zeitpunkt der letzten Zahlung bestimmt werden, so ermittle man zuerst ihren gegenwärtigen Werth. Er ist nach No. 1):

$$R = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p^n}.$$

Nun führe man diesen auf das Ende des $n$ten Jahres durch Vervielfachen mit $1{,}0p^n$ über. Es entsteht dann:

$$7) \qquad R . 1{,}0p^n = 1{,}0p^n \left(\frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p^n} \right)$$

$$= L_1 . 1{,}0p_1^{n-1} + L_2 . 1{,}0p^{n-2} + L_3 . 1{,}0p^{n-3} + \ldots L_n.$$

Dieser Werth stimmt mit No. 3) überein.

Werden die Zahlungen halbjährlich gemacht, so verfahre man auf die gleiche Weise. Ihr gegenwärtiger Werth ist dann

$$R = \frac{L_1}{1{,}0p_1} + \frac{L_2}{1{,}0p_1^2} + \frac{L_3}{1{,}0p_1^3} + \ldots \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1^{2n}}.$$

Führt man nun diesen Werth auf den Zeitpunkt der letzten Zahlung bei halbjähriger Verzinsung zurück, so entsteht durch Multiplikation mit $1{,}0p_1^{2n}$:

$$8) \quad R . 1{,}0p_1^{2n} = 1{,}0p_1^{2n} \left(\frac{L_1}{1{,}0p_1} + \frac{L_2}{1{,}0p_1^2} + \frac{L_3}{1{,}0p_1^3} + \ldots \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1^{2n}} \right)$$

$$= L_1 . 1{,}0p_1^{2n-1} + L_2 . 1{,}0p_1^{2n-2} + L_3 . 1{,}0p_1^{2n-3} + \ldots L_{2n}.$$

Dieser Werth stimmt mit No. 4) überein, folglich ist auch der zweite Theil des Lehrsatzes erwiesen.

Der dritte Theil desselben ergibt sich aus den Sätzen §. 3. No. 13) und No. 14) und §. 6. No. 21) und No. 22). Da nämlich die Rechnung mit einfachen Zinsen in den fraglichen Fällen auf ein unrichtiges Resultat bei jedem einzelnen Acte führt, so kann die Verbindung zweier unrichtiger Resultate nicht wohl auf ein richtiges führen.

Man kann diess aber direct auf folgende Weise zeigen. Man bringe, um den gegenwärtigen Werth der Zahlungen zu erhalten, zuerst alle auf den Zeitpunkt der letzten zurück. Man erhält, wenn $0{,}0p = r$ nach dem Vorgange von §. 6. geschrieben wird, hiefür:

9)

$$S_1 = L_1(1+(n-1)r) + L_2(1+(n-2)r) + L_3(1+n-3)r) \ldots L_{n-1}(1+r) + L_n.$$

Rabattirt man diesen Werth mit einfachen Zinsen durch Division mit $1+nr$, so entsteht:

10)

$$\frac{S_1}{1+nr} = \frac{L_1(1+(n-1)r)}{1+nr} + \frac{L_2(1+(n-2)r)}{1+nr} + \frac{L_3(1+(n-3)r)}{1+nr} + \ldots \frac{L_n}{1+nr}.$$

Der Werth dieser Formel kann, wie man leicht sieht, nicht mit No. 1) oder No. 5) zusammen fallen.

Die Glieder in No. 10) haben folgende allgemeine Form:

$$M \cdot \frac{1+xr}{1+nr};$$

die correspondirenden Glieder in No. 5) haben folgende:

$$M \cdot \frac{(1+r)^x}{(1+r)^n} = M \cdot \frac{1}{(1+r)^{n-x}}$$

für $n > x$ und ganze n und x. Es ist aber:

$$\frac{1+xr}{1+nr} = \frac{1+xr}{1+xr+(n-x)r} = \frac{1}{1+\frac{n-x}{1+xr}r}.$$

Da nun oben in §. 3. nachgewiesen wurde, dass

$$\frac{1}{1+(n-x)r} > \frac{1}{(1+r)^{n-x}}$$

ist, so muss um so mehr

$$\frac{1}{1+\frac{n-x}{1+xr}r} > \frac{1}{(1+r)^{n-x}}$$

sein, da für ganze n und x auch $\frac{n-x}{1+xr} < n-x$ ist.

Es gilt daher für je zwei correspondirende Glieder in den No. 10) und 5) oder 1):

$$M.\frac{1+xr}{1+nr} > \frac{M}{(1+r)^{n-x}}.$$

Hieraus folgt in Bezug auf No. 10) und 5) oder 1):

$$11)\quad L_1\frac{(1+(n-1)r)}{1+nr}+L_2\frac{(1+(n-2)r)}{1+nr}+\ldots L_{n-1}\frac{1+r}{1+nr}+\frac{L_n}{1+nr}$$

$$> \frac{L_1}{1+r}+\frac{L_2}{(1+r)^2}+\frac{L_3}{(1+r)^3}+\ldots\frac{L_{n-1}}{(1+r)^{n-1}}+\frac{L_n}{(1+r)^n}.$$

Um den künftigen Werth sämmtlicher Zahlungen bei einfachen Zinsen zu ermitteln, bringe man vorerst sämmtliche Zahlungen auf die Gegenwart zurück. Man erhält:

$$12)\qquad R_1=\frac{L_1}{1+r}+\frac{L_2}{1+2r}+\frac{L_3}{1+3r}+\ldots\frac{L_n}{1+nr}.$$

Führt man diesen Werth durch Multiplikation mit $(1+nr)$ auf den Zeitpunkt der letzten Zahlung zurück, so entsteht:

$$13)\qquad R_1(1+nr)$$

$$=\frac{L_1(1+nr)}{1+r}+\frac{L_2(1+nr)}{1+2r}+\frac{L_3(1+nr)}{1+3r}+\ldots\frac{L_{n-1}(1+nr)}{1+(n-1)r}+\frac{L_n(1+nr)}{1+nr}.$$

Die Glieder dieser Reihe haben mit Ausnahme des letzten folgende allgemeine Form:

$$L_x\frac{1+nr}{1+xr}.$$

Die in No. 7):

$$L_x\frac{(1+r)^n}{(1+r)^x}=L_x(1+r)^{n-x}$$

für ganze n und x und $n > x$. Nun ist:

$$\frac{1+nr}{1+xr}=\frac{1+xr+(n-x)r}{1+xr}=1+\frac{n-x}{1+xr}r.$$

Da nun nach §. 3.

$$1 + (n - x)r < (1 + r)^{n-x}$$

st, so ist um so mehr

$$1 + \frac{n - x}{1 + xr} < (1 + r)^{n-x}.$$

Es ist daher aus No. 7) und 13):

$$14) \quad \frac{L_1(1+nr)}{1+r} + \frac{L_2(1+nr)}{1+2r} + \frac{L_3(1+nr)}{1+3r} + \dots \frac{L_{n-1}(1+nr)}{1+(n-1)r} + L_n$$

$$< L_1(1+r)^{n-1} + L_2(1+r)^{n-2} + L_3(1+r)^{n-3} \dots L_{n-1}(1+r) + L_n.$$

Die Rechnung mit einfachen Zinsen führt daher nach Aussage der Gleichung 11) in dem fraglichen Falle auf ein grösseres, nach Aussage der Gleichung 14) auf ein kleineres Resultat als das richtige. Das Gleiche würde sich ergeben, wenn die Zahlungen halbjährlich gemacht werden.

Ferner erkennt man, dass die aus den No. 9) und 13), 10) und 12) folgenden Werthe, obgleich sie die Auflösungen eines und desselben Problems sind, nicht unter sich übereinstimmen können, wie sie sollten. Sie leiden daher an einem innern Widerspruch.

Hiernach ist auch der dritte Theil des obigen Lehrsatzes bewiesen.

Einfacher werden diese Formeln, wenn alle Zahlungen (L) einander gleich sind. Dann entsteht aus No. 1) und No. 2):

$$15) \quad R = \frac{L}{1{,}0p} + \frac{L}{1{,}0p^2} + \frac{L}{1{,}0p^3} + \dots \frac{L_n}{1{,}0p^n} = L\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p},$$

$$16) \quad R = \frac{L}{1{,}0p_1} + \frac{L}{1{,}0p_1{}^2} + \frac{L}{1{,}0p_1{}^3} + \dots \frac{L}{1{,}0p_1{}^{2n}} = L\frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p_1}.$$

Vergl. §. 27. meiner Anleitung. Aus No. 5) und No. 6) wird:

$$17) \quad \frac{S}{1{,}0p^n} = \frac{1}{1{,}0p^n}(L.1{,}0p^{n-1} + L.1{,}0p^{n-2} + \dots L.1{,}0p + L)$$

$$= \frac{L}{1{,}0p^n} \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} = L\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p},$$

$$18) \quad \frac{S}{1{,}0p_1{}^{2n}} = \frac{1}{1{,}0p_1{}^{2n}}(L.1{,}0p_1{}^{2n-1} + L.1{,}0p_1{}^{2n-2} + \dots L.1{,}0p_1 + L)$$

$$= \frac{L}{1{,}0p_1{}^{2n}} \cdot \frac{1{,}0p_1{}^{2n} - 1}{0{,}0p_1} = L\frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p_1}.$$

Diese Darstellungen beantworten auf verschiedenem Wege dasselbe Problem und stimmen unter sich überein.

Aus No. 3) und No. 4) wird:

19)

$$S = L.1{,}0p^{n-1} + L.1{,}0p^{n-2} + \ldots . L.1{,}0p + L = L.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p},$$

20)

$$S = L.1{,}0p_1^{2n-1} + L.1{,}0p_1^{2n-2} + \ldots . L.1{,}0p_1 + L = L.\frac{1{,}0p_1^{2n} - 1}{0{,}0p}.$$

Aus No. 7) und No. 8) wird:

21)

$$R.1{,}0p^n = 1{,}0p^n\left(\frac{L}{1{,}0p} + \frac{L}{1{,}0p^2} + \ldots . \frac{L}{1{,}0p^n}\right) = L.1{,}0p^n\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

$$= L.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p},$$

22)

$$R.1{,}0p_1^{2n} = 1{,}0p_1^{2n}\left(\frac{L}{1{,}0p_1} + \frac{L}{1{,}0p_1^2} + \ldots \frac{L}{1{,}0p_1^{2n}}\right) = L.1{,}0p_1^{2n}\frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{0{,}0p_1}$$

$$= L.\frac{1{,}0p_1^{2n} - 1}{0{,}0p_1}.$$

Auch diese Gleichungen lösen das gleiche Problem auf verschiedenem Wege und stimmen, wie diess sein muss, überein. Vergl. §. 22. meiner Anleitung.

Aus den No. 1) und 5), 2) und 6) folgt:

23) $$R = \frac{S}{1{,}0p^n} \text{ und } R = \frac{S}{1{,}0p_1^{2n}}.$$

Aus den No. 3) und 7), 4) und 8) folgt:

24) $$S = R.1{,}0p^n \text{ und } S = R.1{,}0p_1^{2n}.$$

Man erkennt hieraus, dass, wenn man die Gesammtzahlungen als Summen betrachtet, bei ihrer Uebertragung von einem Zeitpunkt auf den andern mit Zinseszinsen gerechnet werden muss, wenn man richtige Werthe erhalten will.

Die hier angegebenen Sätze leisten bei Anwendungen gute Dienste und erleichtern den Calcul bei zusammengesetzten Fragen wesentlich.

§. 10.

Hieran schliesst sich folgender

Vierter Lehrsatz.

Sind in einem Zeitraume von n Jahren am Ende eines jeden Jahres die Summen $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$ fällig und soll ihr Werth auf irgend einen beliebigen Zeitpunkt (x) zurückgebracht werden, der zwischen dem Anfange und Ende des Zeitraums liegt, so kann diess direct nach den bis jetzt gelehrten und bewiesenen Grundsätzen geschehen, oder auch dadurch, dass man den Werth sämmtlicher Zahlungen auf den Anfang oder das Ende des Zeitraums und den sich hieraus ergebenden Werth auf den fraglichen Zeitpunkt zurückbringt.

Es entsteht ein richtiges Resultat, wenn die Rechnung mit Zinseszinsen, ein unrichtiges, wenn sie mit einfachen Zinsen ausgeführt wird.

Die ersten x Zahlungen sind nach der Aufgabe auf das Ende des $x$ten Jahres zurückzubringen. Nach §. 6. No. 8) ist für diesen Werth:

$$S_1 = L_1 . 1{,}0p^{x-1} + L_2 . 10p^{x-2} + \ldots L_{x-1} . 1{,}0p + L_x.$$

Dagegen muss der Werth der folgenden $(n-x)$ Zahlungen auf denselben Zeitpunkt zurückgebracht werden. Nach §. 3. No. 9) ist:

$$R_1 = \frac{L_{x+1}}{1{,}0p} + \frac{L_{x+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p^{n-x}}.$$

Durch Vereinigung beider Werthe erhält man den gesuchten, und es ist:

1)

$$S = L_1 . 1{,}0p^{x-1} + L_2 . 1{,}0p^{x-2} + \ldots L_x + \frac{L_{x+1}}{1{,}0p} + \frac{L_{x+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p^{n-x}}.$$

Hiedurch ist der Werth sämmtlicher Zahlungen auf den Zeitpunkt x in directer Weise bestimmt und zugleich der Beweis für die Richtigkeit der Gleichung No. 1) gegeben.

Führt man den Werth sämmtlicher Zahlungen zuerst auf den Anfang des Zeitraums zurück, so hat man nach §. 3., No. 9):

$$R = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \dots \frac{L_x}{1{,}0p^x} + \dots \frac{L_{n-1}}{1{,}0p^{n-1}} + \frac{L_n}{1{,}0p^n}.$$

Wird dieser Werth auf das Ende des $x$ten Jahres zurückgeführt, so hat man durch Multiplikation mit $1{,}0p^x$:

$$R.1{,}0p^x = \frac{L_1.1{,}0p^x}{1{,}0p} + \frac{L_2.1{,}0p^x}{1{,}0p^2} + \dots \frac{L_x.1{,}0p^x}{1{,}0p^x} + \dots \frac{L_n.1{,}0p^x}{1{,}0p^n}$$

oder

2)

$$R.1{,}0p^x = L_1.1{,}0p^{x-1} + L_2.1{,}0p^{x-2} + \dots L_x + \frac{L_{x+1}}{1{,}0p} + \frac{L_{x+2}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{L_n}{1{,}0p^{n-x}}.$$

Dieser Werth fällt mit No. 1) zusammen.

Führt man aber den Werth sämmtlicher Zahlungen zuerst auf das Ende des Zeitraums zurück, so ist nach §. 6. No. 8):

$$S_1 = L_1.1{,}0p^{n-1} + L_2.1{,}0p^{n-2} + \dots L_x.1{,}0p^{n-x} + L_{x+1}.1{,}0p^{n-x-1} + \dots L_n.$$

Wird dieser Werth auf das Ende des $x$ten Jahres zurückgebracht, so muss er auf $(n-x)$ Jahre rabattirt oder mit $\frac{1}{1{,}0p^{n-x}}$ multiplicirt werden. Dadurch entsteht:

$$\frac{S_1}{1{,}0p^{n-x}} = \frac{L_1.1{,}0p^{n-1}}{1{,}0p^{n-x}} + \frac{L_2.1{,}0p^{n-2}}{1{,}0p^{n-x}} + \dots \frac{L_x.1{,}0p^{n-x}}{1{,}0p^{n-x}}$$
$$+ \frac{L_{x+1}.1{,}0p^{n-x-1}}{1{,}0p^{n-x}} + \dots \frac{L_n}{1{,}0p^{n-x}}$$

oder

3)

$$\frac{S_1}{1{,}0p^{n-x}} = L_1.1{,}0p^{x-1} + L_2.1{,}0p^{x-2} + \dots L_x + \frac{L_{x+1}}{1{,}0p} + \dots \frac{L_n}{1{,}0p^{n-x}}.$$

Diese Gleichung fällt mit No. 1) und No. 2) zusammen.

Werden die Zahlungen halbjährlich gemacht, so ändert diess in der bezeichneten Schlussreihe nichts. Man erhält für die directe Bestimmung des fraglichen Werthes:

4)

$$S = L_1.1{,}0p_1^{2x-1} + L_2.1{,}0p_1^{2x-2} + \dots L_{2x} + \frac{L_{2x+1}}{1{,}0p_1} + \frac{L_{2x+2}}{1{,}0p_1^2} + \dots \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1^{2n-2x}}.$$

Für die beiden Uebertragungen entsteht:

$$R.1{,}0p_1{}^{2n} = \frac{L_1 . 1{,}0p_1{}^{2x}}{1{,}0p_1} + \frac{L_2 . 1{,}0p_1{}^{2x}}{1{,}0p_1{}^2} + \dots \frac{L_{2x} . 1{,}0p_1{}^{2x}}{1{,}0p_1{}^{2x}} + \frac{L_{2x+1} . 1{,}0p_1{}^{2x}}{1{,}0p_1{}^{2x+1}} \dots \frac{L_{2n} . 1{,}0p_1{}^{2x}}{1{,}0p_1{}^{2n}}$$

oder

5)

$$R.1{,}0p_1{}^{2x} = L_1 . 1{,}0p_1{}^{2x-1} + L_2 . 1{,}0p_1{}^{2x-2} + \dots L_{2x} + \frac{L_{2x+1}}{1{,}0p_1} \dots \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1{}^{2n-2x}}.$$

Ferner:

$$\frac{S_1}{1{,}0p_1{}^{2n-2x}} = \frac{L_1 . 1{,}0p_1{}^{2x-1}}{1{,}0p_1{}^{2n-2x}} + \frac{L_2 . 1{,}0p_1{}^{2n-x}}{1{,}0p_1{}^{2n-2x}} + \frac{L_{2x} . 1{,}0p_1{}^{2n-2x}}{1{,}0p_1{}^{2n-2x}} + \dots \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1{}^{2n-2x}}$$

oder

6)

$$\frac{S_1}{1{,}0p_1{}^{2n-2x}} = L_1 . 1{,}0p_1{}^{2x-1} + L_2 . 1{,}0p_1{}^{2x-2} \dots L_{2x} + \frac{L_{2x+1}}{1{,}0p_1} + \dots \frac{L_{2n}}{1{,}0p_1{}^{2n-2x}}.$$

Diese Gleichungen fallen mit No. 4) zusammen. Hiemit ist der erste Theil des Lehrsatzes bewiesen.

Wendet man die Rechnung mit einfachen Zinsen zur Werthbestimmung der Zahlungen in gleicher Weise wie bisher an, so ermittelt sich dieselbe direct für den zwischenliegenden Zeitpunkt x, wenn man der Kürze wegen $0{,}0p = r$ schreibt, auf folgende Weise:

7)

$$S_1 = L_1(1+(x-1)r) + L_2(1+(x-2)r) \dots L_x + \frac{L_{x+1}}{1+r} + \frac{L_{x+2}}{1+2x} + \dots \frac{L_n}{1+(n-x)r}.$$

Bringt man den Werth sämmtlicher Zahlungen zuerst auf den Anfang des Zeitraums zurück, so ist:

$$R_1 = \frac{L_1}{1+r} + \frac{L_2}{1+2r} + \dots \frac{L_x}{1+xr} + \frac{L_{x+1}}{1+(x+1)r} \dots \frac{L_n}{1+nr}.$$

Wird dieser Werth auf das Ende des $x$ten Jahrs bei einfachen Zinsen durch Multiplikation mit $(1+xr)$ zurück gebracht, so ergibt sich:

8)

$$R_1(1+xr) = \frac{L_1(1+xr)}{1+r} + \frac{L_2(1+xr)}{1+2r} \dots L_x + \frac{L_{x+1}(1+xr)}{1+(x+1)r} + \dots \frac{L_n(1+xr)}{1+nr}.$$

Führt man aber den Werth sämmtlicher Zahlungen zuerst auf das Ende des Zeitraums zurück, so wird:

$$S_1 = L_1(1+(n-1)r) + L_2(1+(n-2)r) + \ldots . L_x(1+(n-x)r)$$
$$\ldots . L_{n-1}(1+r) + L_n.$$

Wird dieser Werth auf das Ende des $x$ten Jahres zurückgebracht, also auf $(n-x)$ Jahre, vom Ende an gerechnet, rabattirt, oder mit $(1+(n-x)r)$ dividirt, so entsteht:

9)
$$\frac{S_1}{1+(n-x)r} = \frac{L_1(1+(n-1)r)}{1+(n-x)r} + \frac{L_2(1+(n-2)r)}{1+(n-x)r} + \ldots . L_x \ldots . \frac{L_{n-1}(1+r)}{1+(n-x)r}$$
$$+ \frac{L_n}{1+(n-x)r}.$$

Vergleicht man die in No. 7)—9) erhaltenen Werthe mit denen No. 1)—3) und unter sich, so stimmen sie weder mit den ebengenannten, noch unter sich überein, führen also weder zu dem richtigen, noch zu einem unter sich gleichen Resultate. Die gleiche Bemerkung gilt, wenn die Zahlungen halbjährlich gemacht werden.

Hiemit ist der zweite Theil des obigen Lehrsatzes erwiesen.

Aus den zwei letzten Lehrsätzen erkennt man, dass die Werthe einer Reihe von Kapitalzahlungen, unbeschadet der Richtigkeit der hieraus folgenden Resultate, ganz beliebig von einem Zeitpunkt auf den andern übergetragen oder in der Zeit hin- und zurückgeschoben werden können, wenn man mit Zinseszinsen rechnet, während die Rechnung mit einfachen Zinsen bei diesen Umsetzungen unrichtige und bedeutend differirende Werthe gibt.

Diese Freiheit der Uebertragung wird in bestimmten Fällen gute Dienste leisten. Zugleich gibt sie ein Mittel an die Hand, die Richtigkeit der erhaltenen Resultate zu prüfen.

Einfacher werden diese Gleichungen, wenn sämmtliche Zahlungen (L) einander gleich sind. No. 1) geht dann über in:

10)
$$S = L(1{,}0p^{x-1} + 1{,}0p^{x-1} + \ldots . 1{,}0p + 1 + \frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \ldots . \frac{1}{1{,}0p^{n-x}})$$
$$= L.\frac{1{,}0p^x - 1}{0{,}0p} + L.\frac{1 - 1{,}0p^{-(n-x)}}{0{,}0p},$$

oder wenn man sämmtliche Glieder als einer Reihe zugehörend betrachtet:

11) $$S = L.\frac{1{,}0p^x - 1{,}0p^{-(n-x)}}{0{,}0p},$$

was sich auch durch Addition in No. 10) ergibt. Es wird übrigens zweckmässig sein, bei Anwendung auf besondere Fälle die Darstellung 10) zu benützen, weil der Werth der dort gegebenen Ausdrücke den Tafeln entnommen werden kann, während der Werth in No. 11) aus diesen erst durch Rechnung abgeleitet werden muss.

Wird der Werth sämmtlicher Zahlungen zuerst auf die Gegenwart und dann auf das Ende des $x$ten Jahres zurückgebracht, so ist aus No. 2):

12) $$S = R.1{,}0p^x = 1{,}0p^x\left[\frac{L}{1{,}0p}+\frac{L}{1{,}0p^2}+\frac{L}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{L_n}{1{,}0p^n}\right]$$
$$= L.1{,}0p^x\,\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} = L\frac{1{,}0p^x - 1{,}0p^{-(n-x)}}{0{,}0p}.$$

Dieser Werth fällt mit No. 11) und No. 10) zusammen.

Wird aber der Werth zuerst auf den Endpunkt des Zeitraums zurück geführt und dann rabattirt, so entsteht aus No. 3):

13) $$S = \frac{S_1}{1{,}0p^{n-x}} = \frac{L}{1{,}0p^{n-x}}(1{,}0p^{n-1}+1{,}0p^{n-2}+\ldots 1{,}0p+1)$$
$$= L.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p.1{,}0p^{n-x}} = L.\frac{1{,}0p^x - 1{,}0p^{-(n-x)}}{0{,}0p},$$

was gleichfalls mit No. 10), 11) und 12) zusammenfällt.

Die Ausdrücke No. 4)—6) gehen unter der dortigen Voraussetzung in folgende über:

14)
$$S = L.\frac{1{,}0p_1^{2x}-1}{0{,}0p_1}+L.\frac{1-1{,}0p_1^{-(2n-2x)}}{0{,}0p_1} = L.\frac{1{,}0p_1^{2x}-1{,}0p_1^{-(2n-2x)}}{0{,}0p},$$

15) $$S = L.1{,}0p_1^{2x}.\frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{0{,}0p_1},$$

16) $$S = L.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{0{,}0p_1.1{,}0p_1^{2n-2x}},$$

die sämmtlich den gleichen Inhalt haben.

Nicht so einfach lassen sich die Gleichungen No. 7)—9) geben. Die x ersten Glieder in No. 7) lassen sich summiren und man erhält dann:

17)

$$S_1 = L(1 + \frac{(x-1)r}{2})x + L\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + \frac{1}{1+3r} + \dots \frac{1}{1+(n-x)r}\right).$$

Die Reihe in No. 9) gehet über in:

18)

$$S_1 = \frac{1}{1+(n-x)r}[L(1+(n-1)r) + L(1+(n-2)r) + \dots L(1+r) + L]$$

$$= \frac{L.n}{1+(n-x)r}(1 + \frac{(n-1)r}{2}).$$

Die Reihe in No. 8):

$$19)\quad S_1 = L(1+xr)\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + \frac{1}{1+3r} + \dots - \frac{1}{1+nr}\right)$$

kann nach §. 13. meiner Anleitung nöthigenfalls summirt werden. Allenthalben ist $r = 0{,}0p$ zu setzen.

§. 11.

Auch die in §. 9. und §. 10. aufgestellten Sätze sollen an einem besondern Falle verdeutlicht werden. Wir wählen hiezu die in §. 8. behandelte Aufgabe, deren Inhalt bekannt ist und die deswegen zugleich zur Prüfung der Richtigkeit des Calculs, worauf der Inhalt von §. 9. und §. 10. ruht, dient.

Die Summen 3000, 2900, 2800, 2700, 2600, 2500, 2400, 2300, 2200, 2100 sind am Ende der zehn folgenden Jahre fällig. Es fragt sich:

Wie gross ist ihr gegenwärtiger Werth?

Wie gross ist ihr Werth am Ende des zehnten Jahres

a. bei Zinseszinsen,

b. bei einfachen Zinsen,

wenn 5 Procent Zinse gerechnet werden?

Zu a. Rechnung mit Zinseszinsen für den gegenwärtigen Werth.

Erste Auflösung. Nach No. 1) §. 9. ist, wenn die Tafeln benutzt werden:

$$1)\qquad R=\frac{3000}{1{,}05}+\frac{2900}{1{,}05^2}+\frac{2800}{1{,}05^3}+\frac{2700}{1{,}05^4}+\frac{2600}{1{,}05^5}+\frac{2500}{1{,}05^6}$$
$$+\frac{2400}{1{,}05^7}+\frac{2300}{1{,}05^8}+\frac{2200}{1{,}05^9}+\frac{2100}{1{,}05^{10}}$$

$$\begin{array}{rr}
=3000.0{,}9523809 & =2857{,}1428\\
2900.0{,}9070295 & 2630{,}3855\\
2800.0{,}8638376 & 2418{,}7453\\
2700.0{,}8227025 & 2221{,}2967\\
2600.0{,}7835262 & 2037{,}1680\\
2500.0{,}7462154 & 1865{,}5385\\
2400.0{,}7106813 & 1705{,}6352\\
2300.0{,}6768394 & 1556{,}7305\\
2200.0{,}6446089 & 1418{,}1396\\
2100.0{,}6139133 & 1289{,}2178\\
\hline
 & 19999{,}9999
\end{array}$$

also $R=19999{,}999\ldots.=20000$, wie diess sein muss.

Zweite Auflösung. Man bringe den Werth dieser Zahlungen zuerst auf das Ende des zehnten Jahres und dann auf die Gegenwart zurück. Nach der Gleichung vor No. 5) hat man:

$$R=\frac{S}{1{,}05^{10}}=\frac{1}{1{,}05^{10}}(3000.1{,}05^9+2900.1{,}05^8+2800.1{,}05^7$$
$$+2700.1{,}05^6+2600.1{,}05^5+2500.1{,}05^4$$
$$+2400.1{,}05^3+2300.1{,}05^2+2200.1{,}05+2100).$$

Der Werth der in Klammern eingeschlossenen Reihe ist in No. 1) §. 8. angegeben. Es entsteht daher:

$$2)\qquad R=\frac{32577{,}892}{1{,}05^{10}}=\frac{32577{,}892}{1{,}6288946}=20000,$$

wie diess sein muss.

Zu b. Rechnung mit einfachen Zinsen für den gegenwärtigen Werth.

Erste Auflösung. Nach No. 11) §. 3. ist:

$$3)\quad R_1 = \frac{3000}{1,05} + \frac{2900}{1,1} + \frac{2800}{1,15} + \frac{2700}{1,2} + \frac{2600}{1,25} + \frac{2500}{1,3}$$

$$+ \frac{2400}{1,35} + \frac{2300}{1,4} + \frac{2200}{1,45} + \frac{2100}{1,5}$$

$$= 2857,14285 = 20573,7877\ldots$$

2690,90909
2434,78260
2250,00000
2080,00000
1923,07692
1777,77777
1642,85714
1517,24137
1400,00000
20573,78774.

Zweite Auflösung. Man bringe den Werth sämmtlicher Zahlungen auf das Ende des Zeitraums zurück. Hiernach ist:

$$S = 3000.1,45 + 2900.1,4 + 2800.1,35 + 2700.1,3 + 2600.1,25$$
$$+ 2500.1,2 + 2400.1,15 + 2300.1,1 + 2200.1,05 + 2100$$
$$= 31650$$

nach §. 8. Nun rabattire man diesen Werth auf die Gegenwart. Dadurch wird:

$$4)\qquad R_2 = \frac{S}{1,5} = \frac{31650}{1,5} = 21100.$$

Man sieht, dass die in No. 3) und No. 4) gefundenen Resultate weder unter sich, noch mit No. 1) und No. 2) übereinstimmen.

Bestimmung des Werthes sämmtlicher Zahlungen für das Ende des Zeitraums.

a. *Durch die Rechnung mit Zinseszinsen.*

Erste Auflösung. Nach No. 8) §. 6. ist:

$$5)\ S = 3000.1,05^9 + 2900.1,05^8 + 2800.1,05^7 + 2700.1,05^6$$
$$+ 2600.1,05^5 + 2500.1,05^4 + 2400.1,05^3 + 2300.1,05^2$$
$$+ 2200.1,05 + 2100$$
$$= 32577,892,$$

wie aus §. 8. No. 1) zu ersehen ist.

Zweite Auflösung. Man bringe den Werth sämmtlicher Zahlungen auf die Gegenwart zurück. Hiernach ist, wie in No. 1) angegeben wurde:

$$R = \frac{3000}{1,05} + \frac{2900}{1,05^2} + \frac{2800}{1,05^3} + \ldots \frac{2100}{1,05^{10}} = 19999,999\ldots = 20000.$$

Diesen Werth führe man auf das Ende des Zeitraums zurück. Dadurch entsteht:

6) $$S = R.1,05^{10} = 20000.1,05^{10} = 20000.1,6288946$$
$$= 32577,892.$$

b. Durch die Rechnung mit einfachen Zinsen.

Erste Auflösung. Nach No. 18) §. 6. ist, wie schon angegeben wurde:

7) $$S_1 = 3000.1,45 + 2900.1,4 + 2800.1,35 + 2700.1,3 + 2600.1,25$$
$$+ 2500.1,2 + 2400.1,15 + 2300.1,1 + 2200.1,05 + 2100$$
$$= 31650.$$

Zweite Auflösung. Man bringe vorerst den Werth sämmtlicher Zahlungen auf die Gegenwart zurück. Dadurch entsteht, wie oben in No. 3):

$$R_1 = \frac{3000}{1,05} + \frac{2900}{1,1} + \frac{2800}{1,15} + \ldots \frac{2100}{1,5} = 20573,7877\ldots$$

Nun führe man ihn auf das Ende des Zeitraums über, und man erhält:

8) $$S_2 = R_1.1,5 = 20573,7877.1,5 = 30860,6816\ldots$$

Die in No. 7) und No. 8) gefundenen Resultate stimmen weder unter sich noch mit No. 5) und No. 6) überein. Hiedurch bestätigt sich die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes.

§. 12.

Zur Verdeutlichung des Lehrsatzes in §. 10. geben wir der Aufgabe in §. 11. folgende Form:

Die Summen 3000, 2900, 2800, 2700, 2600, 2500, 2400, 2300, 2200, 2100 sind je am Ende der zehn folgenden Jahre fällig. Die Zahlung für sämmtliche Summen soll am Ende des sechsten Jahres gemacht werden. Wie

gross ist die auszuzahlende Summe am Ende dieses Jahres bei 5 Procent Zinsen

a. **bei Zinseszinsen,**

b. **bei einfachen Zinsen?**

a. Die Rechnung mit Zinseszinsen gibt Folgendes:

Erste Auflösung. Die ersten sechs Zahlungen müssen auf das Ende des sechsten Jahres übertragen, die vier letzten auf den nämlichen Zeitpunkt zurückgeführt werden. Nach No. 1) §. 10. ist:

$$S = 3000 \,.\, 1{,}05^5 + 2900 \,.\, 1{,}05^4 + 2800 \,.\, 1{,}05^3 + 2700 \,.\, 1{,}05^2 + 2600 \,.\, 1{,}05 + 2500 + \frac{2400}{1{,}05} + \frac{2300}{1{,}05^2} + \frac{2200}{1{,}05^3} + \frac{2100}{1{,}05^4}$$

$= 3000 \,.\, 1{,}2762816$	$= 3828{,}84468$
$2900 \,.\, 1{,}2155063$	$3524{,}96812$
$2800 \,.\, 1{,}157625$	$3241{,}35000$
$2700 \,.\, 1{,}1025$	$2976{,}75000$
$2600 \,.\, 1{,}05$	$2730{,}00000$
2500	$2500{,}00000$
$2400 \,.\, 0{,}95238095$	$2285{,}71428$
$2300 \,.\, 0{,}9070295$	$2086{,}16779$
$2200 \,.\, 0{,}8638376$	$1900{,}44271$
$2100 \,.\, 0{,}8227025$	$1727{,}67519$
	$26801{,}91277$

1) $$S = 26801{,}9127 \ldots.$$

Zweite Auflösung. Man bringe den Werth sämmtlicher Zahlungen vorerst auf die Gegenwart zurück. Hiernach wird nach No. 1) §. 11.:

$$R = \frac{3000}{1{,}05} + \frac{2900}{1{,}05^2} + \frac{2800}{1{,}05^3} + \ldots \frac{2100}{1{,}05^{10}} = 20000.$$

Dieser Werth erwächst in sechs Jahren zu der Summe:

2) $$S = R \,.\, 1{,}05^6 = 20000 \,.\, 1{,}05^6 = 20000 \,.\, 1{,}3400956 = 26801{,}912.$$

Dritte Auflösung. Man bringe den Werth sämmtlicher Zahlungen auf das Ende des Zeitraums zurück. Es entsteht, wie schon in No. 5) §. 11. angegeben wurde:

$$S_1 = 3000 \,.\, 1{,}05^9 + 2900 \,.\, 1{,}05^8 + 2800 \,.\, 1{,}05^7 + \ldots 2200 \,.\, 1{,}05 + 2100 = 32577{,}892.$$

Wird dieser Werth auf vier Jahre rabattirt, so entsteht:

3) $$S = \frac{S_1}{1,05^4} = 32577,892 . 0,8227025 = 26801,912 ....$$

Die drei gefundenen Werthe stimmen überein.

b. Die Rechnung mit einfachen Zinsen gibt Folgendes:

Erste Auflösung. Nach No. 7) §. 10. ist, wenn sämmtliche Zahlungen auf das Ende des sechsten Jahres zurückgebracht werden:

$$S_1 = 3000 . 1,25 + 2900 . 1,2 + 2800 . 1,15 + 2700 . 1,1 + 2600 . 1,05$$
$$+ 2500 + \frac{2400}{1,05} + \frac{2300}{1,1} + \frac{2200}{1,15} + \frac{2100}{1,2}$$

$$\begin{array}{r} = 3750 \\ 3480 \\ 3220 \\ 2970 \\ 2730 \\ 2500 \\ 2285,714285 \\ 2090,909090 \\ 1913,043478 \\ 1750,000000 \\ \hline 26689,66685 \end{array}$$

also:

4) $$S_1 = 26689,66685.$$

Zweite Auflösung. Man bringe den Werth der Zahlungen zuerst auf den Anfang des Zeitraums zurück. Es entsteht:

$$R_1 = \frac{3000}{1,05} + \frac{2900}{1,1} + \frac{2800}{1,15} + ... \frac{2100}{1,5} = 20573,7877 ....$$

nach §. 11. No. 3). Bringt man nun diesen Werth auf das Ende des sechsten Jahres zurück, so erhält man:

5) $$S_2 = R_1 . 1,3 = 20573,7877 . 1,3 = 26745,92401 ....$$

Dritte Auflösung. Man bringe den Werth der Zahlungen auf das Ende des Zeitraums zurück. Hiedurch entsteht, wie schon in No. 7) §. 11. angegeben wurde:

$$S_1 = 3000 . 1,45 + 2900 . 1,4 + 2800 . 1,35 + ... 2100 = 31650.$$

Wird dieser Werth auf das Ende des sechsten Jahres übertragen, so ist:

6) $$S_3 = \frac{S_1}{1,2} = \frac{31650}{1,2} = 26375.$$

Man sieht, dass die durch die Rechnung mit einfachen Zinsen gewonnenen Werthe nicht nur von den durch die Rechnung mit Zinseszinsen gefundenen abweichen, sondern auch unter sich ver-

schieden sind. Die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes wird hiedurch bestätigt, denn alle sechs Resultate müssten unter sich übereinstimmen, wenn die in No. 4), 5) und 6) angewendete Rechnungsart auf richtiger Grundlage ruhte.

§. 13.

Schlussbemerkung. Ich will schliesslich auf einen Umstand aufmerksam machen, der mir besonders geeignet scheint, die Ungereimtheit, wozu die Rechnung mit einfachen Zinsen führt, in klares Licht zu stellen.

Soll ein Darleihen K durch jährlich gleiche Gegenzahlungen getilgt werden und wird zu dem Ende der Stand der Schuld am Ende des $n$ten Jahres ermittelt, so ergibt sich derselbe nach 19), §. 6., wenn man $\frac{p}{100}$ statt r schreibt, durch.

$$1)\quad S=K(1+\frac{np}{100})-L[(1+\frac{(n-1)p}{100})+(1+\frac{(n-2)p}{100})...+(1+\frac{p}{100})+1]$$

$$=K(1+\frac{np}{100})-Ln-\frac{L}{2}n(n-1)\frac{p}{100}.$$

Soll nun das Kapital durch die Gegenzahlungen getilgt sein, so geht S in 0 über und man hat die Gleichung:

$$2)\qquad 0=K+n.K.0{,}0p-Ln-\tfrac{1}{2}Ln^2.0{,}0p+\tfrac{1}{2}Ln.0{,}0p.$$

Hieraus lässt sich n bestimmen. Diess führt zu der Frage: In wie viel Jahren wird durch Entrichtung der jährlichen Zinse von p Procent ein Kapital K nach der Rechnung mit einfachen Zinsen getilgt?

Die Antwort auf diese Frage ist bekannt, und Jedermann, der Arithmetiker wie der Nicht-Arithmetiker, weiss, dass ein Kapital durch Entrichtung der jährlichen Zinsen nie getilgt wird und nie getilgt werden kann. Man weiss also auch, welche Antwort auf die aufgestellte Frage der Calcul geben muss, wenn er auf richtiger Grundlage ruht.

Fragt man nun die Rechnung mit einfachen Zinsen um die Antwort auf obige Frage, so hat man n aus der Gleichung No. 2) zu bestimmen, und wird durch sie (diess ist die Folge unrichtiger Grundlage) eine ganz ungereimte Antwort bekommen. Es ist nämlich:

$$n^2.\frac{L}{2}.0{,}0p+n[L-K.0{,}0p-\frac{L}{2}.0{,}0p]=K$$

oder

$$n^2+\frac{L-K.0{,}0p-\frac{1}{2}L.0{,}0p}{\frac{1}{2}L.0{,}0p}n=\frac{2K}{L.0{,}0p}.$$

Wird nun diese quadratische Gleichung aufgelöst, so ergibt sich:

$$3)\quad n = -\frac{L - K.0{,}0p}{L.0{,}0p} + \tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{2K}{L.0{,}0p} + \left(\frac{L - K.0{,}0p}{L.0{,}0p} - \tfrac{1}{2}\right)^2}.$$

Soll nun die obige Frage beantwortet werden, so hat man für L die jährlichen Zinse von dem Kapital K, also $L = K.0{,}0p$ in No. 3) zu setzen. Hiedurch entsteht, da $\frac{K.0{,}0p - K.0{,}0p}{K.0{,}0p} = 0$ ist,

$$4)\quad n = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{0{,}0p^2} + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{20000}{p^2} + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{80000}{p^2} + 1}.$$

Setzt man nun hierin $p = 5$, so ist: $n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3201} = 28{,}7886....$; für $p = 4$ ist: $n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5001} = 35{,}8588....$

Diese Gleichung sagt also aus: Nach der Rechnung mit einfachen Zinsen ist durch Entrichtung fünfprocentiger jährlicher Zinse ein Kapital von beliebiger Grösse in 29; durch Entrichtung vierprocentiger Zinse in 36 Jahren vollständig getilgt u. s. w.

Diese Antwort zeigt wohl die Unrichtigkeit der Rechnung mit einfachen Zinsen aus ihren Consequenzen ganz schlagend und unzweifelhaft. Beantwortet man diese Frage durch die Rechnung mit Zinseszinsen, so erhält man hierauf eine ganz richtige Antwort.

Der Stand einer Schuld bei einem dargeliehenen Kapital K ist nach No. 9) §. 6., wenn es durch gleiche Summen (L) getilgt werden soll, am Ende des $n$ten Jahres:

$$5)\quad S = K.1{,}0p^n - L(1{,}0p^{n-1} + 1{,}0p^{n-2} + 1{,}0p^{n-3} \ldots . 1)$$
$$= K.1{,}0p^n - L.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}.$$

Soll die Schuld getilgt sein, so wird $S = 0$, und man hat:

$$K.1{,}0p^n = \frac{L.1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} \text{ und hieraus } 1{,}0p^n = \frac{L}{L - K.0{,}0p}.$$

Man erhält zur Bestimmung von n:

$$6)\quad n = \frac{\log \frac{L}{L - K.0{,}0p}}{\log 1{,}0p}.$$

Fragt man nun, wann ein Kapital durch Entrichtung der jährlich fälligen Zinse getilgt sein wird, so hat man auch hierin $L = K.0{,}0p$ zu setzen, und dann entsteht:

$$7)\quad n = \frac{\log \frac{K.0{,}0p}{K.0{,}0p - K.0{,}0p}}{\log 1{,}0p} = \frac{\log \frac{1}{0}}{\log 1{,}0p} = \frac{\infty}{\log 1{,}0p},$$

und die Rechnung mit Zinseszinsen sagt aus: Durch Entrichtung der Jahreszinsen wird ein Kapital erst am Ende eines unendlich grossen Zeitraums, d. h. nie getilgt, denn der Logarithme einer unendlich grossen Zahl ist, wie sich leicht nachweisen lässt, selbst unendlich gross, und $\log 1{,}0p$ ist, da p sich gewöhnlich nicht über die Einer erhebt, ein Bruch, daher ist $\frac{1}{\log 1{,}0p}$ ein Vielfaches und grösser als die Einheit, folglich n ein Vielfaches des Unendlichgrossen.

Mit dem Beweise der in den früheren Paragraphen aufgestellten Lehrsätze ist nach meinem Dafürhalten diesem Theile der politischen Arithmetik mit allem, was sich daran schliesst, eine wissenschaftliche Grundlage gesichert.

Die Rechnung mit einfachen Zinsen ist bei der Reduction der Kapitalzahlungen auf die Gegenwart oder auf einen künftigen Zeitpunkt, bei Ermittelung der Werthe der Renten, bei gegenseitigen Zahlungsleistungen, bei Feststellung der Werthe von Nutzniessungen u. s. w. unzulässig, und muss, weil unrichtig, ausgeschlossen werden. Es kann sich nicht mehr darum handeln, die oben §. 2. vorgelegte Frage, wie manche Schriftsteller meinen, unentschieden zu lassen oder der Willkühr anheim zu geben, ob bei Kapitalzahlungen mit einfachen Zinsen oder Zinseszinsen gerechnet werden soll. Alle Vermittlungs-Vorschläge zwischen richtiger und unrichtiger Rechnung oder der Combination beider Rechnungsarten müssen fallen, sind Halbheiten, können im Gebiete der Wissenschaft keine Stelle finden und sind eben so wenig in der Anwendung auf das praktische Leben brauchbar.

Hätte man sich bemüht, sich die Ungereimtheiten klar zu machen, worauf die Rechnung mit einfachen Zinsen führt, so wären obige Lehrsätze schon längst aufgestellt und begründet worden.

Durch die gegebenen Resultate ist nach meinem Dafürhalten auch der langjährige Streit in der Jurisprudenz über die richtige Berechnungsweise des Interusuriums entschieden, denn eine offenbar unrichtige Rechnungsart (diess ist die Hoffmannsche Methode) kann keine Gesetzgebung zulassen. Sollte es dennoch geschehen oder geschehen sein, so muss sie mit der Erkenntniss des Richtigen unweigerlich aus derselben entfernt werden, weil eine gute Gesetzgebung gegen irgend welche Benachtheiligung schützen soll, und es ist offenbar, dass die Hoffmann'sche Methode den einen oder den andern Theil (Schuldner oder Gläubiger) benachtheiligt, denn sie muthet ihm, weil falsch, unrichtige Zahlungsleistung zu.

XVI.

Weitere Ausführung der politischen Arithmetik.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

(Fortsetzung von Nr. XV.)

Zweites Kapitel.

Anwendungen und Aufgaben.

§. 14.

Da in diesem Kapitel vorzüglich auf Anwendung der im vorigen aufgestellten Sätze und Auflösung von Aufgaben Rücksicht genommen werden soll, so sollen zu dem Ende einige Bemerkungen vorausgeschickt werden.

Die Werthe für die Ausdrücke

$$1,0p^n;\quad \frac{1}{1,0p^n};\quad \frac{1,0p^n-1}{0,0p};\quad \frac{1-1,0p^{-n}}{0,0p}$$

sind für verschiedene Zinsfüsse (p) und Zahl der Jahre (n, 1 bis 100) in den hierüber bestehenden Tafeln zu finden und ich verweise in dieser Beziehung auf meine Anleitung, wo dieselben bis auf sieben Decimalstellen angegeben sind.

Die Ausdrücke $\frac{1,0p^n-1}{0,0p}$ und $\frac{1-1,0p^{-n}}{0,0p}$ werden daher immer und gerade deswegen als ein ganzes oder als eine Grösse behandelt werden, weil sich hiefür die bezüglichen Werthe aus den Tafeln direct einführen lassen, wodurch die Rechnung sehr erleichtert wird. Die Werth-Berechnung dieser Ausdrücke durch Logarithmen halte ich nicht für zweckmässig. Wie sie am leichtesten in einzelnen Falle durchgeführt wird, ist an den betreffenden Orten meiner Anleitung gezeigt und ich verweise hierüber

für den, der keine solche Tafeln besitzen sollte, dorthin. Die Rechnung mit Logarithmen wird überhaupt im Folgenden so viel als möglich vermieden werden, einmal weil durch sie mit Sicherheit nur auf sechs Decimalstellen bei den gewöhnlichen Tafeln gerechnet werden kann, und dann weil sich bei dem geringsten Versehen in der Rechnungsoperation Fehler einschleichen, die durch die Ausführung der Multiplikation sicherer vermieden werden, zumal wenn man Multiplikationstafeln (z. B. die von Crelle) benutzt, wodurch die Rechnung sehr erleichtert, beschleunigt und in der Regel sicherer und eine grössere Anzahl von Decimalstellen gewonnen wird, die bei grössern Summen nicht gut vernachlässigt werden können. Nur wo die Rechnung mit Logarithmen nicht umgangen werden kann, wie bei Divisionen mehrstelliger Zahlen, wird sie beibehalten werden.

Da im Folgenden in geeigneten Fällen auf die Rechnung mit einfachen Zinsen zur Rechtfertigung der im vorigen Kapitel aufgestellten Lehrsätze Rücksicht genommen werden wird, so theile ich zwei, eigens hiefür berechnete Tafeln mit, wodurch die Ausführung der erforderlichen Rechnungen sehr erleichtert und abgekürzt wird. Sie erstrecken sich auf 50 Jahre bei dem Zinsfuss 5. Um übrigens eine Controle für die Richtigkeit derartiger Rechnungen zu haben, soll hier die in meiner Anleitung §. 13. gegebene Formel mitgetheilt werden, die den gegenwärtigen Werth von n gleichen, jährlichen Zahlungen K bei einfachen Zinsen und dem Zinsfuss p bestimmt. Sie ist

1)

$$R = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}02p} + \frac{K}{1{,}03p} + \cdots \frac{K}{1{,}0np}$$

$$= 100 . K\left[\frac{\lg(100+np)}{p} + \frac{1}{2(100+np)} - \frac{p}{12(100+np)^2} + \frac{p^3}{120(100+np)^4} - \frac{p^5}{252(100+np)^6} \cdots\right]$$

$$-100\,K\left[\frac{\lg(100+p)}{p} - \frac{1}{2(100+p)} - \frac{p}{12(100+p)^2} + \frac{p^3}{120(100+p)^4} - \frac{p^5}{252(100+p)^9} \cdots\right].$$

Die Werthe für R ergeben sich hieraus um so leichter, je grösser n ist. Bei der Anwendung hat man natürliche Logarithmen einzuführen. Bei einerlei Zinsfuss (p) bleibt der Werth der zweiten Reihe (Constante) für jedes n unverändert, und man hat ihn sofort nur einmal zu berechnen.

Tafel I.

Werth des Ausdrucks $\frac{1}{1{,}0np} = \frac{100}{100 + np}$ für $p = 5$ und n von 1 bis 50.

Jahr		Jahr	
1	0,952380952380	26	0,434782608695
2	0,909090909090	27	0,425531914893
3	0,869565217391	28	0,416666666666
4	0,833333333333	29	0,408163265306
5	0,800000000000	30	0,400000000000
6	0,769230769230	31	0,392156862745
7	0,740740740740	32	0,384615384615
8	0,714285714285	33	0,377358490566
9	0,689655172413	34	0,370370370370
10	0,666666666666	35	0,363636363636
11	0,645161290322	36	0,357142857142
12	0,625000000000	37	0,350877192982
13	0,606060606060	38	0,344827586206
14	0,588235294117	39	0,338983050847
15	0,571428571428	40	0,333333333333
16	0,555555555555	41	0,327868852141
17	0,540540540540	42	0,322580645161
18	0,526315789473	43	0,317460317460
19	0,512820512820	44	0,312500000000
20	0,500000000000	45	0,307692307692
21	0,487804878048	46	0,303030303030
22	0,476190476190	47	0,298507462686
23	0,465116279069	48	0,294117647058
24	0,454545454545	49	0,289855072463
25	0,444444444444	50	0,285714285714

Tafel II.

Werth der Reihe $\frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}02p} + \frac{1}{1{,}03p} + \cdots \frac{1}{1{,}0np}$ für $p = 5$ und $n = 1$ bis 50.

Jahr		Jahr	
1	0,9523809524	26	16,3789517768
2	1,8014718615	27	16,8044836917
3	2,7310370789	28	17,2211503584
4	3,5643704122	29	17,6293136237
5	4,3643704122	30	18,0293136237
6	5,1336011814	31	18,4214704864
7	5,8743419222	32	18,8060858711
8	6,5886276364	33	19,1834443616
9	7,2782828089	34	19,5538147320
10	7,9449494755	35	19,9174510956
11	8,5901107659	36	20,2745939528
12	9,2151107659	37	20,6254711458
13	9,8211713719	38	20,9702987320
14	10,4094066660	39	21,3092817828
15	10,9808352375	40	21,6426151161
16	11,5363907930	41	21,9704839686
17	12,0769313336	42	22,2930646138
18	12,6032471230	43	22,6105249312
19	13,1160676358	44	22,9230249312
20	13,6160676358	45	23,2307172389
21	14,1038725139	46	23,5337475419
22	14,5800629901	47	23,8322550046
23	15,0451792692	48	24,1263726517
24	15,4997247237	49	24,4162277242
25	15,9441691681	50	24,7019420099

§. 15.

Jemand hat von seinem Gläubiger ein Darleihen erhalten und zahlt ihm je am Ende der folgenden neun Jahre die Summe 500 und am Ende des 10ten Jahres die Summe 10500. Wie gross ist bei 5 Procent Zinsen die Summe, welche er von seinem Gläubiger erhalten hat? und zwar

a) **mit Zinseszinsen,**

b) **mit einfachen Zinsen.**

Auflösung. In beiden Fällen hat man, um die Frage zu beantworten, den Werth sämmtlicher Zahlungen auf die Gegenwart zurückzubringen.

Zu a). Die Rechnung mit Zinseszinsen gibt folgenden Werth (R):

$$R = \frac{500}{1{,}05} + \frac{500}{1{,}05^2} + \frac{509}{1{,}05^3} + \dots \frac{500}{1{,}05^9} + \frac{10500}{1{,}05^{10}}$$

$$= 500\frac{1-1{,}05^{-9}}{0{,}05} + \frac{10500}{1{,}05^{10}}.$$

Man erhält aus den Tafeln hiefür

1) $$R = 500 . 7{,}1078217 + 10500 \times 0{,}6139133$$

$$= 3553{,}91085 + 6446{,}08912 = 9999{,}9999 \dots$$

$$= 10000.$$

Zu b). Die Rechnung mit einfachen Zinsen gibt folgenden Werth (R_1):

$$R_1 = \frac{500}{1{,}05} + \frac{500}{1{,}1} + \frac{500}{1{,}15} + \dots \frac{500}{1{,}45} + \frac{10500}{1{,}5}$$

$$= 500\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}15} + \dots \frac{1}{1{,}45}\right) + \frac{10500}{1{,}5}.$$

Aus der Tafel II. und I. erhält man

2) $$R_1 = 500 . 7{,}278282808 + 10500 \times 0{,}666666 \dots$$

$$= 3639{,}14140 + 7000 = 10639{,}141.$$

Hätte der Schuldner während 19 Jahren jährlich die Summe 500 und am Ende des 20sten Jahrs 10500 gezahlt, und fragt man nach der Grösse der Summe, welche er von seinem Gläubiger erhalten hat, so be-

stimmt sich nach derselben Auflösungsweise der gegenwärtige Werth dieser Schuld

a) durch die Rechnung mit Zinseszinsen

$$R = \frac{500}{1{,}05} + \frac{500}{1{,}05^2} + \frac{500}{1{,}05^3} + \dots \frac{500}{1{,}05^{19}} + \frac{10500}{1{,}05^{20}}$$

$$= 500\frac{1-1{,}05^{-19}}{1{,}05} + \frac{10500}{1{,}05^{20}}.$$

Nach den Tafeln entsteht

$$3) \qquad R = 500 . 12{,}0853209 + 10500 . 0{,}3768895$$

$$= 6042{,}6604 + 3957{,}3395 = 9999{,}9999 \dots$$

$$= 10000.$$

b) Durch die Rechnung mit einfachen Zinsen

$$4) \qquad R_1 = \frac{500}{1{,}05} + \frac{500}{1{,}1} + \frac{500}{1{,}15} + \dots \frac{500}{1{,}95} + \frac{105000}{2}$$

$$= 500\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}15} + \dots \frac{1}{1{,}95}\right) + 5250$$

$$= 500 . 13{,}160676358 + 5250$$

$$= 6558{,}03381 + 5250 = 11808{,}0338 \dots$$

Die hier durch beide Rechnungsarten erhaltenen Resultate No. 1 und 2; 3 und 4 sind sehr verschieden. Die Rechnung mit Zinseszinsen sagt aus, dass der Schuldner in beiden Fällen gleich viel erhalten hat; die Rechnung mit einfachen Zinsen stellt die Schuld im ersten Falle auf 10639,14, im zweiten Falle sogar auf 11808,033 fest.

Es ist aber einleuchtend, dass wenn Jemand während einer Reihe von Jahren bei 5 Procent Zinsen jährlich an seinen Gläubiger die Summe 500 und am Ende des letzten Jahres 10500 zahlt, alle diese Zahlungen von der Aufnahme eines Kapitals von 10000 herrühren, also diesem Kapital an Werth gleichkommen; denn 500 sind die jährlichen fünfprocentigen Zinse hieven und die letzte Zahlung 10500 = 10000 + 500 enthält das Kapital selbst und den zugehörigen Jahreszins. Damit ist offenbar die Schuld von 10000 (nicht mehr wie die Rechnung mit einfachen Zinsen angibt) getilgt. Die Dauer des Zeitraums, während welches das Kapital benutzt und verzinst wurde, ist ganz gleich-

gültig, und die längere Dauer der Benutzung erhöht die Grösse der Schuld durchaus nicht.

Hiemit stimmt die Aussage der Zinszins-Rechnung genau überein, während die Rechnung mit einfachen Zinsen ganz ungereimte Resultate aufstellt. Das Gesagte wird seine Bestätigung an der Beantwortung folgender Frage finden.

Jemand hat ein Kapital von 10000 auf zehn Jahre zu fünf Procent Zinsen aufgenommen und zahlt am Ende der neun ersten Jahre 500, am Ende des zehnten 10500. Ein andermal hat er dieselbe Summe unter den gleichen Bedingungen aufgenommen, und zahlt in den ersten 19 Jahren 500, im 20sten Jahre 10500. Wie gross ist der Stand der Schuld in beiden Fällen am Ende des Zeitraums?

a) bei Zinseszinsen,

b) bei einfachen Zinsen.

Auflösung durch die Rechnung mit Zinseszinsen. Nach Nr. 9. §. 6. ergibt sich der Stand der Schuld am Ende des zehnten Jahres, wenn man die im letzten Jahre fällige Summe 10500 in 10000 + 500 auflöst, und $p = 5$, $L_1 = L_2 = \ldots . L_{n-1} = 500$, $L_n = 10500$, $n = 10$ und $K = 10000$ schreibt:

$$S = 10000 . 1{,}05^{10} - (500 . 1{,}05^{9} + 500 . 1{,}05^{8} + \ldots . 500) - 10000$$

$$= 10000 . 1{,}05^{10} - 500 . \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} - 10000.$$

Aus den Tafeln erhält man

$$\text{5)} \quad S = 10000 . 1{,}6288946 - 500 . 12{,}5778925 - 10000$$

$$= 16288{,}946 - 10000 - 6288{,}946 = 0.$$

Setzt man nun $n = 20$ unter den gleichen Bedingungen, so entsteht für die zweite Frage:

$$S = 10000 . 1{,}05^{20} - 500(1{,}05^{19} + 1{,}05^{18} + \ldots . 1{,}05 + 1) - 10000$$

$$= 10000 . 1{,}05^{20} - 500 \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05} - 10000$$

$$= 10000 . 2{,}6532977 - 500 . 33{,}0659541 - 10000,$$

$$\text{6)} \quad S = 26532{,}977 - 16532{,}977 - 10000 = 0.$$

Auflösung durch die Rechnung mit einfachen Zinsen. Nach No. 19) und 23) §. 6. ergibt sich der Stand der Schuld, wenn $K = 10000$, $n = 10$, $r = \frac{5}{100}$ $L_1 = L_2 = \ldots. L_{n-1} = 500$ und $L_n = 10500$ $= 10000 + 500$ gesetzt wird:

7)

$$S_1 = 10000 . 1{,}5 - 500(1{,}45 + 1{,}4 + \ldots. 1{,}05 + 1) - 10000$$

$$= 15000 - 500 \frac{2{,}45 . 10}{2} - 10000$$

$$= 5000 - 6125 = - 1125.$$

Wird aber bei den eben angegebenen Werthen $n = 20$ gesetzt, so ist der Stand der Schuld im zweiten Falle:

8)

$$S_2 = 10000 \times 2{,}00 - 500(1{,}95 + 1{,}9 + 1{,}85 \ldots. 1{,}05 + 1) - 10000$$

$$= 20000 - 500 \frac{2{,}95 . 20}{2} - 10000$$

$$= 10000 - 14750 = - 4750.$$

Während nun die Zinszinsrechnung aussagt, dass der Schuldner durch die in beiden Zeiträumen geleisteten Zahlungen seine Schuld vollständig getilgt hat, wie diess in der Natur der Sache liegt, behauptet die Rechnung mit einfachen Zinsen, dass der Schuldner im ersten Falle durch die obigen zehn Zahlungen 1125 und im zweiten Falle durch zwanzig Zahlungen 4750 zuviel gezahlt und daher diese Summe zurück zu erhalten habe. Das sind offenbare Ungereimtheiten, die noch stärker hervortreten würden, wenn man die angeblichen Schuldsummen von 10639,14 und 11808,033 mit den eben genannten Zahlungen (500 und 10500) vergliche und den Stand der Schuld am Ende des zehnten und zwanzigsten Jahres ermitteln würde.

§. 16.

Wie gross ist der gegenwärtige Werth einer jährlich fälligen unverzinslichen Summe von 2000 (Rente), die 10-, 20-, 30-, 40-, 50-, 100- oder 1000mal ausgezahlt wird, bei fünf Procent Zinsen:

a) wenn Zinseszinse,

b) einfache Zinse gerechnet werden?

Auflösung zu a). Der gegenwärtige Werth einer jährlich fälligen Summe K, bei p Procent und n Jahren, ergibt sich auf folgende Weise allgemein:

$$1)\qquad R = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}0p^2} + \frac{K}{1{,}0p^3} + \dots \frac{K}{1{,}0p^n}$$

$$= K.\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

Man findet daher die fraglichen Werthe, wenn man $p=5$, $K=2000$, und statt n allmälig die angegebenen Zahlen schreibt. Hiernach ist der Werth einer zehnjährigen Rente:

$$R_{10} = 2000.\frac{1-1{,}05^{-10}}{0{,}05} = 2000 \times 7{,}7217349$$

$$= 15443{,}4698;$$

der einer 20jährigen ist:

$$R_{20} = 2000.\frac{1-1{,}05^{-20}}{0{,}05} = 2000 \times 12{,}4622103$$

$$= 24924{,}4206;$$

der einer 30jährigen ist:

$$R_{30} = 2000.\frac{1-1{,}05^{-30}}{0{,}05} = 20000 \times 15{,}3724510$$

$$= 30744{,}9020;$$

der einer 40jährigen ist:

$$R_{40} = 2000.\frac{1-1{,}05^{-40}}{0{,}05} = 2000 \times 17{,}1590863$$

$$= 34318{,}1727;$$

der einer 50jährigen ist:

$$R_{50} = 2000.\frac{1-1{,}05^{-50}}{0{,}05} = 2000 \times 18{,}2559255$$

$$= 36511{,}851;$$

der einer 100jährigen ist:

$$R_{100} = 2000.\frac{1-1{,}05^{-100}}{0{,}05} = 2000 \times 19{,}8479102$$

$$= 39695{,}8204;$$

der einer 1000jährigen ist:

$$R_{1000} = 2000 \cdot \frac{1-1{,}05^{-1000}}{0{,}05} = \frac{200.100}{5} - \frac{2000.100}{5.1{,}05^{1000}}$$

$$= 40000 - \frac{40000}{1{,}05^{1000}}.$$

Der zweite Ausdruck ist mit Logarithmen zu rechnen. Es ist

$$\lg 105^{1000} = 1000 \lg 1{,}05 = 21{,}1892991.$$

Hieraus wird

$$\begin{array}{r} \lg 40000 = 4{,}6020600 \\ \lg 1{,}05^{1000} = 21{,}1892991 \\ \hline 0{,}4127609 - 17 \end{array}$$

$$\text{Num.}\, 0{,}4127609 - 17 = \frac{2586788}{10^{23}}$$

oder die hiezu gehörige Zahl ist ein Decimalbruch, der nach dem Komma 16 Nullen stehen hat. Es ist daher

$$R_{1000} = 40000 - \frac{2586788}{10^{23}} = 39999{,}9999\ldots.$$

Oder der Werth von R_{1000} ist eine mit einem Decimalbruche begleitete Zahl, dessen 16 erste Ziffern nur die Zahl 9 enthalten, und daher nicht von 40000 zu unterscheiden.

Auflösung zu b). Der gegenwärtige Werth einer jährlich fälligen Summe ergibt sich unter den gleichen Voraussetzungen wie oben bei einfachen Zinsen durch:

$$2) \qquad R_1 = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}02p} + \frac{K}{1{,}03p} + \cdots \frac{K}{1{,}0np}$$

$$= K\left(\frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}02p} + \frac{1}{1{,}03p} + \cdots \frac{1}{1{,}0np}\right).$$

Führt man nun die erforderlichen Werthe ein, benutzt die Tafel II. §. 14., so ist der gegenwärtige Werth einer 10jährigen Rente:

$$R_{10} = 2000\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}15} + \cdots \frac{1}{1{,}5}\right)$$

$$= 2000 . 7{,}944949475 = 15889{,}8989\ldots;$$

der einer 20jährigen ist:

$$R_{20}=2000\left(\frac{1}{1,05}+\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,15}+\cdots\frac{1}{2}\right)$$
$$=2000.13,616067636=27232,1352\ldots.;$$

der einer 30jährigen ist:

$$R_{30}=2000\left(\frac{1}{1,05}+\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,15}+\cdots\frac{1}{2,5}\right)$$
$$=2000.18,029313623=36058,6272\ldots.;$$

der einer 40jährigen ist:

$$R_{40}=2000\left(\frac{1}{1,05}+\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,15}+\cdots\frac{1}{3}\right)$$
$$=2000.21,642615116=43285,2302\ldots.;$$

der einer 50jährigen ist:

$$R_{50}=2000\left(\frac{1}{1,05}+\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,15}+\cdots\frac{1}{3,5}\right)$$
$$=2000.24,701942009=49403,8840\ldots.$$

Der einer 100jährigen berechnet sich aus No. 1) §. 14., wenn $p=5$, $n=100$, $K=2000$ geschrieben wird, und es ist:

$$R_{100}=2000\left(\frac{1}{1,05}+\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,15}+\cdots\frac{1}{6,00}\right)$$
$$=200000\left[\frac{\log 600}{5}+\frac{1}{2.600}-\frac{5}{12.600^2}+\frac{5^3}{120.600^4}\cdots\right]$$
$$-200000\left[\frac{\log 105}{5}-\frac{1}{2.105}-\frac{5}{12.105^2}+\frac{5^3}{120.105^4}\cdots\right]$$
$$=200000\left[\frac{6,39692966}{5}+\frac{1}{1200}-\frac{5}{12.36.10^4}-\frac{125}{120.1296.10^8}\cdots\right]$$
$$-200000\left[\frac{4,65396035}{5}-\frac{1}{210}-\frac{5}{132300}+\frac{1}{252.105.4410}\cdots\right].$$

Werden nun die angezeigten Geschäfte ausgeführt, so erhält man für die beiden eingeschlossenen Reihen folgende Zahlenwerthe:

1,279 385 932	0,930 792 070
+ 0,000 833 333	− 0,004 761 904
1,280 219 265	0,926 030 166
− 0,000 000 115	− 0,000 037 792
1,280 219 150	0,925 992 374
	+ 0,000 000 008
	0,925 992 382.

Die spätern Glieder in beiden Reihen influiren nicht mehr auf die betreffenden Decimalstellen. Hieraus ist, wenn man letztern von ersterm abzieht:

$$R_{100}=200000[1,280219150-0,925992382]$$

$$=200000.0,354226768=70845,3536.$$

Der Werth einer 1000jährigen Rente ist, wenn $n=1000$ in No. 1) §. 14. neben den genannten Werthen geschrieben wird:

$$R_{1000}=2000\left(\frac{1}{1,05}+\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,15}+\cdots\frac{1}{51,00}\right)$$

$$=200000\left[\frac{\log 5100}{5}+\frac{1}{2.5100}-\frac{5}{12.5100^2}+\cdots\right]$$

$$-200000\left[\frac{\log 105}{5}-\frac{1}{2.105}-\frac{5}{12.105^2}+\frac{5^3}{120.105^4}\cdots\right];$$

oder da der Werth der zweiten Reihe schon bestimmt ist:

$$R_{1000}=20000\left[\frac{8,53699582}{5}+\frac{1}{10200}-\frac{5}{612.510000}\cdots\right]$$

$$-200000.0,925992382.$$

Man erhält, wenn die Zahlenwerthe bestimmt werden, für die Glieder der ersten Reihe:

$$\begin{array}{r} +1,707399164 \\ +0,000098039 \\ \hline +1,707497203 \\ -0,000000016 \\ \hline 1,707497187, \end{array}$$

und hieraus:

$$R_{1000}=200000[1,707497187-0,925992382]=156300,9610.$$

Man sieht aus den erhaltenen Resultaten, und diess ist der Zweck der gegebenen Aufgabe, wie unverhältnissmässig die Werthe der Renten, die mit einfachen Zinsen berechnet werden, gegenüber den Werthen derselben Renten, die sich aus der Rechnung mit Zinseszinsen ergeben, wachsen. Diess führt zu folgender Zusammenstellung:

10 Jahre	20 J.	30 J.	40 J.	50 J.	100 J.	1000 J.
15443,46	24924,42	30544,90	34318,17	36511,85	39695,82	39999,999
15889,99	27232,13	36058,62	43285,28	49403,88	70845,35	156300,961

Die erste Horizontalreihe gibt die aus der Rechnung mit Zinseszinsen sich ergebenden Rentenwerthe, die zweite die aus der Rechnung mit einfachen Zinsen sich ergebenden für die angezeigte Zahl von Jahren.

Nun ist bekannt und jedes Rechenbuch lehrt, dass eine beständige Rente das Sovielfache der Rente ist, als der Zinsfuss in der Zahl 100 enthalten ist, dass also eine beständige Rente von 2000 keinen höhern Werth als 40000 haben kann, und dass sich die Rentenwerthe von bestimmter Zeitdauer nach §. 13. No. 7) mit der Zunahme der Zeit einer festen Grenze mehr und mehr nähern, ohne sie überschreiten zu können. Dagegen behauptet die Rechnung mit einfachen Zinsen, dass die Rentenwerthe mit der Zunahme der Zeit ohne Grenzen wachsen, wie diess hier klar vorliegt, dass schon eine 40jährige Rente von 2000 einen höhern Kapitalwerth (43285,28) sichere, als der Kapitalwerth (40000) einer beständigen Rente von derselben Grösse gibt. Alles diess ist unhaltbar und ungereimt. Das Gesagte gibt Veranlassung, die Kehrseite dieser Frage hervorzuheben und führt zu folgender Aufgabe.

§. 17.

Ein Schuldner hat ein Kapital von 40000 aufgenommen und verzinst es zu 5 Procent. Welches ist der Stand der Schuld unter dieser Voraussetzung nach 20, 30 und 40 Jahren

a) **bei der Rechnung mit Zinseszinsen?**

b) **bei der mit einfachen Zinsen?**

Die Antwort auf diese Frage lässt sich leicht geben. Denn wenn der Schuldner jährlich während irgend einer Reihe von Jahren nicht mehr als die bedungenen Zinse zahlt, so bleibt die Schuld ungetilgt, also unverändert dieselbe.

Fragt man nun die beiden Rechnungsarten, so geben sie folgende Antwort.

Auflösung zu a). Die jährlichen 5procentigen Zinsen von 40000 betragen: $40000 \,.\, 0{,}05 = 2000$ Werden diese 20mal gezahlt und vergleicht man Ende des 20sten Jahres die Forderung des Gläubigers mit den Zahlungsleistungen des Schuldners, so erhält man nach No. 8) §. 7. den Stand der Schuld, wenn $K = 40000$, $L = 2000$, $p = 5$ und $n = 20$ geschrieben wird:

$$S_{20} = 40000 . 1{,}05^{20} - 2000 . \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05}$$

$$= 40000 . 2{,}6532977 - 2000 . 33{,}0659541$$

$$= 106131{,}908 - 66131{,}908 = 40000.$$

Eben so erhält man den Stand der Schuld am Ende des 30sten Jahres:

$$S_{30} = 40000 . 1{,}05^{30} - 2000 . \frac{1{,}05^{30} - 1}{0{,}05}$$

$$= 40000 . 4{,}3219424 - 2000 . 66{,}4388475$$

$$= 172877{,}696 - 132877{,}695 = 40000.$$

Der Stand der Schuld am Ende des 40sten Jahres ist:

$$S_{40} = 40000 . 1{,}05^{40} - 2000 . \frac{1{,}05^{40} - 1}{0{,}05}$$

$$= 40000 . 7{,}0399887 - 2000 . 120{,}7997742$$

$$= 281599{,}548 - 241599{,}548 = 40000.$$

Auflösung zu b). Durch die Rechnung mit einfachen Zinsen erhält man nach §. 6. No. 23) für den Stand der Schuld am Ende des 20sten Jahres:

$$S_{20} = 40000 . 2{,}00 - 2000 . \frac{2{,}95}{2} . 20 = 80000 - 59000 = 21000.$$

Hiernach wären durch Zahlung der Jahreszinse 19000 am Ende des 20sten Jahres am Kapital getilgt.

Nach 30 Jahren ist der Stand der Schuld:

$$S_{30} = 40000 . 2{,}5 - 2000 . \frac{3{,}45}{2} . 30 = 100000 - 103500 = -3500.$$

Durch Entrichtung der einfachen Jahreszinse wäre hiernach am Ende des 30sten Jahres das Kapital nicht nur getilgt, sondern der Schuldner hätte noch an den Gläubiger 3500 zu fordern.

Nach 40 Jahren ist der Stand der Schuld:

$$S_{40} = 40000 . 3{,}00 - 2000 . \frac{3{,}95}{2} . 40 = 120000 - 158000 = -58000.$$

Das Kapital wäre durch Entrichtung der 40jährigen Zinsen nicht nur getilgt, sondern der Gläubiger hätte sogar noch 58000 an den Schuldner herauszuzahlen.

Man sieht auch hier, dass die Zinseszins-Rechnung richtige

Antworten und Resultate gibt, die Rechnung mit einfachen Zinsen aber unrichtige und ungereimte, die um so stärker hervortreten, je grösser die Zeitdauern sind.

§. 18.

Jemand will ein Gut verkaufen, worauf ihm drei Anerbieten gemacht werden. A bietet 30600 baar; B bietet 15000 baar und am Ende der folgenden zehn Jahre je 2000; C bietet 7000 und am Ende der folgenden zehn Jahre je 3000. Welches ist das vortheilhafteste Anerbieten, wenn 5 Procent Zinsen gerechnet werden

a) bei der Rechnung mit Zinseszinsen?

b) bei der mit einfachen Zinsen?

Um die vorstehende Frage zu beantworten, kann man den Werth der angebotenen Zahlungen, da sie nicht gleichzeitig sind, entweder auf die Gegenwart, oder auf den Zeitpunkt der letzten Zahlung, oder auf irgend einen andern, aber bestimmten Zeitpunkt zurückbringen.

Erste Auflösung zu a). Man bringe die Werthe der Anerbieten von B und C auf die Gegenwart durch Rabattirung auf zehn Jahre zurück. Hiernach ist das Anerbieten von B werth:

$$W_2 = 15000 + \frac{2000}{1{,}05} + \frac{2000}{1{,}05^2} + \frac{2000}{1{,}05^3} + \cdots \frac{2000}{1{,}05^{10}}$$

$$= 15000 + 2000 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-10}}{0{,}05}$$

$$= 15000 + 2000 . 7{,}7217349 = 15000 + 15443{,}4698$$

$$= 30443{,}4698.$$

Das Anerbieten von C ist werth:

$$W_3 = 7000 + \frac{3000}{1{,}05} + \frac{3000}{1{,}05^2} + \frac{3000}{1{,}05^3} + \cdots \frac{3000}{1{,}05^{10}}$$

$$= 7000 + 3000 . \frac{1 - 1{,}05^{-10}}{0{,}05} = 7000 + 3000 . 7{,}7217349$$

$$= 7000 + 23165{,}2047 = 30165{,}2047.$$

Zweite Auflösung. Die Werthe aller drei Anerbieten sind auf das Ende des zehnten Jahres zurückzubringen. Das Anerbieten von A ist demnach werth:

$$W_1 = 30600 . 1{,}05^{10} = 30600 . 1{,}6288946 = 49844{,}1775.$$

Das Anerbieten des B ist werth:

$$W_2 = 15000 . 1{,}05^{10} + 2000 . 1{,}05^9 + 2000 . 1{,}05^8 + 2000 . 1{,}05^7 \ldots + 2000$$
$$= 15000 . 1{,}05^{10} + 2000 . \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05}$$
$$= 15000 . 1{,}6288946 + 2000 . 12{,}5778925$$
$$= 24433{,}4194 + 25155{,}7850 = 49589{,}2044.$$

Das Anerbieten von C ist werth:

$$W_3 = 7000 . 1{,}05^{10} + 3000 . 1{,}05^9 + 3000 . 1{,}05^8 + 3000 . 1{,}05^7 + \ldots 3000$$
$$= 7000 . 1{,}05^{10} + 3000 . \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05}$$
$$= 7000 . 1{,}6288946 + 3000 . 12{,}5778925$$
$$= 11402{,}2623 + 37733{,}6776 = 49135{,}9399.$$

Dritte Auflösung. Man wähle irgend einen andern Zeitpunkt, etwa das Ende des fünften Jahres, und bringe den Werth der drei Anerbieten hierauf zurück. Man hat dann die Summen zu bestimmen, wozu die früher fälligen Kapitalien anwachsen und die später fälligen zu rabattiren.

Das Anerbieten des A ist am Ende des fünften Jahres werth:

$$W_1 = 30600 . 1{,}05^5 = 30600 . 1{,}2762816 = 39054{,}2158.$$

Das Anerbieten des B ist werth:

$$W_2 = 15000 . 1{,}05^5 + 2000 (1{,}05^4 + 1{,}05^3 + 1{,}05^2 + 1{,}05 + 1)$$
$$+ 2000 \left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2} + \ldots \frac{1}{1{,}05^5}\right)$$
$$= 15000 . 1{,}05^5 + 2000 . \frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05} + 2000 . \frac{1 - 1{,}05^{-5}}{0{,}05}$$
$$= 15000 . 1{,}2762816 + 2000 . 5{,}5256313 + 2000 . 4{,}3294767$$
$$= 19144{,}2234 + 11051{,}2625 + 8658{,}9533 = 38854{,}4392.$$

Das Anerbieten des C ist werth:

$$W_3 = 7000 . 1{,}05^5 + 3000 (1{,}05^4 + 1{,}05^3 + 1{,}05^2 + 1{,}05 + 1)$$
$$+ 3000 \left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2} + \ldots \frac{1}{1{,}05^5}\right)$$
$$= 7000 . 1{,}2762816 + 3000 . 5{,}5256313 + 3000 . 4{,}3294767$$
$$= 8933{,}9712 + 16576{,}8939 + 12988{,}4301 = 38499{,}2952.$$

Erste Auflösung zu b). Bringt man die angegebenen Summen mit einfachen Zinsen auf die Gegenwart zurück, so ist das Anerbieten von B jetzt werth:

$$W_2 = 15000 + \frac{2000}{1,05} + \frac{2000}{1,1} + \frac{2000}{1,15} + \dots \frac{2000}{1,5}$$

$$= 15000 + 2000 . 7,944949475$$

$$= 15000 + 15889,89895 = 30889,89895.$$

Das Anerbieten von C ist jetzt werth:

$$W_3 = 7000 + 3000\left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,15} + \dots \frac{1}{1,5}\right)$$

$$= 7000 + 3000 . 7,9449494755$$

$$= 7000 + 23834,848426 = 30834,8484.$$

Zweite Auflösung. Man bringe die Werthe sämmtlicher Anerbieten auf das Ende des zehnten Jahres zurück. Das Anerbieten von A ist dann werth:

$$S_1 = 30600 . 1,5 = 45900.$$

Das Anerbieten von B ist werth:

$$S_2 = 15000 . 1,5 + 2000 (1,45 + 1,4 + 1,35 + \dots 1,05 + 1)$$

$$= 15000 . 1,5 + 2000 \frac{2,45 . 10}{2} = 22500 + 24500$$

$$= 47000.$$

Das Anerbieten von C ist werth:

$$S_3 = 7000 . 1,5 + 3000 (1,45 + 1,4 + 1,35 + \dots 1,05 + 1)$$

$$= 7000 . 1,5 + 3000 . \frac{2,45 . 10}{2} = 10500 + 36750$$

$$= 47250.$$

Dritte Auflösung. Der Werth sämmtlicher Anerbieten ist auf das Ende des fünften Jahres zurückzubringen. Das Anerbieten von A ist dann werth:

$$S_1 = 30600 . 1,25 = 38250.$$

Das Anerbieten von B ist werth:

$$S_2 = 15000 \,.\, 1{,}25 + 2000(1{,}2 + 1{,}15 + 1{,}1 + 1{,}05 + 1)$$
$$+ 2000\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}1} + \dots \frac{1}{1{,}25}\right)$$
$$= 15000 \,.\, 1{,}25 + 2000 \cdot \frac{2{,}2 \,.\, 5}{2} + 2000 \,.\, 4{,}364370412$$
$$= 18750 + 11000 + 8728{,}74082$$
$$= 38478{,}7408.$$

Das Anerbieten von C ist werth:

$$S_3 = 7000 \,.\, 1{,}25 + 3000(1{,}2 + 1{,}15 + 1{,}1 + 1{,}05 + 1)$$
$$+ 3000\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}15} + \dots \frac{1}{1{,}25}\right)$$
$$= 7000 \,.\, 1{,}25 + 3000 \,.\, \frac{2{,}2}{2} \,.\, 5 + 3000 \,.\, 4{,}364370412$$
$$= 8750 + 16500 + 13093{,}1112$$
$$= 38343{,}1112.$$

Stellt man nun die erhaltenen Resultate zusammen, so ergibt sich Folgendes, und zwar nach der Rechnung mit Zinseszinsen:

	gegenwärt.	am Ende des 10. J.	am Ende des 5. J.
das Anerbieten von A ist werth	30600	49844,1775	39054,2158
das Anerbieten von B ist werth	30443,4698	49589,2044	38854,4392
das Anerbieten von C ist werth	30165,2047	49135,9399	38499,2952

Nach der Rechnung mit einfachen Zinsen:

	gegenwärt.	am Ende des 10. J.	am Ende des 5. J.
das Anerbieten von A ist werth	30600	45900	38250
das Anerbieten von B ist werth	30889,8989	47000	38478,7408
das Anerbieten von C ist werth	30834,8484	47250	38343,1112

Die drei aus der Zinszinsrechnung folgenden Auflösungen geben übereinstimmend die gleiche Antwort und erklären das Anerbieten des A für das vortheilhafteste und das des C für das schlechteste.

Die aus der Rechnung mit einfachen Zinsen folgenden Auflösungen widersprechen den frühern und unter sich selbst, denn jede Auflösung widerspricht der Aussage der andern. Dieser Umstand allein genügt, um ein gerechtes Misstrauen gegen die von ihr aufgestellten Resultate zu hegen.

Dass dieses Misstrauen ein begründetes ist, zeigt sich ganz deutlich, wenn man die Werthe, welche man durch beide Rechnungsarten für ein und dasselbe Anerbieten erhält, Schritt für Schritt einer Prüfung unterwirft und die etwas mühevolle Rechnung durchführt. Diess soll an dem Anerbieten des B geschehen, um später einer weitern derartigen Nachweisung überhoben zu sein, da sie ohnedem viel Raum einnimmt.

Da B 15000 baar zahlt, so ist zuerst der Werth von 15889,89895 (Werth des Anerbietens bei einfachen Zinsen) und dann der von 15443,469858 (Werth des Anerbietens bei Zinseszinsen) zu untersuchen.

1stes Jahr.	Stand des Guthabens	15889,89895
	Zins hinzu	794,49494
		16684,39389
	Zahlung ab	2000
2tes Jahr.	Stand des Guthabens	14684,39389
	Zins hinzu	734,21970
		15418,61359
	Zahlung ab	2000
3tes Jahr.	Stand des Guthabens	13418,61359
	Zins hinzu	670,93067
		14089,54426
	Zahlung ab	2000
4tes Jahr.	Stand des Guthabens	12089,54426
	Zins hinzu	604,47721
		12694,02147
	Zahlung ab	2000
5tes Jahr.	Stand des Guthabens	10694,02147
	Zins hinzu	534,70107
		11228,72254
	Zahlung ab	2000
6tes Jahr.	Stand des Guthabens	9228,72254
	Zins hinzu	461,43612
		9690,15866
	Zahlung ab	2000
		7690,15866

7tes Jahr.	Stand des Guthabens	7690,15866
	Zins hinzu	384,50793
		8074,66659
	Zahlung ab	2000
8tes Jahr.	Stand des Guthabens	6074,66659
	Zins hinzu	303.73332
		6378,39991
	Zahlung ab	2000
9tes Jahr.	Stand des Guthabens	4378,39991
	Zins hinzu	218,91999
		4597,31990
	Zahlung ab	2000
10tes Jahr.	Stand des Guthabens	2597,31990
	Zins hinzu	129,86599
		2727,18589
	Zahlung ab	2000
Ueberschuss am Ende des 10ten Jahrs		727,18589

Nach dieser Rechnung müsste sich sofort ein Ueberschuss von 727,185.... für den Verkäufer durch die Zahlungen des Schuldner von je 2000 am Ende eines jeden Jahrs ergeben.

Stellt man nun dieser Rechnung die folgende gegenüber, welche von dem Ergebniss der Zinszinsrechnung ausgeht, so erhält man:

1stes Jahr.	Stand des Guthabens	15443,469858
	Zins hinzu	772,173492
		16215,643350
	Zahlung ab	2000
2tes Jahr.	Stand des Guthabens	14215,643350
	Zins hinzu	710,782168
		14926,425518
	Zahlung ab	2000
3tes Jahr.	Stand des Guthabens	12926,425518
	Zins hinzu	646,321276
		13572,746794
	Zahlung ab	2000
4tes Jahr.	Stand des Guthabens	11572,746794
	Zins hinzu	578,637339
		12151,384133
	Zahlung ab	2000
5tes Jahr.	Stand des Guthabens	10151,384133
	Zins hinzu	507,569206
		10658,953339
	Zahlung ab	2000
		8658,953339

6tes Jahr.	Stand des Guthabens	8658,953339
	Zins hinzu	432,947667
		9091,901006
	Zahlung ab	2000
7tes Jahr.	Stand des Guthabens	7091,901006
	Zins hinzu	354,595050
		7446,496056
	Zahlung ab	2000
8tes Jahr.	Stand des Guthabens	5446,496056
	Zins hinzu	272,324803
		5718,820859
	Zahlung ab	2000
9tes Jahr.	Stand des Guthabens	3718,820859
	Zins hinzu	185,941043
		3904,761902
	Zahlung ab	2000
10tes Jahr.	Stand des Guthabens	1904,761902
	Zins hinzu	95,238095
		1999,99999
	Zahlung ab	2000
Rest	. . . .	0000,....

da 1999,99999 = 2000 ist. Hieraus zeigt sich, dass wenn Jemand in zehn auf einander folgenden Jahren je 2000 zahlt, der gegenwärtige Werth dieser Zahlungen gerade 15443,4698...., nicht mehr nicht weniger, beträgt, und dass diese Summe den wahren Werth sämmtlicher Zahlungen feststellt. Wenn nun die Rechnung mit einfachen Zinsen den gegenwärtigen Werth derselben Zahlungen zu 15889,8989.... angibt, so ist diese Angabe unrichtig und zu hoch. Der Verkäufer wird durch sie getäuscht und kommt offenbar, wenn er ihr vertraut, in Schaden.

§. 19.

Der Besitzer einer Fabrik fordert zum Eintritt in sein gut rentirendes Geschäft mit Einlage irgend einer Summe auf. Drei Anerbieten werden gemacht. A bietet die Einlage von 62500 gleich baar an und verpflichtet sich, wenn noch ein anderes oder mehrere Anerbieten erfolgen sollten, 1000 mehr als die höchst angebotene Summe einzulegen.

B bietet die Summe 20000 baar und am Ende eines jeden der folgenden 15 Jahre je 4000. C bietet die baare

Summe von 30500 und am Ende eines jeden der folgenden 15 Jahre je 3000.

Welches ist das vortheilhafteste Anerbieten und wie viel muss A aufzahlen, wenn der von ihm bezeichnete Fall eintritt und sein Anerbieten angenommen wird?

Die vorliegende Frage soll auch hier durch die Rechnung mit Zinseszinsen und einfachen Zinsen beantwortet, jedoch nur eine Auflösung statt dreier wie im vorigen Paragraphen gegeben werden, da die Differenz der verschiedenen Auflösungen im vorigen hinlänglich klar hervorgehoben wurde.

Auflösung durch die Rechnung mit Zinseszinsen:

Das Anbieten von B ist gegenwärtig werth:

$$R_1 = 20000 + 4000\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2} + \frac{1}{1{,}05^3} + \cdots \frac{1}{1{,}05^{15}}\right)$$

$$= 20000 + 4000 . \frac{1 - 1{,}05^{-15}}{0{,}05} = 20000 + 4000 . 10{,}3796580$$

$$= 20000 + 41518{,}6320 = 61518{,}632.$$

Das Anerbieten von C ist gegenwärtig werth:

$$R_2 = 30500 + 3000\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2} + \frac{1}{1{,}05^3} + \cdots \frac{1}{1{,}05^{15}}\right)$$

$$= 30500 + 3000 . 10{,}3796580$$

$$= 30500 + 31138{,}9740 = 61638{,}974.$$

Die Anerbieten ordnen sich wie folgt:

Werth des Anerbietens von A:	62500,
„ „ „ „ C:	61638,974,
„ „ „ „ B:	61518,632.

A muss hiernach noch 138,974 aufzahlen.

Auflösung durch die Rechnung mit einfachen Zinsen:

Das Anerbieten des B ist gegenwärtig werth:

$$R_1 = 20000 + 4000\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}15} + \cdots \frac{1}{1{,}75}\right)$$
$$= 20000 + 4000 . 10{,}980835237$$
$$= 20000 + 43923{,}3409 = 63923{,}3409.$$

Das Anerbieten von C ist gegenwärtig werth:

$$R_2 = 30500 + 3000\left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,15} + \dots \frac{1}{1,75}\right)$$
$$= 30500 + 3000 . 10,980835237$$
$$= 30500 + 32942,5057 = 63442,5057.$$

Die Anerbieten ordnen sich wie folgt:

Werth des Anerbietens von B:	63923,3409,
„ „ „ „ C:	63442,5057,
„ „ „ „ A:	62500.

A müsste hiernach noch 2423,3409 aufzahlen.

Auf ein zu verkaufendes Haus bietet A 21500 baar, B 4000 baar und viermal am Schlusse eines jeden Jahres je 4000 und am Ende des fünften Jahres 4100; C 4000 baar und siebenmal am Schlusse eines jeden Jahres 3000. Welches ist das vortheilhafteste Anerbieten bei 5 Procent Zinsen?

Auflösung durch die Rechnung mit Zinseszinsen, die in abgekürzter Form gegeben wird.

Das Anerbieten von B ist jetzt werth:

$$R_1 = 4000 + 4000 \cdot \frac{1 - 1,05^{-4}}{0,05} + \frac{4100}{1,05^5} = 21396,2594.$$

Das Anerbieten von C ist werth:

$$R_2 = 4000 + 3000 . \frac{1 - 1,05^{-7}}{0,05} = 21359,1202.$$

Die Anerbieten ordnen sich:

das von A ist werth:	21500,
„ „ B „ „	21396,2594,
„ „ C „ „	21359,1202.

Auflösung. Durch die Rechnung mit einfachen Zinsen.

Das Anerbieten von B ist werth:

$$R_1 = 4000 + 4000\left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,15} + \frac{1}{1,2}\right) + \frac{4100}{1,25}$$
$$= 21537,4813.$$

Das Anerbieten von C ist werth:

$$R_2 = 4000 + 3000\left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,15} + \cdots \frac{1}{1,35}\right) = 21623,0252.$$

Die Anerbieten ordnen sich in umgekehrter Reihenfolge:

das von	C	ist	werth:	21623,0250,
„ „	B	„	„	21537,4813,
„ „	A	„	„	21500.

§. 20.

Nun soll noch eine hieher gehörige Aufgabe, die aus Clausberg's „Demonstrativer Rechenkunst", S. 1230 genommen ist, deswegen hier, aber in veränderter Form und Auflösung mitgetheilt werden, weil sie Veranlassung zu einigen Bemerkungen gibt.

Auf ein zwangsweise zu veräusserndes Gut bietet A 18300 baar. B bietet 20000, nämlich 4000 baar und 16000 auf Fristen mit je 4000 jährlich in vier Jahren. C bietet 21000, und zwar 3000 baar und die übrigen 18000 in sechs Jahren 3000 jährlich. Welches ist das vortheilhafteste Anerbieten bei 5 Proc. Zinsen

a) bei Zinseszinsen?

b) bei einfachen Zinsen?

Auflösung zu a). Bringt man das Anerbieten des B auf die Gegenwart zurück, so erhält man:

$$R_2 = 4000 + \frac{4000}{1,05} + \frac{4000}{1,05^2} + \frac{4000}{1,05^3} + \frac{4000}{1,05^4}$$

$$= 4000 + 4000.\frac{1-1,05^{-4}}{0,05} = 4000 + 4000.3,5459505$$

$$= 4000 + 14183,8020 = 18183,802.$$

Das Anerbieten von C ist gegenwärtig werth:

$$R_3 = 3000 + 3000\left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,05^2} + \cdots \frac{1}{1,05^6}\right)$$

$$= 3000 + 3000\frac{1-1,05^{-6}}{0,05} = 3000 + 3000.5,0756921$$

$$= 3000 + 15227,0763 = 18227,0763.$$

Die Werthe der Anerbieten stellen sich so:

das Anerbieten von A ist werth: 18300,
„ „ „ C „ „ 18227,0763,
„ „ „ B „ „ 18183,8020.

Auflösung zu b). Bringt man den Werth des Anerbietens von B auf die Gegenwart zurück, so erhält man:

$$R_2 = 4000 + 4000\left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,15} + \frac{1}{1,2}\right)$$

$$= 4000 + 4000 . 3,564370412$$

$$= 4000 + 14257,481648 = 18257,4816.$$

Das Anerbieten des C ist gegenwärtig werth:

$$R_3 = 3000 + 3000\left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,15} + \cdots \frac{1}{1,3}\right)$$

$$= 3000 + 3000 . 5,133601181$$

$$= 3000 + 15400,8035 = 18400,8035.$$

Hiernach ordnen sich die Anerbieten in folgender Weise:

das Anerbieten von C ist werth: 18400,8035,
„ „ „ A „ „ 18300,
„ „ „ B „ „ 18257,4816.

Hiezu macht von Clausberg folgende Bemerkung S. 1233.: „Also siehet man aus vorigem Exempel nicht nur zweierlei Art Berechnungen, sondern auch zwei unterschiedene, ja ganz contraire Antworten. Denn nach der zweiten Art ist des C und nach der ersten des A Licitum am besten zu achten. Und habe ich solches Exempel mit Fleiss also eingerichtet, damit diejenigen ihren Irrthum hieraus desto deutlicher erkennen mögen, welche vermeinen, es wäre gleichviel, nach welcher von den gedachten zwei Arten die Ausrechnung angestellt würde, und käme nach beiden gleichwohl in puncto der Hauptfrage, welches Licitum nämlich am besten zu achten sei, einerlei Antwort."

Nun sollte man erwarten, dass Clausberg, veranlasst durch die von ihm hervorgehobenen Widersprüche, auf die Untersuchung der Frage eingehen würde, welche Rechnungsart als die richtige aufgestellt werden müsse, da der erste Schritt zur Untersuchung und Entscheidung gethan war. Diess geschieht aber nicht und er kommt, wie oben §. 2. angegeben ist (§. 1278) zu der eigen-

thümlichen Folgerung, dass die Rechtsgelehrten die angeregte Frage zu entscheiden haben. Schliesslich giebt er aber (§. 1279.) auf Befragen seine subjective Ansicht dahin ab, dass die Rechnung mit Zinseszinsen der andern vorzuziehen sei. Von Angabe der Gründe hiefür oder Aufstellung eines Beweises ist aber bei ihm und den spätern Schriftstellern, wie §. 2. gezeigt wurde, nicht die Rede.

§. 21.

Eine jährliche Rente von 2000 ist 25 Jahre lang am Ende der Jahre fällig. Es fragt sich: wie gross ist ihr gegenwärtiger Werth

a) wenn sie jährlich gezahlt und zu 4 Procent jährlich verzinst,

b) wenn sie jährlich gezahlt und halbjährlich verzinst,

c) wenn sie halbjährlich im halben Betrage (1000) gezahlt und halbjährlich verzinst wird?

Auflösung zu a). Sämmtliche Summen sind auf 25 Jahre mit Jahreszins zu rabattiren. Ihr gegenwärtiger Werth ist hiernach:

$$R_1 = \frac{2000}{1{,}04} + \frac{2000}{1{,}04^2} + \frac{2000}{1{,}04^3} + \dots \frac{2000}{1{,}04^{25}}$$

$$= 2000 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-25}}{0{,}04} = 2000 . 15{,}6220799$$

$$= 31244{,}1598 \dots$$

Auflösung zu b). Der halbjährliche Zinsfuss ist 2 Procent. Die am Ende des ersten Jahres fällige Summe muss auf zwei Halbjahre, die am Ende des zweiten fällige auf vier Halbjahre u. s. w., die am Ende des 25sten Jahres fällige Summe auf 50 Halbjahre rabattirt werden. Der gegenwärtige Werth sämmtlicher Summen ist daher unter diesen Voraussetzungen:

$$R_2 = \frac{2000}{1{,}02^2} + \frac{2000}{1{,}02^4} + \frac{2000}{1{,}02^6} + \dots \frac{2000}{1{,}02^{50}}$$

$$= 2000 . \frac{1 - 1{,}02^{-50}}{1{,}02^2 - 1} = 2000 . \frac{1 - 0{,}3715279}{1{,}0404 - 1}$$

$$= 2000 . \frac{0{,}6284721}{0{,}0404} = \frac{10000000 . 0{,}6284721}{202}$$

$$= 31112{,}481.$$

Der Besitzer der Rente bekommt weniger an Kapital oder die Rente ist wohlfeiler, denn die halbjährige Rabattirung erzeugt einen geringern Werth.

Auflösung zu c). Im dritten Falle ist die Hälfte der Jahresrente am Ende eines jeden halben Jahres fällig. Die Verzinsung geschieht also in diesem Falle auch halbjährlich. (No. 20. §. 3.) Die halbe Rente von 1000 wird daher 50mal ausgezahlt. Alle diese Summen müssen daher bei 2 Procent rabattirt werden. Man erhält dann:

$$R_3 = \frac{1000}{1,02} + \frac{1000}{1,02^2} + \frac{1000}{1,02^3} + \cdots \frac{1000}{1,02^{50}}$$
$$= 1000 \, \frac{1-1,02^{-50}}{0,02} = 1000 . 31,4236059$$
$$= 31423,6059.$$

Die erhaltenen Resultate ordnen sich so:

$$R_3 = 31423,6059$$
$$R_1 = 31244,1598$$
$$R_2 = 31112,481.$$

Man sieht hieraus, dass der Werth einer halbjährigen Rente im halben Betrage und bei halbjähriger Verzinsung vortheilhafter ist, als der einer ganzjährigen im doppelten Betrage bei jährlicher Verzinsung, und dieser selbst wieder vortheilhafter, als der einer ganzjährigen Rente bei halbjähriger Verzinsung.

Da aber ein einzelner Fall kein allgemeines Gesetz beweist, sondern höchstens andeutet, so soll die Richtigkeit des Gesagten für jeden Zinsfuss, jede Zahl der Jahre und jede beliebige Rente nachgewiesen werden.

Nennt man nun die Jahresrente K, den Zinsfuss p, die Zahl der Jahre n, so hat man für den gegenwärtigen Werth einer $n$jährigen Jahresrente K bei ganzjähriger Verzinsung:

$$1) \quad R_1 = \frac{K}{1,0p} + \frac{K}{1,0p^2} + \frac{K}{1,0p^3} + \cdots \frac{K}{1,0p^n}$$
$$= K . \frac{1-1,0p^{-n}}{0,0p} = \frac{K}{0,0p}(1 - \frac{1}{1,0p^n}).$$

Der gegenwärtige Werth derselben Rente bei halbjährlicher Verzinsung $\frac{p}{2} = p_1$ und ganzjähriger Zahlung bestimmt sich, da die Rentenbeträge in Halbjahren rabattirt werden müssen, durch:

$$2)\qquad R_2=\frac{K}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{K}{1{,}0p_1{}^4}+\frac{K}{1{,}0p_1{}^6}+\ldots\frac{K}{1{,}0p_1{}^{2n}}$$

$$=K.\frac{1-1{,}0p_1{}^{-2n}}{1{,}0p_1{}^2-1}=\frac{K}{1{,}0p_1{}^2-1}\left(1-\frac{1}{1{,}0p_1{}^{2n}}\right).$$

Bestimmt man nun den gegenwärtigen Werth einer $n$jährigen Rente, wenn der halbe Rentenbetrag $\frac{K}{2}=K_1$ jedes halbe Jahr ausgezahlt und verzinst wird, so hat man $2n$ Halbjahreszahlungen auf $2n$ Halbjahre im Zinsfuss $1{,}0p_1$ zu rabattiren, und erhält:

$$3)\qquad R_3=\frac{K_1}{1{,}0p_1}+\frac{K_1}{1{,}0p_1{}^2}+\frac{K_1}{1{,}0p_1{}^3}+\ldots\frac{K_1}{1{,}0p_1{}^{2n}}$$

$$=K_1\frac{1-1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p_1}=\frac{K_1}{0{,}0p_1}\left(1-\frac{1}{1{,}0p_1{}^{2n}}\right).$$

Nun ist zu beweisen, dass

$$R_3>R_1>R_2$$

ist. Dieser Beweis führt sich so: Die correspondirenden Glieder der Reihen in No. 1) und No. 2) haben die allgemeine Form:

$$\frac{K}{1{,}0p^r}\text{ und }\frac{K}{1{,}0p_1{}^{2r}}.$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass $\frac{K}{1{,}0p^r}>\frac{K}{1{,}0p_1{}^{2r}}$. Es ist nämlich:

$$1{,}0p=1+\frac{p}{100}$$

und

$$1{,}0p_1{}^2=\left(1+\frac{p}{2.100}\right)^2=1+2.\frac{p}{2.100}+\left(\frac{p}{2.100}\right)^2=1+\frac{p}{100}+\left(\frac{p}{2.100}\right)^2.$$

Es ist daher:

$$4)\qquad 1{,}0p_1{}^2>1{,}0p\text{ und um so mehr }(1{,}0p_1{}^2)^r>1{,}0p^r,$$

folglich ist umgekehrt bei der Division:

$$5)\qquad \frac{K}{1{,}0p^r}>\frac{K}{1{,}0p_1{}^{2r}}.$$

Da diess von allen correspondirenden Gliedern in No. 1) und 2) gilt, so ist auch die Summe aller Glieder in No. 1) grösser als die in No. 2), oder:

$$6)\qquad K.\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} > K.\frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{1{,}0p_1^2-1}$$

also

$$7)\qquad R_1 > R_2.$$

Um zu zeigen, dass $R_3 > R_1$ ist, hat man im Summenausdruck von No. 3) $K_1 = \frac{K}{2}$ und $0{,}0p_1 = \frac{0{,}0p}{2}$ einzuführen. Es entsteht hiedurch:

$$8)\qquad R_3 = \frac{\frac{1}{2}K}{\frac{1}{2}.0{,}0p}(1-\frac{1}{1{,}0p_1^{2n}}) = \frac{K}{0{,}0p}(1-\frac{1}{1{,}0p_1^{2n}}).$$

Vergleicht man diesen Werth mit No. 1), so erkennt man leicht mit Hülfe von No. 4) und 5), dass

$$9)\qquad \frac{K}{0{,}0p}(1-\frac{1}{1{,}0p_1^{2n}}) > \frac{K}{0{,}0p}(1-\frac{1}{1{,}0p^n})$$

ist, weil der eingeklammerte Ausdruck auf der linken Seite grösser ist, als der auf der rechten. Es ist also:

$$R_3 > R_1,$$

folglich in Verbindung mit No. 7):

$$R_3 > R_1 > R_2$$

oder

$$10)\qquad K_1.\frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{0{,}0p_1} > K.\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} > K.\frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{1{,}0p_1^2-1},$$

unter der Bedingung, dass $K_1 = \frac{1}{2}K$ und $p_1 = \frac{1}{2}p$ ist. Zugleich ist aus 10):

$$11)\qquad K_1.\frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{0{,}0p_1} > K.\frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{1{,}0p_1^2-1}.$$

Jemand hat über eine 25jährige Rente von 2000 zu verfügen. Er will sie sogleich flüssig machen, um das ihm zukommende Kapital sogleich verwenden zu können. Wie gross ist das flüssig werdende Kapital bei 5 Procent, wenn die oben angegebenen Reductionsmethoden angewendet werden?

Der gegenwärtige Werth bei jährlicher Zahlung und Verzinsung ist:

$$R_1 = 28187{,}8892,$$

bei halbjährlicher Verzinsung und jährlicher Zahlung:

$$R_2 = 28012{,}16,$$

bei halbjährlicher Zahlung der halben Rente und halbjährlicher Verzinsung

$$R_3 = 28362{,}3177.$$

Eine 50jährige Rente von 2000 hat unter denselben Voraussetzungen wie oben bei 4 Procent Rabatt folgende Werthe:

$$R_1 = 42964{,}3692,$$
$$R_2 = 42671{,}6352,$$
$$R_3 = 43098{,}3516.$$

§. 22.

Jemand hat eine Schuld von 40000 in 20 Jahren durch gleiche Summen mit 5 Procent Zinsen zurückzuzahlen. Es fragt sich: Welche Art der Zurückzahlung ist für ihn die vortheilhafteste?

a) Soll er sie in Jahresfristen und bei jährlicher Verzinsung,

b) soll er sie in Jahresfristen und bei halbjährlicher Verzinsung,

c) soll er sie in Halbjahresfristen und halbjährlicher Verzinsung zurückzahlen?

Auflösung zu a). Man nenne die zu bestimmende Summe, die er jährlich zur Tilgung der Schuld aufzuwenden hat, T_1. Diese Summe muss 20mal am Ende der folgenden Jahre gezahlt werden. Bestimmt man nun den gegenwärtigen Werth dieser 20 Zahlungen bei 5 Procent Zinsen, so muss derselbe der aufgenommenen Schuld gleich kommen. Man hat daher folgende Gleichung:

$$40000 = \frac{T_1}{1{,}05} + \frac{T_1}{1{,}05^2} + \frac{T_1}{1{,}05^3} + \ldots \frac{T_1}{1{,}05^{20}} = T_1 \frac{1 - 1{,}05^{-20}}{0{,}05}.$$

Hieraus bestimmt sich die gesuchte Summe:

$$T_1 = \frac{40000}{\frac{1 - 1{,}05^{-20}}{0{,}05}} = \frac{40000 . 0{,}05}{1 - 1{,}05^{-20}} = \frac{40000}{12{,}4622103},$$

$$\begin{aligned} \log 40000 &= 4{,}6020600 \\ \log 12{,}462210 &= 1{,}0955951 \\ &\overline{3{,}5064649}, \end{aligned}$$

$$T_1 = N.3{,}5064649 = 3209{,}704.$$

Durch die Zahlung von jährlichen 3209,704 wird unter der genannten Bedingung obige Schuld getilgt.

Auflösung zu b). Soll die Schuld in gleichen jährlichen Summen mit halbjährlicher Verzinsung getilgt werden, so ist der Halbjahreszins 2,5 Procent und man hat sämmtliche Jahreszahlungen durch 40 Halbjahre zu rabattiren. Der hieraus sich ergebende Werth ist der aufgenommenen Schuld gleich. Nennt man die jährlich zu zahlende Summe T_2, so hat man die Gleichung:

$$40000 = \frac{T_2}{1{,}025^2} + \frac{T_2}{1{,}025^4} + \frac{T_2}{1{,}025^3} + \dots \frac{T_2}{1{,}025^{40}} = T_2 . \frac{1 - 1{,}025^{-40}}{1{,}025^2 - 1},$$

und hieraus:

$$T_2 = \frac{40000\,(1{,}025^2 - 1)}{1 - 1{,}025^{-40}} = \frac{40000 . 0{,}050625}{1 - 0{,}3724306} = \frac{40000 . 0{,}050625}{0{,}6275694},$$

$$\begin{aligned} \log 40000 &= 4{,}6020600 \\ \log 0{,}050625 &= \underline{0{,}7043650 - 2} \\ & 3{,}3064250 \\ \log 0{,}6275694 &= \underline{0{,}7976618 - 1} \\ & 3{,}5087632, \end{aligned}$$

$$T_2 = N.3{,}5087632 = 3226{,}735.$$

Auflösung zu c). Wird die Schuld in Halbjahresfristen und bei halbjährlicher Verzinsung getilgt, so ist der Halbjahreszins 2,5 und es werden 40 gleiche Summen gezahlt. Nennt man diese Summen T_3 und rabattirt sie auf 40 Halbjahre, so muss ihr gegenwärtiger Werth der aufgenommenen Schuld gleich sein. Man erhält daher:

$$40000 = \frac{T_3}{1{,}025} + \frac{T_3}{1{,}025^2} + \frac{T_3}{1{,}025^3} + \dots \frac{T_3}{1{,}025^{40}} = T_3 . \frac{1 - 1{,}025^{-40}}{0{,}025},$$

und hieraus:

$$T_3 = \frac{40000}{\frac{1 - 1{,}025^{-40}}{0{,}025}} = \frac{40000}{25{,}1027751},$$

$$\begin{aligned} \log 40000 &= 4{,}6020600 \\ \log 25{,}102775 &= \underline{1{,}3997216} \\ & 3{,}2023384, \end{aligned}$$

$$T_3 = N.3{,}2023384 = 1593{,}450.$$

Er zahlt daher jährlich 3186,9.

Für den Schuldner ist es daher vortheilhafter, in halbjährlichen Summen zu zahlen; weniger vortheilhaft ist die jährliche Zahlung mit jährlicher Verzinsung (3209,704), am unvortheilhaftesten ist die jährliche Zahlung mit halbjährlicher Verzinsung (3226,735). Auch die hier gefundenen Resultate lassen sich leicht in's Allgemeine übertragen und gelten für jedes Kapital (K), jeden Zinsfuss p und jede Zahl der Jahre n.

Die Auflösung zu a) gibt daher bei jährlicher Verzinsung und Zahlung, wenn T_1 die zu entrichtende Jahreszahlung bezeichnet:

$$K = \frac{T_1}{1{,}0p} + \frac{T_1}{1{,}0p^2} + \frac{T_1}{1{,}0p^3} + \dots \frac{T_1}{1{,}0p^n} = T_1 \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p},$$

also:

$$1) \qquad T_1 = \frac{K}{\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}} = \frac{K.0{,}0p}{1 - 1{,}0p^{-n}}.$$

Bei halbjähriger Verzinsung $\frac{1}{2}p = p_1$ und jährlicher Zahlung ist:

$$K = \frac{T_2}{1{,}0p_1{}^2} + \frac{T_2}{1{,}0p_1{}^4} + \frac{T_2}{1{,}0p_1{}^6} + \dots \frac{T_2}{1{,}0p_1{}^{2n}} = T_2 \cdot \frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{1{,}0p_1{}^2 - 1},$$

also:

$$2) \qquad T_2 = \frac{K}{\frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{1{,}0p_1{}^2 - 1}} = K \cdot \frac{1{,}0p_1{}^2 - 1}{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}.$$

Bei halbjähriger Zahlung und Verzinsung ist:

$$K = \frac{T_3}{1{,}0p_1} + \frac{T_3}{1{,}0p_1{}^2} + \frac{T_3}{1{,}0p_1{}^3} + \dots \frac{T_3}{1{,}0p_1{}^{2n}} = T_3 \cdot \frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p_1},$$

also:

$$3) \qquad T_3 = \frac{K}{\frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p_1}} = K \cdot \frac{0{,}0p_1}{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}.$$

Da nun nach No. 6) §. 21.:

$$\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} > \frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{1{,}0p_1{}^2 - 1},$$

so ist aus No. 1) und 2) dieses Paragraphen:

$$4) \qquad K \cdot \frac{0{,}0p}{1 - 1{,}0p^{-n}} < K \cdot \frac{1{,}0p_1{}^2 - 1}{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}$$

oder

$$T_1 < T_2.$$

Da ferner aus No. 9) §. 21.:

$$\frac{1-1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p} > \frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p},$$

so erhält man, No. 3) doppelt genommen:

$$2.T_3 = K.\frac{2.0{,}0p_1}{1-1{,}0p_1{}^{-2n}} = K.\frac{0{,}0p}{1-1{,}0p_1{}^{-2n}} = \frac{K}{\frac{1-1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p}},$$

folglich hieraus und aus No. 2):

$$5)\qquad K.\frac{0{,}0p}{1-1{,}0p_1{}^{-2n}} < K.\frac{0{,}0p}{1-1{,}0p^{-n}}$$

oder $2T_3 < T_1$, wenn die Summe der jährlichen Zahlungen unter einander verglichen wird. Verbindet man No. 4) mit 5), so ist:

$$6)\qquad K.\frac{0{,}0p}{1-1{,}0p_1{}^{-2n}} < K.\frac{0{,}0p}{1-1{,}0p^{-n}} < K.\frac{1{,}0p_1{}^2-1}{1-1{,}0p_1{}^{-2n}}$$

oder

$$7)\qquad 2T_3 < T_1 < T_2.$$

Jemand will mit einem verfügbaren Kapital von 20000 eine 20jährige Rente kaufen. Wie gross ist ihr Werth bei 3,5, 4, 4,5, 5 Procent Zinsen.

Aus der Formel $T = \frac{K.0{,}0p}{1-1{,}0p^{-n}}$ erhält man

bei 3,5 Procent $T = 1407{,}545$,
bei 4 „ $T = 1471{,}635$,
bei 4,5 „ $T = 1537{,}523$,
bei 5 „ $T = 1604{,}852$.

Der höhere Zinsfuss bringt dem Käufer Vortheil, wie sich diess leicht nachweisen lässt, denn es ist nach den bisherigen Mittheilungen:

$$\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} > \frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q},$$

wenn $p < q$ ist, folglich erhält man, wenn man nach No. 1) den Werth der aus einem bestimmten Kapitale K zu kaufenden Jahresrente bei verschiedenem Zinsfuss darstellt:

$$K.\frac{0,0q}{1-1,0q^{-n}} > K.\frac{0,0p}{1-1,0p^{-n}},$$

wenn $q > p$ ist; d. h. der Werth der Rente wächst mit dem höheren Zinsfuss.

§. 23.

Jemand kann im Laufe der folgenden 20 Jahre jährlich die Summe 2000 bei 5 Procent Zinsen anlegen. Welche Art der Anlage ist die vortheilhafteste?

a) Soll er sie jährlich bei jährlicher Verzinsung,

b) soll er sie jährlich bei halbjährlicher Verzinsung,

c) soll er sie halbjährlich, also im halben Betrage, mit halbjährlicher Verzinsung anlegen?

Auflösung zu a). Geschieht die Anlage jährlich, so tragen die einzelnen Anlagen bis zu 19 Jahre Zinse. Der Werth sämmtlicher Anlagen ist daher im Augenblicke der letzten:

$$S_1 = 2000.1,05^{19} + 2000.1,05^{18} + 2000.1,05^{17} + \ldots. 2000$$

$$= 2000.\frac{1,05^{20}-1}{0,05} = 2000.33,0659541 = 66131,9082.$$

Auflösung zu b). Geschieht die Anlage jährlich und die Verzinsung halbjährlich, so tragen die einzelnen Anlagen der Reihe nach durch 38, 36, 34 Halbjahre u. s. w. Zinsen zu 2,5 Procent. Hiernach ist der Werth sämmtlicher Anlagen für den Zeitpunkt der letzten Anlage:

$$S_2 = 2000.1,025^{38} + 2000.1,025^{36} + 2000.1,025^{34} + \ldots. 2000$$

$$= 2000.\frac{1,025^{40}-1}{1,025^2-1} = 2000.\frac{2,6850638-1}{1,050625-1}$$

$$= \frac{2000.1,6850638}{0,050625},$$

$$\begin{aligned}
\log 2000 &= 3,3010300 \\
\log 1,6850638 &= \underline{0,2266164} \\
&\ 3,5276464 \\
\log 0,050625 &= \underline{0,7043650-2} \\
&\ 4,8232814,
\end{aligned}$$

$$S_2 = N.4,8232814 = 66570,423.$$

Auflösung zu c). Geschieht die Anlage halbjährlich im halben Betrage (1000), so sind die einzelnen Anlagen bis auf 39 Halbjahre im Zinsfusse 2,5 zu verzinsen. Hiernach ist der Werth sämmtlicher Anlage für den Zeitpunkt der letzten:

$$S_3 = 1000 . 1{,}025^{39} + 1000 . 1{,}025^{38} + 1000 . 1{,}025^{37} + \ldots 1000$$

$$= 1000 . \frac{1{,}025^{40} - 1}{0{,}025} = 1000 . 67{,}4025535 = 67402{,}5535.$$

Offenbar ist die halbjährliche Anlage mit halbem Betrage und halbjährlicher Verzinsung die vortheilhafteste Anlage, dann folgt die ganzjährige Anlage mit halbjährlicher Verzinsung und hierauf die ganzjährige mit jährlicher Verzinsung.

Auch diese Sätze lassen sich leicht allgemein nachweisen. Nennt man die jährliche Anlage K, den Zinsfuss p, die Zahl der Jahre n, wie früher, so ist die Summe, wozu n Jahreszahlungen bei jährlicher Verzinsung anwachsen:

$$1)\quad S_1 = K . 1{,}0p^{n-1} + K . 1{,}0p^{n-2} + K . 1{,}0p^{n-3} + \ldots K . 1{,}0p + K$$

$$= K \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}.$$

Bei jährlicher Anlage und halbjährlicher Verzinsung wachsen sie in n Jahren an zu der Summe:

$$2)$$

$$S_2 = K . 1{,}0p_1^{2n-2} + K . 1{,}0p_1^{2n-4} + K . 1{,}0p_1^{2n-6} + \ldots K . 1{,}0p_1^{2} + K$$

$$= K \cdot \frac{1{,}0p_1^{2n} - 1}{1{,}0p_1^{2} - 1}.$$

Bei halbjährlicher Anlage im halben Betrage wird jedesmal $\frac{1}{2}K = K_1$ angelegt und im halbjährlichen Zinsfuss $\frac{1}{2}p = p_1$ während $(2n-1)$ halben Jahren verzinst. Die Summe, wozu sämmtliche Anlagen hiernach erwachsen, ist:

$$3)$$

$$S_3 = K_1 . 1{,}0p_1^{2n-1} + K_1 . 1{,}0p_1^{2n-2} + K_1 . 1{,}0p_1^{2n-3} + \ldots K_1 . 1{,}0p_1 + K_1$$

$$= K_1 \cdot \frac{1{,}0p_1^{2n} - 1}{0{,}0p_1}.$$

Vergleicht man nun die in No. 1) — 3) erhaltenen Werthe unter einander, so haben die correspondirenden Glieder in den Reihen No. 1) und 2) die Form:

$$K.1{,}0p^r \text{ und } K.1{,}0p_1^{2r}.$$

Da nun nach No. 4) §. 21.:

$$1{,}0p_1^{2r} > 1{,}0p^r,$$

so erhält man aus No. 1) und 2) für die Summe aller dieser Glieder:

$$4)\qquad K.\frac{1{,}0p^n-1}{0{,}0p} < K.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{1{,}0p_1^2-1}$$

oder

$$S_1 < S_2.$$

Um die Werthe von No. 2) und 3) zu vergleichen, hat man Folgendes. Es ist aus 3):

$$S_3 = K_1.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{0{,}0p_1} = \frac{\frac{1}{2}K(1{,}0p_1^{2n}-1)}{\frac{1}{2}(0{,}0p)} = K.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{0{,}0p}.$$

Aus 2) ist:

$$S_2 = K.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{1{,}0p_1^2-1} = \frac{K(1{,}0p_1^{2n}-1)}{1+2.0{,}0p_1+0{,}0p_1^2-1} = K.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{0{,}0p+0{,}0p_1^2},$$

folglich ist:

$$K.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{0{,}0p+0{,}0p_1^2} < K.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{0{,}0p},$$

da $0{,}0p+0{,}0p_1^2 > 0{,}0p$ ist. Hieraus hat man:

$$5)\qquad K.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{1{,}0p_1^2-1} < K_1.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{0{,}0p_1}$$

oder $S_2 < S_3$. Aus der Verbindung von No. 4) und 5) ergibt sich:

$$6)\qquad K.\frac{1{,}0p^n-1}{0{,}0p} < K.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{1{,}0p_1^2-1} < K_1.\frac{1{,}0p_1^{2n}-1}{0{,}0p_1}$$

oder $S_1 < S_2 < S_3$, unter der Bedingung, dass $K_1 = \frac{1}{2}K$ und $p_1 = \frac{1}{2}p$ ist, was oben behauptet wurde. Beispiele hiefür lassen sich leicht in Menge aufstellen.

§. 24.

Eine 20jährige Rente von 2000, die auf den Zinsfuss 4 berechnet ist, soll in eine Rente von gleicher Dauer umgewandelt werden, die auf den Zinsfuss 5 berechnet wird. Wie gross ist letztere

a) wenn sie jährlich ausgezahlt und verzinst,

b) wenn sie jährlich ausgezahlt und halbjährlich verzinst,

c) wenn sie halbjährlich im halben Betrage ausgezahlt und halbjährlich verzinst wird?

Auflösung zu a). Man bestimme den gegenwärtigen Werth der Rente bei 4 Procent. Er ist:

$$R_1 = \frac{2000}{1{,}04} + \frac{2000}{1{,}04^2} + \frac{2000}{1{,}04^3} + \cdots \frac{2000}{1{,}04^{20}}$$

$$= 2000 . \frac{1 - 1{,}04^{-20}}{0{,}04} = 2000 . 13{,}5903263$$

$$= 27180{,}6526.$$

Nun verwandle man diese Summe in eine 20jährige Rente bei dem Zinsfuss 5. Nennt man die fragliche Rente T_1, so hat man:

$$27180{,}6526 = \frac{T_1}{1{,}05} + \frac{T_1}{1{,}05^2} + \frac{T_1}{1{,}05^3} + \cdots \frac{T_1}{1{,}05^{20}} = T_1 . \frac{1 - 1{,}05^{-20}}{0{,}05},$$

und hieraus:

$$T_1 = \frac{27180{,}6526}{\frac{1 - 1{,}05^{-20}}{0{,}05}} = \frac{27180{,}6526}{12{,}4622103},$$

$$\begin{aligned} \log 27180{,}652 &= 4{,}434\,2598 \\ \log 12{,}462210 &= 1{,}095\,5954 \\ &\overline{ 3{,}338\,6644,} \end{aligned}$$

$$T_1 = N . 3{,}3386644 = 2181{,}043.$$

Allgemeine Auflösung. Nennt man die gegebene Rente K, die Zahl der Jahre n, den Zinsfuss p, so ist ihr gegenwärtiger Werth:

$$1) \quad R_1 = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}0p^2} + \frac{K}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{K}{1{,}0p^n} = K . \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

Nennt man den Zinsfuss, in welchen sie umgesetzt werden soll, q, und die zu bestimmende Rente T_1, so hat man den Werth R_1 in eine $n$jährige Rente für den Zinsfuss überzutragen. Man erhält:

$$R_1 = \frac{T_1}{1{,}0q} + \frac{T_1}{1{,}0q^2} + \frac{T_1}{1{,}0q^3} + \cdots \frac{T_1}{1{,}0q^n} = T_1 . \frac{1 - 1{,}0q^{-n}}{0{,}0q}.$$

Hieraus wird:

$$2)\qquad T_1 = \frac{R_1}{\frac{1-1,0q^{-n}}{0,0q}} = K.\frac{1-1,0p^{-n}}{0,0p}.\frac{0,0q}{1-1,0q^{-n}},$$

wenn der Werth für R_1 aus No. 1) eingeführt wird.

Auflösung zu b). Der gegenwärtige Werth dieser Rente ist, wenn halbjährlich im halbjährlichen Zinsfuss $\frac{1}{2}4=2$ rabattirt wird:

$$R_2 = \frac{2000}{1,02^2} + \frac{2000}{1,02^4} + \frac{2000}{1,02^6} + \dots \frac{2000}{1,02^{40}}$$

$$= 2000.\frac{1-1,02^{-40}}{1,02^2-1} = 2000.\frac{1-0,4528904}{1,0404-1}$$

$$= 2000.\frac{0,5471096}{0,0404} = \frac{547,109585}{0,0202}$$

$$= 27084,6329.$$

Nennt man den Werth einer 5procentigen gleich lange dauernden Rente T_2, so gibt bei halbjähriger Verzinsung die Umwandlung:

$$27084,6329 = \frac{T_2}{1,025^2} + \frac{T_2}{1,025^4} + \frac{T_2}{1,025^6} + \dots \frac{T_2}{1,025^{40}} = T_2.\frac{1-1,025^{-40}}{1,025^2-1},$$

also:

$$T_2 = \frac{27084,6329(1,025^2-1)}{1-1,025^{-40}} = \frac{27084,632.0,050625}{1-0,3724306}$$

$$= \frac{27084,6329.0,050625}{0,6275694},$$

$$\begin{aligned} \log 27084,632 &= 4,4327229 \\ \log 0,050625 &= \underline{0,7043650-2} \\ &\ 3,1370879 \\ \log 0,6275694 &= \underline{0,7976618-1} \\ &\ 3,3394261, \end{aligned}$$

$$T_2 = N.3,3394261 = 2184,8725.$$

Allgemeine Auflösung. Nennt man die Rente wie oben K, den halbjährigen Zinsfuss $\frac{1}{2}p = p_1$, so ist ihr gegenwärtiger Werth:

$$3)$$

$$R_2 = \frac{K}{1,0p_1{}^2} + \frac{K}{1,0p_1{}^4} + \frac{K}{1,0p_1{}^6} + \dots \frac{K}{1,0p_1{}^{2n}} = K.\frac{1-1,0p_1{}^{-2n}}{1,0p_1{}^2-1}.$$

Wird dieser Werth unter den gleichen Bedingungen in eine Rente für den Zinsfuss q umgewandelt, so hat man, wenn die zu bestimmende Rente T_2' genannt wird:

$$R_2 = \frac{T_2}{1{,}0q_1{}^2} + \frac{T_2}{1{,}0q_1{}^4} + \frac{T_2}{1{,}0q_1{}^6} + \dots \frac{T_2}{1{,}0q_1{}^{2n}} = T_2 \cdot \frac{1-1{,}0q_1{}^{-2n}}{1{,}0q_1{}^2-1},$$

also:

$$4)\qquad T_2 = \frac{R_2(1{,}0q_1{}^2-1)}{1-1{,}0q_1{}^{-2n}} = K \cdot \frac{(1-1{,}0p_1{}^{-2n})(1{,}0q_1{}^2-1)}{(1{,}0p_1{}^2-1)(1-1{,}0q_1{}^{-2n})}.$$

Auflösung zu c). Man bestimme den gegenwärtigen Werth der Rente im halben Betrage (1000) und im halbjährigen Zinsfuss. Man erhält:

$$R_3 = \frac{1000}{1{,}02} + \frac{1000}{1{,}02^2} + \frac{1000}{1{,}02^3} + \dots \frac{1000}{1{,}02^{40}}$$

$$= 1000 \cdot \frac{1-1{,}02^{-40}}{0{,}02} = 1000 \cdot 27{,}3554792 = 27355{,}4792.$$

Nun verwandle man diesen Kapitalwerth in eine 20jährige, halbjährlich fällige Rente bei dem Zinsfuss 2,5. Es entsteht, wenn man die zu bestimmende Rente T_3 nennt:

$$27355{,}4792 = \frac{T_3}{1{,}025} + \frac{T_3}{1{,}025^2} + \frac{T_3}{1{,}025^3} + \dots \frac{T_3}{1{,}025^{40}} = T_3 \cdot \frac{1-1{,}025^{-40}}{0{,}025}.$$

Hieraus wird:

$$T_3 = \frac{27355{,}4792}{\frac{1-1{,}025^{-40}}{0{,}025}} = \frac{27355{,}4792}{25{,}1027751},$$

$$\log 27355{,}4792 = 4{,}4370443$$
$$\log 25{,}102775 = 1{,}3997216$$
$$\overline{3{,}0373227},$$

$$T_3 = N \cdot 3{,}0373227 = 1089{,}739.$$

Allgemeine Auflösung. Der gegenwärtige Werth einer halbjährlich fälligen $n$jährigen Rente im halben Betrage $\frac{1}{2}K = K_1$ bei dem Zinsfuss $\frac{1}{2}p = p_1$ ist:

$$5)$$

$$R_3 = \frac{K_1}{1{,}0p_1} + \frac{K_1}{1{,}0p_1{}^2} + \frac{K_1}{1{,}0p_1{}^3} + \dots \frac{K_1}{1{,}0p_1{}^{2n}} = K_1 \cdot \frac{1-1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p_1}.$$

Wird dieser Werth in eine gleich lang dauernde, halbjährlich

fällige Rente bei dem Zinsfuss q verwandelt, so ist, wenn der Werth dieser Rente T_3 genannt wird:

$$R_3 = \frac{T_3}{1{,}0q_1} + \frac{T_3}{1{,}0q_1^{\,2}} + \frac{T_3}{1{,}0q_1^{\,3}} + \ldots \frac{T_3}{1{,}0q_1^{\,2n}} = T_3 . \frac{1 - 1{,}0q_1^{\,-2n}}{0{,}0q_1},$$

und hieraus:

$$6) \qquad T_3' = \frac{R_3}{\frac{1 - 1{,}0q_1^{\,-2n}}{0{,}0q_1}} = K . \frac{(1 - 1{,}0p_1^{\,-2n}) . 0{,}0q_1}{0{,}0p_1 (1 - 1{,}0q_1^{\,-2n})},$$

wenn der Werth aus No. 5) eingeführt wird.

Eine 20jährige, jährlich fällige Rente von 2000, die auf den Zinsfuss 3,5 berechnet ist, soll in eine gleich lang dauernde vierprocentige umgewandelt werden. Wie gross ist ihr Werth?

$$T = 2000 \cdot \frac{1 - 1{,}035^{-20}}{0{,}035} \cdot \frac{0{,}04}{1 - 1{,}04^{-20}} = 2091{,}547.$$

Jemand hat eine 18jährige, jährlich fällige Rente von 1800 bei 3,5 Procent unter der Bedingung gekauft, dass sie ihm als eine 4procentige von gleicher Dauer ausgezahlt werde. Wie hoch stellt sich ihr Betrag?

$$T = 1875{,}414.$$

§. 25.

Eine vierprocentige, 20jährige Rente von 2000 soll nach dem Wunsche des Besitzers in eine 16jährige bei demselben Zinsfuss verwandelt werden. Wie gross ist der Werth der letztern

a) bei jährlicher Zahlung und Verzinsung?

b) bei jährlicher Zahlung und halbjährlicher Verzinsung?

c) bei halbjährlicher Zahlung im halben Betrage und halbjährlicher Verzinsung?

Man hat, um die vorstehende Frage zu beantworten, zuerst unter den angegebenen Bedingungen den gegenwärtigen Werth der Rente zu bestimmen und dann diesen Werth unter denselben Bedingungen in eine 16jährige umzuwandeln. Da der erste Theil schon im §. 24. beantwortet wurde, so können die dort gefundenen Werthe hier benutzt werden.

Auflösung zu a). Der gegenwärtige Werth der Rente ist nach §. 24.:

$$R_1 = 27180{,}6526.$$

Nennt man den Werth der 16jährigen Rente T_1, so hat man nach dem Vorgange von §. 24:

$$27180{,}6526 = \frac{T_1}{1{,}04} + \frac{T_1}{1{,}04^2} + \frac{T_1}{1{,}04^3} + \ldots \frac{T_1}{1{,}04^{16}} = T_1 \cdot \frac{1-1{,}04^{16}}{0{,}04},$$

und hieraus:

$$T_1 = \frac{27180{,}6526}{\frac{1-1{,}04^{-16}}{0{,}04}} = \frac{27180{,}6526}{11{,}6522956},$$

$$\log 27180{,}652 = 4{,}4342598$$
$$\log 11{,}652295 = \underline{1{,}0664114}$$
$$3{,}3678484,$$

$$T_1 = N.3{,}3678484 = 2332{,}644.$$

Auflösung zu b). Der gegenwärtige Werth der Rente ist nach §. 24.:

$$R_2 = 27084{,}6329.$$

Nennt man den Werth einer 16jährigen, halbjährlich zu verzinsenden Rente T_2, so gibt die Umwandlung:

$$27084{,}6329 = \frac{T_2}{1{,}02^2} + \frac{T_2}{1{,}02^4} + \frac{T_2}{1{,}02^6} + \ldots \frac{T_2}{1{,}02^{32}} = T_2 \cdot \frac{1-1{,}02^{-32}}{1{,}02^2-1},$$

und hieraus:

$$T_2 = \frac{27084{,}6329\,(1{,}02^2-1)}{1-1{,}02^{-32}} = \frac{27084{,}6329\,(1{,}0404-1)}{1-0{,}5306333}$$

$$= \frac{27084{,}6329 \,.\, 0{,}0404}{0{,}4693667},$$

$$\log 27084{,}6329 = 4{,}4327229$$
$$\log 0{,}0404 = \underline{0{,}6063814-2}$$
$$3{,}0391043$$
$$\log 0{,}4693667 = \underline{0{,}6715122-1}$$
$$3{,}3675921,$$

$$T_2 = N.3{,}3675921 = 2331{,}267.$$

Auflösung zu c). Der gegenwärtige Werth dieser Rente ist nach §. 24.:

$$R_3 = 27355{,}4792.$$

Nennt man den Werth einer 16jährigen, halbjährlich zu zahlenden und zu verzinsenden Rente T_3, so ist:

$$27355{,}4792 = \frac{T_3}{1{,}02} + \frac{T_3}{1{,}02^2} + \frac{T_3}{1{,}02^3} + \dots \frac{T_3}{1{,}02^{32}} = T_3 \cdot \frac{1-1{,}02^{-32}}{0{,}02},$$

und hieraus:

$$T_3 = \frac{27355{,}4792}{\frac{1-1{,}02^{-32}}{0{,}02}} = \frac{27355{,}4792}{23{,}4683348},$$

$$\begin{aligned} \log 27355{,}4792 &= 4{,}4370443 \\ \log 23{,}4683348 &= 1{,}3704822 \\ &\overline{3{,}0665621}, \end{aligned}$$

$$T_3 = N.\,3{,}0665621 = 1165{,}634.$$

Die allgemeine Auflösung dieser Fragen ergibt sich, wenn man die gegebene Rente K, die Zahl der Jahre, worin sie fällig ist, n, den Zinsfuss p und die Zahl der Jahre, während welcher die umzuwandelnde gezahlt werden soll, m nennt, auf folgende Weise.

Allgemeine Auflösung zu a). Der gegenwärtige Werth dieser Rente ist nach No. 1) §. 24.:

$$R_1 = K \cdot \frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

Nennt man den Werth der durch m Jahre zu zahlenden und jährlich zu verzinsenden Rente T_1, so hat man:

$$R_1 = \frac{T_1}{1{,}0p} + \frac{T_1}{1{,}0p^2} + \frac{T_3}{1{,}0p^3} + \dots \frac{T_1}{1{,}0p^m} = T_1 \cdot \frac{1-1{,}0p^{-m}}{0{,}0p},$$

und hieraus:

$$1) \qquad T_1 = \frac{R_1}{\frac{1-1{,}0p^{-m}}{0{,}0p}} = K \cdot \frac{1-1{,}0p^{-n}}{1-1{,}0p^{-m}}.$$

Allgemeine Auflösung zu b). Der gegenwärtige Werth dieser Rente ist nach No. 3) §. 24.:

$$R_2 = K \cdot \frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{1{,}0p_1^{\,2}-1}.$$

Wird dieser Werth in eine $m$jährige unter denselben Bedingungen umgewandelt, so entsteht, wenn man den Werth derselben T_2 nennt:

$$R_2 = \frac{T_2}{1{,}0p_1{}^2} + \frac{T_2}{1{,}0p_1{}^4} + \frac{T_2}{1{,}0p_1{}^6} + \ldots \frac{T_2}{1{,}0p_1{}^{2m}} = T_2 \cdot \frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2m}}{1{,}0p_1{}^2 - 1},$$

und hieraus:

$$2) \qquad T_2 = \frac{R_2}{\frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2m}}{1{,}0p_1{}^2 - 1}} = K \cdot \frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{1 - 1{,}0p_1{}^{-2m}}.$$

Allgemeine Auflösung zu c). Der gegenwärtige Werth dieser Rente im halben Betrage K_1 ist nach No. 5) §. 24.:

$$R_3 = K_1 \cdot \frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{0{,}0p_1}.$$

Wird dieser Werth in eine $m$jährige, halbjährlich fällige umgewandelt, so erhält man, wenn ihr Werth T_3 genannt wird:

$$R_3 = \frac{T_3}{1{,}0p_1} + \frac{T_3}{1{,}0p_1{}^2} + \frac{T_3}{1{,}0p_1{}^3} + \ldots \frac{T_3}{1{,}0p_1{}^{2m}} = T_3 \cdot \frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2m}}{0{,}0p_1},$$

und hieraus:

$$3) \qquad T_3 = \frac{R_3}{\frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2m}}{0{,}0p_1}} = K_1 \cdot \frac{1 - 1{,}0p_1{}^{-2n}}{1 - 1{,}0p_1{}^{-2m}}.$$

Die in den §§. 21.—25. angeführten Aufgaben wurden aus dem Grunde in der angegebenen Weise aufgestellt, um zu zeigen, welchen Einfluss die Art der Zahlung und Verzinsung auf den Werth der Kapitalien und Renten äussert. Er ist, wie man sieht, von Bedeutung. Da diese Behandlungsweise gezeigt ist und ihre Anwendung keine weitere Schwierigkeit im vorkommenden Falle bietet, so wird sie später nicht weiter berücksichtigt werden. Die Auflösungen selbst werden im Folgenden in etwas abgekürzter Form gegeben werden.

§. 26.

Der Besitzer einer 4procentigen Jahresrente von 2000 und 20jähriger Dauer wünscht, dass dieselbe in eine Jahresrente von 16jähriger Dauer bei 4,5 Procent umgewandelt werde. Wie gross ist letztere?

Auflösung. Der gegenwärtige Werth dieser Rente ist nach §. 24.:

$$R = 2000 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-20}}{0{,}04} = 27180{,}6526.$$

Diesen Werth verwandle man in eine 16jährige Jahresrente T bei dem Zinsfusse 4,5. Man erhält:

$$R = \frac{T}{1{,}045} + \frac{T}{1{,}045^2} + \frac{T}{1{,}045^3} + \dots \frac{T}{1{,}045^{16}} = T.\frac{1-1{,}045^{-16}}{0{,}045},$$

und hieraus:

$$T = \frac{R}{\frac{1-1{,}045^{-16}}{0{,}045}} = \frac{27180{,}6526}{11{,}2340150},$$

$$\begin{aligned} \lg 27180{,}6526 &= 4{,}4342598 \\ \lg 11{,}234015 &= 1{,}0505349 \\ &\overline{3{,}3837249} \end{aligned}$$

$$T = N.3{,}3837249 = 2419{,}496.$$

Allgemeine Auflösung. Ist der Betrag der Jahresrente K, die Zahl der Jahre n, der Zinsfuss p, so ist der gegenwärtige Werth derselben nach No. 1) §. 24.:

$$R_1 = K.\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

Nennt man den Werth der umzuwandelnden Rente T, die Zahl der Jahre m, den Zinsfuss q, so hat man für die Umwandlung:

$$R_1 = \frac{T}{1{,}0q} + \frac{T}{1{,}0q^2} + \frac{T}{1{,}0q^3} + \dots \frac{T}{1{,}0q^m} = T.\frac{1-1{,}0q^{-m}}{0{,}0q},$$

und hieraus:

$$1) \qquad T = \frac{R_1}{\frac{1-1{,}0q^{-m}}{0{,}0q}} = K.\frac{(1-1{,}0p^{-n}).0{,}0q}{0{,}0p(1-1{,}0q^{-m})}.$$

Jemand besitzt eine 4procentige Rente von 2400 und 24jähriger Dauer, die er unter der Bedingung gekauft hat, dass er bei Aenderung des Zinsfusses entweder die Auszahlung des noch rückständigen Kapitals oder die Umwandlung der Rente fordern könne. Nach Umlauf von 4 Jahren steigt der Zinsfuss auf 4,5 Procent. Wie gross ist im ersten Fall das auszuzahlende Kapital? Wie gross im zweiten die künftig auszuzahlende Rente?

Auflösung. Die auszuzahlende Summe entspricht dem gegenwärtigen Werth einer 20jährigen vierprocentigen Rente von 2400. Sie ist:

$$R = 2400 \cdot \frac{1-1{,}04^{-20}}{0{,}04} = 2400 . 13{,}5903263$$

$$= 32616{,}7831.$$

Wird diese Summe in eine 20jährige Rente bei 4,5 Procent verwandelt, so entsteht nach No. 1):

$$T = \frac{32616{,}7831}{\frac{1-1{,}045^{-20}}{0{,}045}} = \frac{32616{,}7831}{13{,}0079365},$$

$$\begin{aligned} \lg 32616{,}7831 &= 4{,}5134411 \\ \lg 13{,}007936 &= 1{,}1142084 \\ &\overline{3{,}3992327} \end{aligned}$$

$$T = N . 3{,}3992327 = 2507{,}452.$$

Die allgemeine Auflösung hiefür ergibt sich auf gleiche Weise, wenn K der Betrag der auf n Jahre gekauften Rente, p der ursprüngliche Zinsfuss, r die Zahl der Jahre, worin sie ausgezahlt wurde, q der umgeänderte Zinsfuss ist. Man erhält nach dem Vorgange von No. 1):

$$R = K \cdot \frac{1-1{,}0p^{-(n-r)}}{0{,}0p} = K . \frac{1-1{,}0p^{-n+r}}{0{,}0p}$$

und

$$2) \qquad T = \frac{R}{\frac{1-1{,}0q^{-(n-r)}}{0{,}0q}} = K . \frac{(1-1{,}0p^{-n+r})0{,}0q}{0{,}0p(1-1{,}0q^{-n+r})}.$$

Eine 5procentige Jahresrente von 3000 und 25jähriger Dauer wurde unter der Bedingung erkauft, dass bei Aenderung des Zinsfusses die Wahl freistehe, entweder das rückständige Kapital in Empfang zu nehmen, oder die Rente in eine dem Zinsfuss entsprechende umwandeln zu lassen. Nach Umfluss von 5 Jahren fällt der Zinsfuss auf 4,5. Wie gross ist im ersten Falle das rückständige Kapital? Wie gross ist im zweiten die künftig zu beziehende Rente, wenn sie bei dem Zinsfuss 4,5 wieder in eine 25jährige umgewandelt werden soll?

Auflösung: Da 5 Jahre verflossen sind, so ist die Rente nur noch 20 Jahre auszuzahlen. Ihr Werth ist daher

$$R = 3000 \cdot \frac{1-1{,}05^{-20}}{0{,}05} = 3000 . 12{,}4622103$$
$$= 37386{,}6309$$

und diess ist der Werth des auszuzahlenden Kapitals. Soll nun dieses Kapital in eine 25jährige Rente bei dem Zinsfuss 4,5 umgewandelt werden, so hat man

$$T = \frac{R}{\frac{1-1{,}045^{-20}}{0{,}045}} = \frac{37386{,}6309}{14{,}8282090},$$

$$\lg 37386{,}6309 = 4{,}5727163$$
$$\lg 14{,}8282090 = 1{,}1710887$$
$$3{,}4016276$$

$$T = N . 3{,}4016276 = 2521{,}318.$$

Die allgemeine Auflösung ergibt sich leicht auf folgende Weise. Das auszuzahlende Kapital ist, wenn die nämlichen Bezeichnungen wie bei No. 2) beibehalten werden:

$$3) \qquad R = K \cdot \frac{1-1{,}0p^{-(n-r)}}{0{,}0p} = K . \frac{1-1{,}0p^{-n+r}}{0{,}0p}.$$

Soll nun dieses Kapital in eine $m$jährige Rente bei dem Zinsfuss q umgewandelt werden, so hat man, wenn die zu bestimmende Rente T genannt wird:

$$R = T \cdot \frac{1-1{,}0q^{-m}}{0{,}0p},$$

und hieraus:

$$4) \qquad T = \frac{R}{\frac{1-1{,}0q^{-m}}{0{,}0q}} = K \cdot \frac{(1-1{,}0p^{-n+r}) . 0{,}0q}{0{,}0p . (1-1{,}0q^{-m})}.$$

§. 27.

Eine 30jährige Rente im Betrage von 2500 wurde zu dem Zinsfuss 4 gekauft. Der Käufer behielt sich das Recht der Umwandlung vor, wenn der Zinsfuss sich ändern sollte und das Recht der Heimzahlung an seine Erben im Falle seines Todes. Nach 5 Jahren hebt sich der Zinsfuss auf 4,5 Procent. Die Rente wurde auf Verlangen des Besitzers in eine 4,5procentige umgewandelt. Nach weitern 5 Jahren stirbt der Besitzer,

und seine Erben verlangen die Auszahlung des rückständigen Kapitals. Wie gross war das ursprünglich angelegte Kapital? Wie gross die umgewandelte Rente? Welche Summe muss den Erben ausgezahlt werden? Wie gross wäre sie gewesen, wenn die Umwandlung nicht geschehen wäre?

Auflösung. Das Kapital, womit die 30jährige Rente von 2500 bei 4 Procent angekauft wurde, ist:

$$R = 2500 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-30}}{0{,}04} = 2500 \times 17{,}2920333$$
$$= 43230{,}0832.$$

Der Werth der umgewandelten Rente, die nach 5 Jahren erfolgt, ergibt sich, wenn man den Werth einer 4procentigen Rente von 25jähriger Dauer ermittelt. Er ist:

$$R = 2500 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-25}}{0{,}04} = 2500 \times 15{,}6220799$$
$$= 39055{,}1998.$$

Nennt man den Werth der in den Zinsfuss 4,5 umgesetzten Rente T, so ist derselbe für eine Dauer von 25 Jahren:

$$T = \frac{R}{\frac{1 - 1{,}045^{-25}}{0{,}045}} = \frac{39055{,}1998}{14{,}8282090},$$

$$\begin{aligned} \lg 39055{,}199 &= 4{,}5916788 \\ \lg 14{,}828209 &= \underline{1{,}1710888} \\ & 3{,}4205900 \end{aligned}$$

$$T = N.3{,}4205900 = 2633{,}844.$$

Der Werth des den Erben auszuzahlenden Kapitals ergibt sich, da der Tod nach weitern 5 Jahren erfolgt, wenn man den Werth einer 20jährigen Rente im obigen Betrage bestimmt. Er ist:

$$R_1 = 2633{,}844 . \frac{1 - 1{,}045^{-20}}{0{,}045} = 2633{,}844 \times 13{,}0079365,$$

$$\begin{aligned} \lg 2633{,}844 &= 3{,}4205900 \\ \lg 13{,}007936 &= \underline{1{,}1142084} \\ & 4{,}5347984 \end{aligned}$$

$$R_1 = N . 4{,}5347984 = 34260{,}88.$$

Das Kapital, welches den Erben ohne erfolgte Umwandlung

hätte ausgezahlt werden müssen, findet man, wenn der Werth einer 20jähriges Rente von 2500 im ursprünglichen Zinsfuss ermittelt wird und ist:

$$R_2 = 2500 \frac{1 - 1{,}04^{-20}}{0{,}04} = 2500 \times 13{,}5903263 = 33975{,}8158.$$

Bei dem Kaufe einer 20jährigen Rente von 1850, die auf den Zinsfuss 3,5 berechnet ist, wurde bedungen, dass jeweils auf Verlangen das rückständige Kapital ausgezahlt werde. Nach 6 Jahren verlangt der Käufer die Auszahlung. Wieviel muss ausgeliefert werden?

$$R_1 = 1850 \cdot \frac{1 - 1{,}035^{-14}}{0{,}035} = 20202{,}9625 \cdot$$

Eine 25jährige Rente von 2360 wurde zu 4 Procent unter der Bedingung gekauft, dass bei dem vor dem Schlusse des Rentengenuss eintretenden Tode des Käufers das noch nicht aufgezehrte Kapital den Erben unbelastet ausgezahlt werde. Der Käufer stirbt nach 13 Jahren. Welches Kapital haben die Erben anzusprechen?

$$R = 22148{,}7740.$$

Unter den gleichen Bedingungen wurde eine 22jährige Rente von 2000 gekauft. Der Besitzer stirbt nach 10 Jahren. Das den Erben auszuzahlende Kapital ist:

$$R_1 = 2000 \cdot \frac{1 - 1{,}04^{-12}}{0{,}04} = 18770{,}1476,$$

die Rente hat gekostet:

$$R = 28902{,}2306.$$

§. 28.

Die Herstellung einer Maschine kostet 30000. Nach 25 Jahren ist sie unbrauchbar und aus dem auf sie verwandten Material kann nur ein Werth von 1200 gewonnen werden. Wie hoch ist das jährliche Abnutzungs-Kapital der Maschine bei 5 Procent anzuschlagen?

Erste Auflösung. Man reducire den Erlös, welcher am Ende des 25sten Jahrs aus dem Material gewonnen wird, auf die Gegenwart. Man erhält:

$$R = \frac{1200}{1{,}05^{25}} = 1200 \cdot 0{,}2953028 = 354{,}363326 \cdot$$

Das Kapital, welches hiernach in 25 Jahren verbraucht wird, beträgt gegenwärtig:

$$R_1 = 30000 - 354,363326 = 29645,63668.$$

Nennt man nun die jährliche Abnutzungs-Summe A, so muss dieselbe während der folgenden 25 Jahre jährlich in Ausgabe gerechnet werden. Bringt man diese Ausgaben auf die Gegenwart bei 5 Procent zurück, so müssen sie dem obigen Werthe gleich kommen. Man hat daher die Gleichung:

$$29645,6366 = \frac{A}{1,05} + \frac{A}{1,05^2} + \frac{A}{1,05^3} + \ldots \frac{A}{1,05^{25}} = A . \frac{1-1,05^{-25}}{0,05},$$

folglich:

$$A = \frac{29645,636}{\frac{1-1,05^{-25}}{0,05}} = \frac{29645,636}{14,0939446},$$

$$\begin{aligned} \lg 29645,636 &= 4,4719607 \\ \lg 14,0939446 &= 1,1490325 \\ &\overline{3,3229282} \end{aligned}$$

$$A = N.3,3229282 = 2103,430.$$

Zweite Auflösung. Man bringe den Werth der Maschine bei 5 Procent auf das Ende des 25sten Jahres zurück. Man erhält:

$$S = 30000 . 1,05^{25} = 30000 . 3,3863549 = 101590,647.$$

Von diesem Werth ziehe man die aus dem Material erlöste Summe ab. Es ist:

$$S_1 = 101590,647 - 1200 = 100390,647.$$

Nennt man nun das Abnutzungskapital A, so muss dieses, 25mal bei 5 Procent angelegt, dieser Summe gleichkommen. Man hat daher die Gleichung:

$$100390,647 = A.1,05^{24} + A.1,05^{23} + A.1,05^{22} \ldots A.1,05 + A$$

$$= A . \frac{1,05^{25}-1}{0,05},$$

und hieraus:

$$A = \frac{100390,647.0,05}{1,05^{25}-1} = \frac{100390,647}{47,7270988},$$

$$\begin{aligned} \log 100390,647 &= 5,0016931 \\ \log 47,727098 &= 1,6787649 \\ &\overline{3,3229282}, \end{aligned}$$

$$A = N.3{,}3229282 = 2103{,}430.$$

Verallgemeinert man diese Auflösungen, so erhält man nach den beiden Methoden, wenn die Anschaffungskosten der Maschine K, der Erlös aus dem Material E, der Zinsfuss p und die Zahl der Jahre n genannt werden, nach der ersten Auflösungs-Methode:

$$1) \qquad A = \frac{K - E.1{,}0p^{-n}}{\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}},$$

nach der zweiten:

$$2) \qquad A_1 = \frac{K.1{,}0p^{n} - E}{\frac{1{,}0p^{n} - 1}{0{,}0p}}.$$

Man sieht hieraus, dass die eine Form sich leicht in die andere überführen lässt und dass daher beide das gleiche Resultat hervorbringen müssen.

Wie viel ist die fragliche Maschine nach einem Gebrauche von zehn Jahren unter den oben angegebenen Bedingungen noch werth?

Erste Auflösung. Man vergleiche den Werth des Anschaffungskapitals nach Umlauf von 10 Jahren mit dem Werthe aller in diesen Zeitraum fallenden jährlichen Abnutzungssummen. Der Unterschied giebt die fragliche Summe. Der Werth des Anschaffungskapitals ist nach 10 Jahren:

$$S_1 = 29645{,}6366.1{,}05^{10}.$$

Der Werth sämmtlicher Abnutzungssummen in diesem Zeitraum ist:

$$S_2 = 2103{,}43.1{,}05^{9} + 2103{,}43.1{,}05^{8} + \ldots 2103{,}43$$

$$= 2103{,}43 \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05}.$$

Die Maschine ist daher nach zehn Jahren noch werth:

$$W = 29645{,}636.1{,}05^{10} - 2103{,}43 \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05}$$

$$= 29645{,}636.1{,}6288946 - 2103{,}43.12{,}5778925,$$

$$\begin{aligned} \log 29645{,}636 &= 4{,}4719607 \\ \log 1{,}6288946 &= \underline{0{,}2118929} \\ & 4{,}6838536, \end{aligned}$$

$$S_1 = N.4{,}6839536 = 48289{,}60.$$

$$\begin{aligned}\log 2103{,}430 &= 3{,}3229282\\ \log 12{,}5778925 &= \underline{1{,}0996078}\\ &\ 4{,}4225360,\end{aligned}$$

$$S_2 = N.4{,}4225360 = 26456{,}72.$$

Der gesuchte Werth ist daher:

$$\begin{aligned}W &= 48289{,}60 - 26456{,}72\\ &= 21832{,}88\end{aligned}$$

Allgemeine Auflösung. Behält man die oben zu No. 1) und 2) angegebenen allgemeinen Bezeichnungen bei und nennt die Zahl der Jahre, nach deren Umlauf der Werth der Maschine bestimmt werden soll, m; so ist der Werth des Anschaffungskapitals nach m Jahren:

$$S_1 = (K - E.1{,}0p^{-n}).1{,}0p^m;$$

der Werth sämmtlicher Abnutzungssummen in demselben Zeitraum ist:

$$\begin{aligned}S_2 &= A.1{,}0p^{m-1} + A.1{,}0p^{m-2} + \ldots . A.1{,}0p + A\\ &= A.\frac{1{,}0p^m - 1}{0{,}0p}.\end{aligned}$$

Hiernach ist der Werth der Maschine nach Umlauf von m Jahren:

$$3)\qquad W = (K - E.1{,}0p^{-n}).1{,}0p^m - A.\frac{1{,}0p^m - 1}{0{,}0p}.$$

Führt man den Werth für A aus No. 1) ein, so erhält man, da $0{,}0p$ wegfällt,

$$4)\qquad W = (K - E.1{,}0p^{-n}).1{,}0p^m - (K - E.1{,}0p^{-n}).\frac{1{,}0p^m - 1}{1 - 1{,}0p^{-n}}.$$

Zweite Auflösung. Die Maschine dauert noch 15 Jahre. Man hat daher für diese Zeit jährlich einen Werth von 2103,43 zu rechnen. Bringt man den Werth dieser Summen auf den Anfang dieses Zeitraums bei 5 Procent zurück, so ist:

$$R = 2103{,}43.\frac{1 - 1{,}05^{-15}}{0{,}05} = 2103{,}43.10{,}3796580,$$

$$\begin{aligned}\log 2103{,}43 &= 3{,}3229282\\ \log 10{,}379658 &= \underline{1{,}0161830}\\ &\ 4{,}3391112,\end{aligned}$$

$$R = N.4{,}3391112 = 21832{,}89.$$

Diese Zahl stimmt mit der obigen bis auf die letzte Ziffer überein und ist nur um 1 von jener verschieden, was auf die Rechnung mit Logarithmen zu setzen ist, denn beide Auflösungen müssen zu demselben Resultate führen.

Allgemeine Auflösung. Ist die Maschine m Jahre im Gebrauch, so ist die Zahl der rückständigen Jahre, worin sie noch dienen kann, $(n-m)$. Während dieses Zeitraums beträgt die jährliche Abnutzungssumme A. Um nun den Werth sämmtlicher Abnutzungssummen zu erhalten, hat man diese auf $(n-m)$ Jahre bei p Procent zu rabattiren. Der gesuchte Werth ist daher:

$$5)\qquad R = \frac{A}{1{,}0p} + \frac{A}{1{,}0p^2} + \frac{A}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{A}{1{,}0p^{-(n-m)}}$$

$$= A.\frac{1-1{,}0p^{-(n-m)}}{0{,}0p} = A.\frac{1-1{,}0p^{-n+m}}{0{,}0p}.$$

Führt man hier den Werth für A aus No. 1) ein, so entsteht:

$$6)$$

$$R = \frac{K-E.1{,}0p^{-n}}{\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}}.\frac{1-1{,}0p^{-n+m}}{0{,}0p} = (K-E.1{,}0p^{-n}).\frac{1-1{,}0p^{-n+m}}{1-1{,}0p^{-n}}.$$

Die Gleichungen No. 4) und 6) führen auf das gleiche Resultat oder fallen zusammen. Diess zeigt sich auf folgende Weise. Vervielfacht man den zweiten Ausdruck in No. 4) nach Angabe der Klammer, so entsteht:

$$(K-E.1{,}0p^{-n}).1{,}0p^m + \frac{-(K-E.1{,}0p^{-n}).1{,}0p^m + (K-E.1{,}0p^{-n})}{1-1{,}0p^{-n}}$$

$$= \frac{(K-1{,}0p^{-n}).1{,}0p^m(1-1{,}0p^{-n}) - (K-E.1{,}0p^{-n})1{,}0p^m + (K-E.1{,}0p^{-n})}{1-1{,}0p^{-n}}$$

$$= \frac{(K-1{,}0p^{-n}).1{,}0p^m(1-1{,}0p^{-n}-1) + (K-E.1{,}0p^{-n})}{1-1{,}0p^{-n}}$$

$$= \frac{-(K-1{,}0p^{-n}).1{,}0p^m.1{,}0p^{-n} + (K-E.1{,}0p^{-n})}{1-1{,}0p^{-n}}$$

$$= \frac{(K-E.1{,}0p^{-n}) - (K-1{,}0p^{-n}).1{,}0p^{-n+m}}{1-1{,}0p^{-n}}$$

$$= \frac{(K-E.1{,}0p^{-n})(1-1{,}0p^{-n+m})}{1-1{,}0p^{-n}},$$

also ist aus No. 4):

$$7)\quad W=(K-E.1{,}0p^{-n})1{,}0p^{m}-(K-E.1{,}0p^{-n}).\frac{1{,}0p^{m}-1}{1-1{,}0p^{-n}}$$

$$=(K-E.1{,}0p^{-n})\cdot\frac{1-1{,}0p^{-n+m}}{1-1{,}0p^{-n}},$$

und dieser Ausdruck fällt mit No. 6) zusammen.

Jemand besitzt ein Kapital von 20000, das ihm seine Existenz auf 20 Jahre sichern soll. Ueber welche Summe kann er jährlich während dieses Zeitraums bei 4 Procent verfügen? Wie weit ist dieses Kapital nach 5 Jahren aufgezehrt?

Die jährlich verfügbare Summe ist nach No. 1), wenn $K=20000$, $E=0$, $p=4$, $n=20$ gesetzt wird:

$$A=\frac{20000}{\frac{1-1{,}04^{-20}}{0{,}04}}=1471{,}635.$$

Nach Umfluss von 5 Jahren beträgt die noch vorhandene Summe nach No. 3), 4) und 6):

$$S=20000.1{,}04^{5}-1471{,}635\,\frac{1{,}04^{5}-1}{0{,}04}$$

$$=20000.1{,}04^{5}-20000\,\frac{1{,}04^{5}-1}{1-1{,}04^{-20}}$$

$$=20000.\frac{1-1{,}04^{-15}}{1-1{,}04^{-20}}$$

$$=16362{,}209.$$

§. 29.

Ein Kapital von 6000 trägt jährlich 4procentige Zinse. Der Besitzer kann ausser den fälligen Zinsen dieses Kapitals jährlich noch 460 zu demselben Zinsfuss nutzbringend anlegen. Wie lange muss er mit der Anlage dieser Ersparnisse fortfahren, um im Ganzen ein Kapital von 20000 zu erwerben?

Erste Auflösung. Da schon 6000 vorhanden sind, so hat der Besitzer nur noch 14000 zu Erreichung seines Zwecks zu erwerben. Seine jährlichen Ersparnisse betragen $6000\times0{,}04+460=700$. Es fragt sich daher, wann werden diese 700, jährlich angelegt, zu 14000 erwachsen. Nennt man die fragliche Zeit x, so hat man folgende Gleichung:

$$14000 = 700.1{,}04^{x-1} + 700.1{,}04^{x-2} + \ldots . 700.1{,}04 + 700$$

$$= 700.\frac{1{,}04^x - 1}{0{,}04}$$

oder

$$\frac{1{,}04^x - 1}{0{,}04} = \frac{14000}{700} = 20.$$

Verfährt man nun nach der S. 298. u. ff. meiner Anleitung angegebenen Methode, so erhält man aus den Tafeln ohne Rechnung ganz nahe $x = 15$.

Verfährt man aber nach der gewöhnlichen Methode, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung:

$$1{,}04^x = 20.0{,}04 + 1 = 1{,}8,$$

also

$$x = \frac{\log 1{,}8}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}2552715}{0{,}0170333} = 14{,}986.$$

Zweite Auflösung. Nennt man die Zeit, in welcher das Gesammtvermögen des Besitzers auf 20000 sich erhebt, x, so wachsen 6000 sammt 4procentigen Zinsen zu der Summe $6000.1{,}04^x$. Die jährlichen 460 erheben sich sammt Zinsen zu folgender Summe:

$$460.1{,}04^{x-1} + 460.1{,}04^{x-2} + \ldots . 460.1{,}04 + 460 = 460\frac{1{,}04^x - 1}{0{,}04}.$$

Hieraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$6000.1{,}04^x + 460.\frac{1{,}04^x - 1}{0{,}04} = 20000$$

oder

$$6000.1{,}04^x + 11500.1{,}04^x - 11500 = 20000,$$

$$17500.1{,}04^x = 31500,$$

also:

$$1{,}04^x = \frac{315}{175} = 1{,}8,$$

und man erhält hieraus durch die Tafel ohne Rechnung oder durch Logarithmen die nämlichen Werthe wie oben.

§. 30.

Bei Begründung der im ersten Kapitel §. 3. und §. 6. aufgestellten Lehrsätze wurden zur leichtern Durchführung des Calculs und Feststellung der Beweise für Uebertragung fälliger Kapitalsummen auf die Gegenwart oder auf künftige Zeitpunkte die zu machenden Zahlungen L_1, L_2, $L_3 \ldots . L_n$ in Kapitalabtragungen und

die entsprechenden Zinse zerlegt oder als in solche zerlegbar gedacht.

Es wurde aber wiederholt in § 4. und §. 7. die Bemerkung beigefügt, dass diese Zerlegung durchaus kein wesentliches Moment bei Führung des Beweises und Gültigkeit der gewonnenen Lehrsätze abgebe, sondern dass die fälligen Summen in ganz beliebiger Grösse, also entweder so gross, oder grösser oder kleiner als die fälligen Zinse angenommen, ja sogar, dass in einzelnen Jahren die Zahlungen ganz ausgesetzt werden können, indem alle diese Voraussetzungen in der angegebenen Beweisführung vorausgesehen seien und die Grösse der fälligen Kapitalien keinen Einfluss auf die Richtigkeit der gemachten Schlüsse ausübe.

Die Richtigkeit dieser Behauptung soll nun hier im Besondern noch nachgewiesen werden. Wir wählen hiezu zur Vermeidung grösserer Rechnungen folgende einfache Fälle und verdeutlichen das Gesagte durch Anwendung der Zinszinsrechnung und der von mir in §. 5. aufgestellten, auf einfacher Zinsrechnung beruhenden Methode.

1) In den folgenden fünf Jahren werden die Summen 2300, 200, 200, 2200, 2100 gezahlt. Wie gross ist ihr gegenwärtiger Werth bei 5 Procent?

Erste Auflösung. Nach der Rechnung mit Zinseszinsen ist derselbe:

$$R=\frac{2300}{1,05}+\frac{200}{1,05^2}+\frac{200}{1,05^3}+\frac{2200}{1,05^4}+\frac{2100}{1,05^5}$$

$$\begin{aligned}=2300.0,9523810 &= 2190,4762\\ 200.0,9070295 &= 181,4059\\ 200.0,8638376 &= 172,7675\\ 2200.0,8227025 &= 1809,9454\\ 2100.0,7835262 &= 1645,4049\\ &\overline{5999,9999},\end{aligned}$$

$$R=5999,999=6000.$$

Zweite Auflösung. Man rabattire nach § 5. den Werth der letzten Zahlung mit Jahreszins. Es ist:

$$A_5=\frac{2100}{1,05}=2000.$$

Man ziehe die Zinse hievon, 2000.0,05 = 100, von der Zahlung des vierten Jahres ab und rabattire den Rest mit 1,05. Man erhält:

$$A_4=\frac{2200-100}{1,05}=\frac{2100}{1,05}=2000.$$

Man ziehe die Zinse der zwei letzten Summen, 4000.0,05 = 200, von der Zahlung des dritten Jahres ab und rabattire den Rest mit 1,05. Es wird:

$$A_3 = \frac{200-200}{1,05} = 0,$$

und ferner $A_5 + A_4 + A_3 = 4000$. Fährt man so fort, so ist:

$$A_2 = \frac{200-200}{1,05} = 0, \quad A_1 = \frac{2300-200}{1,05} = \frac{2100}{1,05} = 2000.$$

Nach §. 5. ist hieraus der Werth sämmtlicher Zahlungen:

$$R = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 2000 + 2000 + 2000 = 6000,$$

wie oben. Man erkennt zugleich hieraus, dass im zweiten und dritten Jahre keine Kapital-Abtragungen statt hatten, sondern nur die Zinse des rückständigen Kapitals gezahlt wurden.

2) **Die Summen 2300, 100, 100, 2200, 2100 werden in den folgenden fünf Jahren gezahlt. Wie gross ist ihr gegenwärtiger Werth bei 5 Procent?**

Erste Auflösung. Nach der Zinszins-Rechnung ist:

$$R = \frac{2300}{1,05} + \frac{100}{1,05^2} + \frac{100}{1,05^3} + \frac{2200}{1,05^4} + \frac{2100}{1,05^5}$$

$$\begin{aligned} = 2300.0,9523810 &= 2190,4762 \\ 100.0,9070295 &\quad\; 90,7029 \\ 100.0,8638376 &\quad\; 86,3837 \\ 2200.0,8227025 &\quad\; 1809,9454 \\ 2100.0,7835262 &\quad\; 1645,4049 \\ & \quad\; 5822,9131, \end{aligned}$$

$$R = 5822,913.$$

Zweite Auflösung. Nach No. 1) geben die zwei letzten Zahlungen die Werthe $A_5 + A_4 = 4000$. Man ziehe nun den Zins dieser Summe, 4000.0,05 = 200, von der Zahlung des dritten Jahres ab und rabattire mit 1,05. Es entsteht:

$$A_3 = \frac{100-200}{1,05} = -\frac{100}{1,05} = -95,238095....,$$

ferner ist $A_5 + A_4 + A_3 = 4000 - 95,238095 = 3904,761905$. Man ziehe nun die Zinse der drei letzten Zahlungen: 3904,761905.0,05 = 195,23809525...., von der Zahlung des zweiten Jahres ab, rabattire mit 1,05, so entsteht:

$$A_2 = \frac{100 - 195,2380952}{1,05} = -\frac{95,238095}{1,05} = -90,7029478.$$

Hieraus wird:

$$A_5+A_4+A_3+A_2=4000-95,238095-90,7029478\ldots.=3814,058956.$$

Man ziehe nun den Zins dieser Summe: $3814,058956.0,05 = 190,702947$ von der ersten Zahlung ab und rabattire mit 1,05. Dann wird:

$$A_1=\frac{2300-190,702947}{1,05}=\frac{2109,297053}{1,05}=2008,85433.$$

Hieraus ergibt sich nun:

$$R=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=3814,058956+2008,85433$$
$$=5822,91329\ldots.$$

wie oben. In dem vorliegenden Falle wird, wie man sieht, im zweiten und dritten Jahre weniger als die Zinse des rückständigen Kapitals gezahlt.

3) **Am Ende des ersten Jahres wird die Summe 2300, am Ende des vierten die Summe 2200, am Ende des fünften die Summe 2100 gezahlt. Wie gross ist der gegenwärtige Werth dieser Zahlungen bei 5 Procent?**

Erste Auflösung. Die Rechnung mit Zinseszinsen gibt:

$$R=\frac{2300}{1,05}+\frac{2200}{1,05^4}+\frac{2100}{1,05^5}$$

$$\begin{aligned}
&=2300.0,9523810=2190,4762\\
&2200.0,8227025\quad 1809,9454\\
&2100.0,7835262\quad \underline{1645,4049}\\
& 5645,8265,
\end{aligned}$$

$$R=5645,8265.$$

Zweite Auflösung. Die zwei letzten Zahlungen geben wie oben die Summe $A_5+A_4=4000$. Zieht man nun den Zins hievon von der Zahlung des dritten Jahres ($L_3=0$, da keine geleistet wird) ab, rabattirt mit 1,05, so entsteht:

$$A_3=\frac{0-200}{1,05}=-190,47619047\ldots.$$

Hiernach ist $A_5+A_4+A_3=4000-190,476190\ldots.=3809,52380952\ldots.$ Zieht man die Zinse hievon: $3809,523809.0,05=190,476190\ldots.,$ von der Zahlung des zweiten Jahres, $L_2=0$, ab und rabattirt mit 1,05, so wird:

$$A_2=-\frac{190,476190}{1,05}=-181,40589569\ldots.,$$

und man erhält:

$$A_5+A_4+A_3+A_2=3809,5238095-181,405895=3628,117913832\ldots$$

Zieht man nun die Zinse dieser vier Zahlungen: $3628,117915 \times 0,05 = 181,40589569\ldots$, von der Zahlung des ersten Jahres ab und verfährt wie bisher, so entsteht:

$$A_1=\frac{2300-181,405895\ldots}{1,05}=\frac{2118,594104308\ldots}{1,05}=2017,70867076\ldots,$$

und man erhält für den gesuchten Werth:

$$R=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=3628,1179138+2017,7086707$$
$$=5645,826584\ldots,$$

wie vorhin. In dem vorliegenden Falle wird, wie man sieht, im zweiten und dritten Jahre keine Zahlung geleistet.

Die Harmonie in den Resultaten bestätigt die Richtigkeit der aufgestellten Lehrsätze und der angewendeten Methoden. Die Richtigkeit der Resultate selbst lässt sich gleichfalls darthun, wenn man die Werthe der Zahlungsleistungen Schritt für Schritt verfolgt. Wir wählen hiezu den Fall No. 2). Die Rechnung ist folgende:

1stes Jahr.	Stand der Schuld	5822,913293
	Zins hinzu	291,145664
		6114,058957
	Zahlung ab	2300
2tes Jahr.	Stand der Schuld	3814,058957
	Zins hinzu	190,702948
		4004,761905
	Zahlung ab	100
3tes Jahr.	Stand der Schuld	3904,761905
	Zins hinzu	195,238095
		4100,000000
	Zahlung ab	100
4tes Jahr.	Stand der Schuld	4000
	Zins hinzu	200
		4200
	Zahlung ab	2200
5tes Jahr.	Stand der Schuld	2000
	Zins hinzu	100
		2100
	Zahlung ab	2100
		0000.

XVII.

Ueber die Bestimmung der Constanten bei der Kettenlinie.

Von

Herrn *Alexander Löffler*

in Wien.

Die Differentialgleichung der Kettenlinie, wie sie nach den Grundsätzen der Statik entwickelt wird, erscheint gewöhnlich unter der Form $1+y'^2=\left(\frac{H}{p}\right)^2 y''^2$, falls die horizontale Coordinatenaxe mit x, die vertikale aber mit y bezeichnet wird. H repräsentirt die in irgend einem Punkte der Kette stattfindende Horizontalspannung, p ist das Gewicht der Längeneinheit. Das vollständige Integral dieser Gleichung enthält zwei willkührliche Constanten, zu deren Bestimmung zwei Bedingungen gegeben werden müssen. Die Unbekannte H erfordert aber eine dritte Bedingung, die durch Angabe der Länge des Fadens erhalten wird. Die Gleichung aber, auf welche diese Bedingung führt, ist eine transcendente. Um die Schwierigkeit, welche die Lösung dieser Gleichung, bei dem gegenwärtigen Stande der Analysis bietet, zu umgehen, muss man eine andere Bedingung statt der letztgenannten einführen, die auch für die praktische Ausführung der Kettenbrücken von einigem Nutzen sein dürfte.

Der Begriff von einer Horizontal- und einer Vertikalspannung in den Aufhängepunkten der Kette ist ein fundamentaler; setzen wir ein einfaches Verhältniss zwischen beiden Spannungen voraus, so wird die Bestimmung der Constante H keinen Schwierigkeiten unterliegen.

Auf diese Weise kann die Aufgabe gelöst werden: die Gleichung für die von einem durch zwei Punkte gehenden unelastischen und biegsamen Faden gebildete Linie des Gleichgewichtes anzugeben, falls in den Aufhängepunkten die Horizontalspannung die Vertikalspannung um das $n$fache übertrifft.

Setzen wir der Kürze wegen $\frac{H}{p}=b$, so ist das vollständige Integral der Differentialgleichung der Kette:

$$y=c_1 e^{\frac{x}{b}}+\frac{b^2}{4c_1}e^{-\frac{x}{b}}+c_2.$$

Der Einfachheit wegen wählen wir die Aufhängepunkte in einer und derselben Horizontalen, den Ursprung der Coordinaten aber in der in dem Halbirungspunkte dieser Horizontalen zu errichtenden Senkrechten. Es sind demnach die Coordinaten des einen Aufhängepunktes $-x_1$, A; die des zweiten $+x_1$, A.

Die Vertikalspannung V in den Aufhängepunkten ist $V=Hy'$. Wird die Beziehung zwischen V und H durch die Gleichung $H=nV$ repräsentirt, so ergeben sich für die Constanten c_1, c_2, H nachfolgende Werthe:

$$c_1=\frac{b}{2},\quad c_2=A-\frac{b}{2}[e^{\frac{x_1}{b}}+e^{-\frac{x_1}{b}}],$$

$$b=\frac{H}{p}=\frac{x_1 \operatorname{Log} e}{\operatorname{Log}[1+\sqrt{n^2+1}]-\operatorname{Log} n}.$$

Wird x_1 in Klaftern oder Schuhen gegeben, so muss auch p als Gewicht für eine Klafter oder einen Schuh angenommen werden.

Die Gleichung der Kettenlinie verwandelt sich in:

$$y=\frac{b}{2}[e^{\frac{x}{b}}+e^{-\frac{x}{b}}]+c_2.$$

Für $x=0$ ist y ein Minimum gleich $b+c_2$; bezeichnet man diese Grösse mit y_0, so stellt uns $A-y_0$ die Pfeilhöhe, $2x_1$ hingegen die Spannweite dieser Curve vor. Um jene Beziehungen zwischen Pfeilhöhe und halber Spannweite aufzufinden, welche von den Ingenieuren bei dem Baue der Kettenbrücken angewandt worden sind, kann man dem n Werthe beilegen, die zwischen 3 und 5 enthalten sind. Bei der Projectirung muss man Sorge tragen, bei einem bestimmten n, A so zu wählen, auf dass y_0 nicht negativ werde.

Nachfolgende kleine Tabelle erleichtert in speciellen Fällen die Bestimmung der Horizontalspannung; setzt man nämlich:

$$\frac{\operatorname{Log} e}{\operatorname{Log}[1+\sqrt{n^2+1}]-\operatorname{Log} n}=K,\ \text{so ist}\ H=Kpx_1.$$

Für $n=$	1,	2,	3,	4,	5	ist:
$K=$	1·134,	2·079,	3·054,	4·04,	5·033.	

Die Bogenlänge der Kette wird durch die Gleichung

$$S = b\left[e^{\frac{x_1}{b}} - e^{-\frac{x_1}{b}}\right]$$

repräsentirt.

Zur näherungsweisen Berechnung der Ordinaten und des Bogens dienen die, durch Entwickelung in Reihen erhaltenen Formeln:

$$y = A - \frac{x_1^2}{2b} + \frac{x^2}{2b}, \quad S = 2x_1 + \frac{x_1^3}{3b^2},$$

$$y = A - \frac{x_1}{2K} + \frac{x^2}{2Kx_1}, \quad S = 2x_1 + \frac{x_1}{3K^2}.$$

XVIII.

Ueber die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von einander.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Es giebt bekanntlich einen sehr merkwürdigen Ausdruck der Entfernung der Mittelpunkte des um und in ein ebenes Dreieck beschriebenen Kreises von einander, welcher, so viel ich weiss, von Euler gefunden worden ist. Dass die Entfernungen der übrigen sogenannten merkwürdigen Punkte des Dreiecks von einander in ähnlicher Weise untersucht worden wären, ist mir nicht bekannt, weshalb ich in der vorliegenden Abhandlung eine auf diese Entfernungen bezügliche Untersuchung anstellen werde, welcher zugleich der folgende allgemeine Gedanke zu Grunde liegt. Ich habe nämlich schon früher die Bemerkung gemacht, dass alle hier zur Sprache kommenden Ausdrücke sich in besonders eleganter Form darstellen lassen, wenn man den Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises als lineare Hauptgrösse, gewissermassen als die Längeneinheit zu Grunde legt, durch welche alle zu bestimmenden Grössen ausgedrückt werden, und ausserdem vorzugsweise die Winkel des Dreiecks in die analytische

Behandlung aufnimmt. Diesen Gesichtspunkt wird man im Folgenden überall festgehalten finden, weshalb ich mir denselben hier besonders hervorzuheben erlaube. Es unterliegt einiger Schwierigkeit, für alle zu bestimmenden Grössen völlig symmetrisch gebildete Ausdrücke zu erhalten, welche mir, wie man sehen wird, bei der hier befolgten allgemeinen Methode nur dadurch zu überwinden möglich gewesen ist, dass ich bei den verschiedenen zur Behandlung kommenden Aufgaben nach und nach jede der drei Seiten des Dreiecks als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems zu Grunde lege. Mehrere häufig zur Anwendung kommende Relationen zwischen den drei Winkeln des Dreiecks habe ich am Ende der Abhandlung zusammengestellt, und werde auf diese Zusammenstellung in den einzelnen Fällen Bezug nehmen. Natürlich werden sich die im Folgenden vorkommenden Sätze auch nach anderen Methoden beweisen lassen, und dürften sich selbst zu Uebungsaufgaben eigenen, was ich dem Ermessen der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten überlasse.

§. 2.

Das gegebene Dreieck sei ABC, seine drei Seiten werden wie gewöhnlich durch a, b, c, die denselben gegenüberstehenden Winkel beziehungsweise durch A, B, C bezeichnet.

Wir nehmen A als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an; der positive Theil der Axe der x sei die Seite AB, und der positive Theil der Axe der y werde auf der Seite von AB angenommen, auf welcher der Punkt C liegt. Unter diesen Voraussetzungen sind die Coordinaten der Punkte

$$A,\ B,\ C$$

offenbar in völliger Allgemeinheit respective:

$$0,\ 0;\quad c,\ 0;\quad b\cos A,\ b\sin A.$$

Bezeichnen wir den Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises durch R; so hat man offenbar die drei folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\ \ldots\ a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C;$$

und die Coordinaten von

$$A,\ B,\ C$$

sind also auch respective:

$$0,\ 0;\quad 2R\sin C,\ 0;\quad 2R\cos A\sin B,\ 2R\sin A\sin B.$$

Die Coordinaten der Mittelpunkte der Seiten a, b, c sind folglich nach der Reihe:

$$R(\cos A \sin B + \sin C),\quad R\sin A\sin B;$$
$$R\cos A\sin B,\quad R\sin A\sin B;$$
$$R\sin C,\quad 0.$$

Die Gleichungen der drei Seiten a, b, c sind nach der Reihe:

$$2)\ \ldots \begin{cases} y = \dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\sin B - \sin C}(x - 2R\sin C), \\ y = \tang A . x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Weil aber bekanntlich

$$\sin C = \sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

ist, so sind die Gleichungen der Seiten a, b, c auch nach der Reihe:

$$3)\ \ldots\ldots \begin{cases} y = -\tang B(x - 2R\sin C), \\ y = \quad \tang A . x, \\ y = \quad 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen der auf die Seiten a, b, c von den Gegenecken gefällten Senkrechten sind:

$$4)\ \ldots\ldots \begin{cases} y = \quad \cot B . x, \\ y = -\cot A(x - 2R\sin C), \\ x = \quad 2R\cos A\sin B. \end{cases}$$

Die Gleichungen der auf die Seiten a, b, c in ihren Mittelpunkten errichteten Senkrechten sind:

$$5)$$

$$y - R\sin A\sin B = \quad \cot B\{x - R(\cos A\sin B + \sin C)\},$$
$$y - R\sin A\sin B = -\cot A(x - R\cos A\sin B),$$
$$x = \quad R\sin C.$$

Die Gleichungen der von den Mittelpunkten der Seiten a, b, c nach den Gegenecken gezogenen Geraden sind:

$$6) \ldots \begin{cases} y = \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \sin B + \sin C} x, \\ y = \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \sin B - 2\sin C}(x - 2R\sin C), \\ y = \dfrac{2\sin A \sin B}{2\cos A \sin B - \sin C}(x - R\sin C); \end{cases}$$

oder:

$$7) \ldots \begin{cases} y = \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \sin B + \sin C} x, \\ y = \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \sin B - 2\sin C}(x - 2R\sin C), \\ y = -\dfrac{2\sin A \sin B}{\sin(A-B)}(x - R\sin C); \end{cases}$$

wo die Form der dritten Gleichung an sich zwar einfacher ist als die Form derselben Gleichung in 6), jedoch für manche spätere Betrachtung nicht so geeignet wie diese letztere Form, was wir hier ein für alle Mal bemerken, wenn wir im Folgenden vielleicht nicht immer die scheinbar einfachsten Formen vorkommender Gleichungen aufstellen sollten, weil die Zweckmässigkeit der Form für uns hier durch den von gewissen Gleichungen später zu machenden Gebrauch bedingt wird.

§. 3.

Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der auf die Seiten von den Gegenecken gefällten Senkrechten durch (xy); so erhält man aus den Gleichungen §. 2. 4), wie man dieselben auch zu zweien verbinden mag, wenn man nur hier und im Folgenden immer die Gleichungen

$$\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\cos C = -\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

gehörig berücksichtigt, sehr leicht die Formeln:

$$1) \ldots \; x = 2R\cos A \sin B, \quad y = 2R\cos A \cos B.$$

Wenn man den Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises durch (xy) bezeichnet; so erhält man aus den Gleichungen §. 2. 5), wie man dieselben auch zu zweien verbinden mag, sehr leicht die Formeln:

2) . . . . $x = R\sin C, \quad y = R\cos C.$

Bezeichnet man dagegen den Schwerpunkt des Dreiecks durch (xy); so erhält man aus den Gleichungen §. 2 6), wie man dieselben auch zu zweien verbinden mag, leicht die Formeln:

$$3) \ldots \ldots \left\{\begin{array}{l} x = \tfrac{2}{3}R(\cos A\sin B + \sin C), \\ y = \tfrac{2}{3}R\sin A\sin B. \end{array}\right.$$

Wenn wir endlich den Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebeneu Kreises durch (xy) und den Halbmesser dieses Kreises durch r bezeichnen; so ist offenbar:

$$x = r\cot\tfrac{1}{2}A, \quad y = r.$$

Bezeichnet aber $\varDelta$ den Inhalt des Dreiecks, so ist

$$2\varDelta = (a+b+c)r,$$

folglich nach §. 2. 1):

4) . . . . . . $\varDelta = Rr(\sin A + \sin B + \sin C);$

nun ist bekanntlich auch

$$2\varDelta = bc\sin A = ca\sin B = ab\sin C,$$

also nach §. 2. 1):

5) . . . . $\varDelta = 2R^2\sin A\sin B\sin C;$

folglich nach 4) und 5):

$$6) \ldots \ldots \quad r = \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Nach Rel. I.*) ist aber

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,$$

also nach 6), wie man sogleich übersieht:

7) . . . . $r = 4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C.$

Führt man diesen Ausdruck von r in die obigen Ausdrücke von x, y ein, so erhält man:

---

*) Unter dieser Bezeichnung sind immer die am Ende der Abhandlung zusammengestellten und, wenn auch meistens bekannt, kurz bewiesenen Relationen zu verstehen.

$$8) \ldots \left\{ \begin{array}{l} x = 4R\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C, \\ y = 4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C. \end{array} \right.$$

Eine ganz ähnliche Behandlung gestatten die drei äusseren, über den Seiten a, b, c beschriebenen Berührungskreise, deren Mittelpunkte wir respective durch $(x_a y_a)$, $(x_b y_b)$, $(x_c y_c)$, und deren Halbmesser wir respective durch r_a, r_b, r_c bezeichnen wollen. Auf der Stelle überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Ausdrücke:

$$x_a = c + r_a \tan\frac{1}{2}B, \quad y_a = r_a;$$

$$x_b = -r_b \tan\frac{1}{2}A, \quad y_b = r_b;$$

$$x_c = r_c \tan\frac{1}{2}A, \quad y_c = -r_c;$$

und:

$$2\Delta = (-a+b+c)r_a,$$

$$2\Delta = (a-b+c)r_b,$$

$$2\Delta = (a+b-c)r_c;$$

also nach §. 2. 1):

$$9) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \Delta = Rr_a(-\sin A + \sin B + \sin C), \\ \Delta = Rr_b(\sin A - \sin B + \sin C), \\ \Delta = Rr_c(\sin A + \sin B - \sin C); \end{array} \right.$$

folglich nach 5):

$$10) \ldots \left\{ \begin{array}{l} r_a = \dfrac{2R\sin A\sin B\sin C}{-\sin A + \sin B + \sin C}, \\ r_b = \dfrac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin A - \sin B + \sin C}, \\ r_c = \dfrac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin A + \sin B - \sin C}. \end{array} \right.$$

Daher ist nach Rel. II.:

$$11) \ldots \left\{ \begin{array}{l} r_a = 4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C, \\ r_b = 4R\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C, \\ r_c = 4R\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C. \end{array} \right.$$

Hieraus ergiebt sich mittelst des Obigen, weil bekanntlich

$$c = 2R\sin C$$

ist:

$$x_a = 2R(\sin C + 2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)$$
$$= 4R(\sin\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B)\cos\tfrac{1}{2}C,$$

woraus, wegen

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B,$$

sogleich

$$x_a = 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$

folgt. Also hat man nach dem Vorhergehenden offenbar überhaupt die folgenden Ausdrücke:

$$12)\ \ldots\ \begin{cases} x_a = 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C, \\ y_a = 4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C; \end{cases}$$

$$13)\ \ldots\ \begin{cases} x_b = -4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C, \\ y_b = \quad 4R\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C; \end{cases}$$

$$14)\ \ldots\ \begin{cases} x_c = \quad 4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C, \\ y_c = -4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C. \end{cases}$$

§. 4.

Aus den vorhergehenden Formeln lässt sich eine Menge theils bereits bekannter, theils neuer Sätze und Relationen mit der grössten Leichtigkeit und Eleganz ableiten, worüber ich mich aber hier nicht weitläufig verbreiten, sondern nur mit einigen kürzeren Bemerkungen begnügen werde.

Nach §. 3. 1), 2) ist die Gleichung der durch den Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises und den Durchschnittspunkt der auf die Seiten von den Gegenecken gefällten Senkrechten gehenden Geraden:

$$y - R\cos C = \frac{2\cos A\cos B - \cos C}{2\cos A\sin B - \sin C}(x - R\sin C).$$

Ferner ist nach §. 3. 2), 3) die Gleichung der durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und den Schwerpunkt gehenden Geraden:

$$y - R\cos C = \frac{2\sin A\sin B - 3\cos C}{2\cos A\sin B - \sin C}(x - R\sin C).$$

Wegen

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B,$$

$$\sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

reduciren sich aber diese beiden Gleichungen offenbar auf die eine Gleichung:

$$y - R\cos C = -\frac{3\cos A\cos B - \sin A\sin B}{\sin(A-B)}(x - R\sin C),$$

woraus sich also der längst bekannte Satz ergiebt, dass der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen und der Schwerpunkt jederzeit in einer Geraden liegen.

Bezeichnet man die Entfernungen des Schwerpunkts von den Ecken A, B, C respective durch E_A, E_B, E_C; so ist nach §. 2. und §. 3. 3), da die Coordinaten von A beide verschwinden:

$$E_A{}^2 = \tfrac{4}{9}R^2\{(\cos A\sin B + \sin C)^2 + \sin A^2\sin B^2\},$$

woraus, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben, leicht folgt:

$$1)\quad \begin{cases} E_A{}^2 = \tfrac{4}{9}R^2(\sin B^2 + \sin C^2 + 2\cos A\sin B\sin C), \\ E_B{}^2 = \tfrac{4}{9}R^2(\sin C^2 + \sin A^2 + 2\sin A\cos B\sin C), \\ E_C{}^2 = \tfrac{4}{9}R^2(\sin A^2 + \sin B^2 + 2\sin A\sin B\cos C). \end{cases}$$

Also ist nach Rel. VII.

$$2)\;.\;.\;E_A{}^2 + E_B{}^2 + E_C{}^2 = \tfrac{4}{3}R^2(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2),$$

und folglich nach Rel. VI.:

$$3)\;.\;.\;E_A{}^2 + E_B{}^2 + E_C{}^2 = \tfrac{8}{3}R^2(1 + \cos A\cos B\cos C).$$

Aus 2) und §. 2. 1) ergiebt sich unmittelbar:

$$4)\;.\;.\;.\;.\;.\;E_A{}^2 + E_B{}^2 + E_C{}^2 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

ein längst bekannter Satz.

Aus 1) erhält man auch leicht mittelst der bekannten Relationen:

5)

$$E_A{}^2 = \tfrac{4}{9}R^2(1 + \cos A \cos B \cos C + 3\cos A \sin B \sin C),$$

$$E_B{}^2 = \tfrac{4}{9}R^2(1 + \cos A \cos B \cos C + 3\sin A \cos B \sin C),$$

$$E_C{}^2 = \tfrac{4}{9}R^2(1 + \cos A \cos B \cos C + 3\sin A \sin B \cos C).$$

Bezeichnet man die Entfernungen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der auf die Seiten von den Gegenecken gefällten Senkrechten von den Ecken A, B, C respective durch $\mathfrak{E}_A$, $\mathfrak{E}_B$, $\mathfrak{E}_C$; so ist, weil die Coordinaten von A beide verschwinden, nach §. 3. 1) offenbar:

$$\mathfrak{E}_A{}^2 = 4R^2 \cos A^2,$$

also überhaupt:

6)

$$\mathfrak{E}_A{}^2 = 4R^2 \cos A^2, \quad \mathfrak{E}_B{}^2 = 4R^2 \cos B^2, \quad \mathfrak{E}_C{}^2 = 4R^2 \cos C^2;$$

folglich:

7)

$$\mathfrak{E}_A{}^2 + \mathfrak{E}_B{}^2 + \mathfrak{E}_C{}^2 = 4R^2(\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2),$$

und daher nach Rel. V.:

8)

$$\mathfrak{E}_A{}^2 + \mathfrak{E}_B{}^2 + \mathfrak{E}_C{}^2 = 4R^2(1 - 2\cos A \cos B \cos C).$$

Nach 3) und 8) ist:

9)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\mathfrak{E}_A{}^2 + \mathfrak{E}_B{}^2 + \mathfrak{E}_C{}^2}{E_A{}^2 + E_B{}^2 + E_C{}^2} = \frac{1 - 2\cos A \cos B \cos C}{1 + \cos A \cos B \cos C},$$

und:

10)

$$(\mathfrak{E}_A{}^2 + \mathfrak{E}_B{}^2 + \mathfrak{E}_C{}^2) + 3(E_A{}^2 + E_B{}^2 + E_C{}^2) = 12R^2.$$

Sind die Winkel A, B, C sämmtlich nicht grösser als 90^0, so ist nach 6):

11)

$$\mathfrak{E}_A = 2R\cos A, \quad \mathfrak{E}_B = 2R\cos B, \quad \mathfrak{E}_C = 2R\cos C;$$

also:

$$12) \quad \ldots \mathfrak{E}_A + \mathfrak{E}_B + \mathfrak{E}_C = 2R(\cos A + \cos B + \cos C),$$

und folglich nach Rel. III.:

$$13) \quad \ldots \mathfrak{E}_A + \mathfrak{E}_B + \mathfrak{E}_C = 2R(1 + 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C),$$

also nach §. 3. 7):

$$14) \quad \ldots\ldots \mathfrak{E}_A + \mathfrak{E}_B + \mathfrak{E}_C = 2(R + r).$$

Ist einer der Winkel A, B, C, etwa A, grösser als 90°, so ist nach 6):

$$\mathfrak{E}_A = -2R\cos A, \quad \mathfrak{E}_B = 2R\cos B, \quad \mathfrak{E}_C = 2R\cos C;$$

also:

$$15) \quad \ldots \mathfrak{E}_A + \mathfrak{E}_B + \mathfrak{E}_C = 2R(-\cos A + \cos B + \cos C),$$

und folglich nach Rel. IV.:

$$16) \quad \ldots \mathfrak{E}_A + \mathfrak{E}_B + \mathfrak{E}_C = 2R(4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C - 1),$$

folglich nach §. 3. 11):

$$17) \quad \ldots\ldots \mathfrak{E}_A + \mathfrak{E}_B + \mathfrak{E}_C = 2(r_a - R).$$

Bezeichnet man die Entfernungen des Mittelpunkts des um das Dreieck beschriebenen Kreises von den Ecken A, B, C durch D_A, D_B, D_C; so ist natürlich:

$$18) \quad \ldots\ldots D_A = R, \quad D_B = R, \quad D_C = R.$$

Werden die Entfernungen des Mittelpunkts des in das Dreieck beschriebenen Kreises von den Ecken A, B, C durch $\mathfrak{D}_A$, $\mathfrak{D}_B$, $\mathfrak{D}_C$ bezeichnet; so ist nach §. 3. 8) offenbar:

$$\mathfrak{D}_A^2 = 16R^2\sin\tfrac{1}{2}B^2\sin\tfrac{1}{2}C^2;$$

also überhaupt:

$$19) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \mathfrak{D}_A = 4R\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C, \\ \mathfrak{D}_B = 4R\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A, \\ \mathfrak{D}_C = 4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B; \end{cases}$$

folglich nach §. 3. 7):

$$20) \quad \ldots\ldots\ldots \mathfrak{D}_A\mathfrak{D}_B\mathfrak{D}_C = 4Rr^2.$$

Bezeichnet man die Entfernungen des Schwerpunkts von den Seiten a, b, c durch E_a, E_b, E_c; so ist nach §. 3. 3):

$$21) \ldots \ldots \left\{\begin{array}{l} E_a = \frac{2}{3} R \sin B \sin C, \\ E_b = \frac{2}{3} R \sin C \sin A, \\ E_c = \frac{2}{3} R \sin A \sin B. \end{array}\right.$$

Werden die Entfernungen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der auf die Seiten von den Gegenecken gefällten Senkrechten als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem sie von den betreffenden Seiten a, b, c an nach dem inneren oder äusseren Raume des Dreiecks hin liegen, und mit Rücksicht hierauf durch $\mathfrak{E}_a$, $\mathfrak{E}_b$, $\mathfrak{E}_c$ bezeichnet; so ist nach §. 3. 1):

$$22) \ldots \ldots \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{E}_a = 2R \cos B \cos C, \\ \mathfrak{E}_b = 2R \cos C \cos A, \\ \mathfrak{E}_c = 2R \cos A \cos B. \end{array}\right.$$

Betrachtet man die Entfernungen des Mittelpunkts des umschriebenen Kreises von den Seiten a, b, c als positiv oder negativ, jenachdem sie von den betreffenden Seiten a, b, c an nach dem inneren oder äusseren Raume des Dreiecks hin liegen, und bezeichnet dieselben mit Rücksicht hierauf durch D_a, D_b, D_c; so ist nach §. 3. 2):

$$23) \ldots D_a = R \cos A, \quad D_b = R \cos B, \quad D_c = R \cos C.$$

Sind $\mathfrak{D}_a$, $\mathfrak{D}_b$, $\mathfrak{D}_c$ die Entfernungen des Mittelpunkts des in das Dreieck beschriebenen Kreises von den Seiten a, b, c; so ist nach §. 3. 8):

$$24) \ldots \mathfrak{D}_a = \mathfrak{D}_b = \mathfrak{D}_c = 4R \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C.$$

Aus diesen Formeln könnte man wiederum manche interessante Beziehungen ableiten, worüber wir jedoch ganz in der Kürze nur Folgendes bemerken.

Aus 21) und §. 3. 5) folgt auf der Stelle:

$$25) \ldots \ldots \ldots E_a E_b E_c = \frac{2}{27} \cdot \frac{\Delta^2}{R}.$$

Nach 23) ist:

$$D_a^2 + D_b^2 + D_c^2 = R^2(\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2),$$

also nach Rel. V.:

$$26) \ldots D_a^2 + D_b^2 + D_c^2 = R^2(1 - 2\cos A \cos B \cos C),$$

und daher nach 8):

$$27) \ldots\ldots \frac{\mathfrak{E}_A^2+\mathfrak{E}_B^2+\mathfrak{E}_C^2}{D_a^2+D_b^2+D_c^2}=4,$$

so dass also dieser Quotient für alle Dreiecke constant ist.

Wie immer in der Mathematik ist auch hier der Reichthum an solchen bemerkenswerthen Relationen unerschöpflich.

Wir wollen jetzt nur noch einige Betrachtungen über das Dreieck anstellen, dessen Ecken die Mittelpunkte der drei äusseren Berührungskreise sind.

Bezeichnen wir die Winkel dieses Dreiecks, so wie sie den Winkeln A, B, C gegenüberstehen, durch A', B', C'; so ist offenbar:

$$28) \quad A'=\tfrac{1}{2}(B+C), \quad B'=\tfrac{1}{2}(C+A), \quad C'=\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Ist Δ' der Inhalt des in Rede stehenden Dreiecks, so ist offenbar

$$\Delta'=\Delta+\tfrac{1}{2}ar_a+\tfrac{1}{2}br_b+\tfrac{1}{2}cr_c,$$

also nach §. 2. 1) und §. 3. 11):

$$\Delta'=\Delta+4R^2\left\{\begin{array}{l}\sin A\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\+\sin B\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\+\sin C\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\end{array}\right\},$$

und folglich:

$$\Delta'=\Delta+8R^2(\sin\tfrac{1}{2}A^2+\sin\tfrac{1}{2}B^2+\sin\tfrac{1}{2}C^2)\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,$$

daher nach Rel. VIII.:

$$\begin{aligned}\Delta'&=\Delta+8R^2(1-2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\&=\Delta+8R^2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C-2R^2\sin A\sin B\sin C,\end{aligned}$$

woraus nach §. 3. 5) sogleich

$$29) \ldots\ldots \Delta'=8R^2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$

folgt.

Also ist nach §. 3. 5):

$$\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\sin A\sin B\sin C}{4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C},$$

woraus sich sogleich

$$30) \ldots \ldots \frac{\Delta}{\Delta'} = 2 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C,$$

folglich nach §. 3. 7)

$$31) \ldots \ldots \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{r}{2R} \quad \text{oder} \quad 2R\Delta = r\Delta'$$

ergiebt.

Bezeichnet R' den Halbmesser des um das Dreieck Δ' beschriebenen Kreises, so ist nach §. 3. 5):

$$\Delta' = 2R'^2 \sin A' \sin B' \sin C',$$

also nach 28):

$$\Delta' = 2R'^2 \sin \tfrac{1}{2}(A+B) \sin \tfrac{1}{2}(B+C) \sin \tfrac{1}{2}(C+A),$$

folglich:

$$\Delta' = 2R'^2 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C,$$

woraus sich, wenn man dies mit 29) vergleicht, die Gleichung

$$32) \ldots \ldots \ldots \ldots R' = 2R$$

ergiebt.

Wird der Halbmesser des in das Dreieck Δ' beschriebenen Kreises durch r' bezeichnet, so ist nach §. 3. 7):

$$r' = 4R' \sin \tfrac{1}{2} A' \sin \tfrac{1}{2} B' \sin \tfrac{1}{2} C',$$

also nach 32) und 28):

$$33) \ldots r' = 8R \sin \tfrac{1}{4}(A+B) \sin \tfrac{1}{4}(B+C) \sin \tfrac{1}{4}(C+A),$$

oder:

$$34) \ldots r' = 8R \sin(45^0 - \tfrac{1}{4}A) \sin(45^0 - \tfrac{1}{4}B) \sin(45^0 - \tfrac{1}{4}C)$$

und daher nach Rel. X.:

$$35) \ldots \ldots r' = 2R(\sin \tfrac{1}{2} A + \sin \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} C - 1).$$

Auch die bekannten Relationen zwischen den Halbmessern r, r_a, r_b, r_c der die Seiten des Dreiecks Δ berührenden Kreise lassen sich mittelst der obigen Formeln ungemein leicht beweisen.

Aus §. 3. 11) erhält man nämlich auf der Stelle:

$$36) \begin{cases} r_a + r_b = 4R \sin \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2} C = 4R \cos \tfrac{1}{2} C^2, \\ r_b + r_c = 4R \sin \tfrac{1}{2}(B+C) \cos \tfrac{1}{2} A = 4R \cos \tfrac{1}{2} A^2, \\ r_c + r_a = 4R \sin \tfrac{1}{2}(C+A) \cos \tfrac{1}{2} B = 4R \cos \tfrac{1}{2} B^2; \end{cases}$$

und aus §. 3. 7), 11) ergiebt sich:

$$37)\quad \begin{cases} r_a - r = 4R\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}A = 4R\sin\frac{1}{2}A^2, \\ r_b - r = 4R\cos\frac{1}{2}(C+A)\sin\frac{1}{2}B = 4R\sin\frac{1}{2}B^2, \\ r_c - r = 4R\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C = 4R\sin\frac{1}{2}C^2; \end{cases}$$

also, wenn man diese Gleichungen, je zwei, durch Addition verbindet:

$$38) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

Durch Multiplication erhält man aus §. 3. 7), 11) sogleich:

$$39) \quad \ldots\ldots \quad r r_a r_b r_c = 4R^4 \sin A^2 \sin B^2 \sin C^2,$$

also nach §. 3. 5):

$$40) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r r_a r_b r_c = \varDelta^2,$$

wie längst bekannt ist.

§. 5.

Unserem eigentlichen Zwecke jetzt näher tretend, wollen wir zunächst die Entfernung D des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der auf die Seiten von den Gegenecken gefällten Senkrechten von dem Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises bestimmen.

Nach §. 3. 1), 2) ist:

$$D^2 = R^2\{(2\cos A\sin B - \sin C)^2 + (2\cos A\cos B - \cos C)^2\}.$$

Nun ist aber offenbar:

$$\begin{aligned}(2\cos A\sin B - \sin C)^2 &+ (2\cos A\cos B - \cos C)^2 \\ &= 1 + 4\cos A\{\cos A - \cos(B-C)\} \\ &= 1 - 4\cos A\{\cos(B+C) + \cos(B-C)\} \\ &= 1 - 8\cos A\cos B\cos C,\end{aligned}$$

also:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad D^2 = (1 - 8\cos A\cos B\cos C)R^2,$$

welcher Ausdruck ganz symmetrisch geformt ist.

Nicht immer ist es so leicht wie hier, die gesuchten Ausdrücke in symmetrischer Form zu erhalten. Dann kann man sich eines dem folgenden ähnlichen Verfahrens bedienen, welches frei-

lich im vorliegenden Falle bei Weitem nicht so leicht zum Zwecke führt, als der vorhergehende Weg.

Nimmt man nach und nach, für A, B, C als Anfangspunkte, die Seiten AB, BC, CA als die positiven Theile der Abscissenaxen an; so ist ganz eben so wie vorher nach §. 3. 1), 2):

$$\frac{D^2}{R^2} = (2\cos A\sin B - \sin C)^2 + (2\cos A\cos B - \cos C)^2,$$

$$\frac{D^2}{R^2} = (2\cos B\sin C - \sin A)^2 + (2\cos B\cos C - \cos A)^2,$$

$$\frac{D^2}{R^2} = (2\cos C\sin A - \sin B)^2 + (2\cos C\cos A - \cos B)^2;$$

also, wenn man die Quadrate entwickelt, und die Gleichungen dann zu einander addirt, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned}3\frac{D^2}{R^2} = 3 &+ 4(\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2)\\ &- 4(\cos A\sin B\sin C + \sin A\cos B\sin C + \sin A\sin B\cos C)\\ &- 12\cos A\cos B\cos C,\end{aligned}$$

und folglich nach Rel. V., VI., VII.:

$$\begin{aligned}3\frac{D^2}{R^2} &= 3 + 4(1 - 2\cos A\cos B\cos C)\\ &\quad - 4(1 + \cos A\cos B\cos C)\\ &\quad - 12\cos A\cos B\cos C\\ &= 3 - 24\cos A\cos B\cos C,\end{aligned}$$

also:

$$D^2 = (1 - 8\cos A\cos B\cos C)R^2,$$

ganz wie vorher.

Nach §. 4. 3), 4) ist:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8(1 + \cos A\cos B\cos C)R^2,$$

also:

2) . . . . $a^2 + b^2 + c^2 + D^2 = 9R^2,$

oder:

3) . . . . $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - D^2.$

§. 6.

Bezeichnen wir die Entfernung des gemeinschaftlichen Durch-

schnittspunkts der auf die Seiten von den Gegenecken gefällten Senkrechten von dem Mittelpunkte des in das Dreieck beschriebenen Kreises durch D'; so ist nach §. 3. 1), 8), wenn man für A, B, C als Anfangspunkte nach und nach die Seiten AB, BC, CA als die positiven Theile der Abscissenaxen annimmt:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{D'^2}{R^2}=(\cos A\sin B-2\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2$$
$$+(\cos A\cos B-2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2,$$
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{D'^2}{R^2}=(\cos B\sin C-2\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A)^2$$
$$+(\cos B\cos C-2\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A)^2,$$
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{D'^2}{R^2}=(\cos C\sin A-2\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B)^2$$
$$+(\cos C\cos A-2\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B)^2;$$

also, wenn man quadrirt und die Gleichungen dann zu einander addirt:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\cdot\frac{D'^2}{R^2}=\;&\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2\\
&+4(\sin\tfrac{1}{2}B^2\sin\tfrac{1}{2}C^2+\sin\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}A^2+\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}B^2)\\
&-4\cos A\sin B.\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\\
&-4\cos B\sin C.\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\\
&-4\cos C\sin A.\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\
&-4\cos A\cos B.\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\\
&-4\cos B\cos C.\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\\
&-4\cos C\cos A.\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C,\end{aligned}$$

folglich nach einer allgemein bekannten Relation und nach Rel. II., III.:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\cdot\frac{D'^2}{R^2}=\;&\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2\\
&+(1-\cos B)(1-\cos C)\\
&+(1-\cos C)(1-\cos A)\\
&+(1-\cos A)(1-\cos B)\\
&-\cos A\sin B(-\sin A+\sin B+\sin C)\\
&-\cos B\sin C(\sin A-\sin B+\sin C)\\
&-\cos C\sin A(\sin A+\sin B-\sin C)\\
&-\cos A\cos B(\cos A+\cos B+\cos C-1)\\
&-\cos B\cos C(\cos A+\cos B+\cos C-1)\\
&-\cos C\cos A(\cos A+\cos B+\cos C-1),\end{aligned}$$

woraus man, mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\cos(A+B) = -\cos C,\ \cos(B+C) = -\cos A,\ \cos(C+A) = -\cos B,$$

leicht erhält:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\cdot\frac{D'^2}{R^2} = {} & 3 + \cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2 \\ & -3(\cos A + \cos B + \cos C) \\ & -(\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C) \\ & +3(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) \\ & -3\cos A \cos B \cos C,\end{aligned}$$

also nach Rel. V., VI., VII. offenbar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\cdot\frac{D'^2}{R^2} = {} & 1 - 2\cos A \cos B \cos C \\ & -(\cos A + \cos B + \cos C) \\ & +(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A).\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}& 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) \\ = {} & (\cos A + \cos B + \cos C)^2 - (\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2),\end{aligned}$$

also nach Rel. III., V.:

$$\begin{aligned}& \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \\ = {} & 4\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C + 8\sin\tfrac{1}{2}A^2 \sin\tfrac{1}{2}B^2 \sin\tfrac{1}{2}C^2 \\ & + \cos A \cos B \cos C,\end{aligned}$$

und folglich, wenn man zugleich wieder Rel. III. anwendet:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{D'^2}{R^2} = 8\sin\tfrac{1}{2}A^2 \sin\tfrac{1}{2}B^2 \sin\tfrac{1}{2}C^2 - \cos A \cos B \cos C$$

oder:

1) $D'^2 = 4(8\sin\tfrac{1}{2}A^2 \sin\tfrac{1}{2}B^2 \sin\tfrac{1}{2}C^2 - \cos A \cos B \cos C)R^2.$

Nach §. 3. 7) ist also:

2) . . . . . $D'^2 = 2(r^2 - 2R^2 \cos A \cos B \cos C),$

folglich

$$2D'^2 = 4r^2 - 8R^2 \cos A \cos B \cos C;$$

und weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$D^2 = R^2 - 8R^2 \cos A \cos B \cos C$$

ist, so hat man die Relation:

$$3) \quad \ldots \quad D^2 - 2D'^2 = R^2 - 4r^2 = (R-2r)(R+2r)$$

oder:

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D^2 - R^2 = 2(D'^2 - 2r^2).$$

§. 7.

Bezeichnen wir die Entfernung des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der auf die Seiten von den Gegenecken gefällten Perpendikel von dem Schwerpunkte durch D''; so ist nach §. 3. 1), 3):

$$D''^2 = R^2\{\tfrac{2}{3}(\cos A \sin B + \sin C) - 2\cos A \sin B\}^2$$
$$+ R^2\{\tfrac{2}{3}\sin A \sin B - 2\cos A \cos B\}^2,$$

oder, wie man leicht findet, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{D''^2}{R^2} = (\sin C - 2\cos A \sin B)^2 + (\cos C - 2\cos A \cos B)^2,$$

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{D''^2}{R^2} = (\sin A - 2\cos B \sin C)^2 + (\cos A - 2\cos B \cos C)^2,$$

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{D''^2}{R^2} = (\sin B - 2\cos C \sin A)^2 + (\cos B - 2\cos C \cos A)^2;$$

also, wenn man die Quadrate entwickelt und die Gleichungen dann zu einander addirt:

$$\frac{27}{4}\cdot\frac{D''^2}{R^2} = 3 + 4(\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2)$$
$$-4(\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C)$$
$$-12\cos A \cos B \cos C,$$

und folglich nach Rel. V., VI., VII.:

$$\frac{27}{4}\cdot\frac{D''^2}{R^2} = 3 + 4(1 - 2\cos A \cos B \cos C)$$
$$-4(1 + \cos A \cos B \cos C)$$
$$-12\cos A \cos B \cos C,$$

woraus sich sogleich:

$$1) \;.\;.\;.\;.\;.\; D''^2 = \tfrac{4}{9}(1 - 8\cos A\cos B\cos C)R^2$$

ergiebt.

Also ist nach §. 5. 1):

$$2) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; D'' = \tfrac{2}{3}D, \quad D : D'' = 3 : 2,$$

welches ein längst bekannter Satz ist.

§. 8.

Wenn wir die Entfernung des Mittelpunkts des um das Dreieck beschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des in das Dreieck beschriebenen Kreises durch D bezeichnen; so haben wir nach § 3. 2), 8), wenn wir zugleich in der aus den dortigen Formeln sich ergebenden Gleichung die Buchstaben gehörig vertauschen, die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{D}^2}{R^2} = (\sin C - 4\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2 + (\cos C - 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2,$$

$$\frac{\mathrm{D}^2}{R^2} = (\sin A - 4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2 + (\cos A - 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2,$$

$$\frac{\mathrm{D}^2}{R^2} = (\sin B - 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2 + (\cos B - 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2;$$

also, wenn wir die Quadrate entwickeln und die Gleichungen dann zu einander addiren:

$$\begin{aligned}
3\frac{\mathrm{D}^2}{R^2} = 3 &- 8\sin C\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C \\
&- 8\sin A\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C \\
&- 8\sin B\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C \\
&- 8\cos C\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C \\
&- 8\cos A\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C \\
&- 8\cos B\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C \\
&+ 16\sin\tfrac{1}{2}B^2\sin\tfrac{1}{2}C^2 \\
&+ 16\sin\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}A^2 \\
&+ 16\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}B^2,
\end{aligned}$$

folglich nach einer sehr bekannten Relation und nach Rel. II., III.:

$$3\frac{D^2}{R^2}=3-2\sin C(-\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$-2\sin A(\sin A-\sin B+\sin C)$$
$$-2\sin B(\sin A+\sin B-\sin C)$$
$$-2\cos C(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$
$$-2\cos A(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$
$$-2\cos B(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$
$$+4(1-\cos B)(1-\cos C)$$
$$+4(1-\cos C)(1-\cos A)$$
$$+4(1-\cos A)(1-\cos B),$$

und daher, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$3\frac{D^2}{R^2}=15-2(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2)$$
$$-2(\cos A+\cos B+\cos C)^2$$
$$-6(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$+4(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A),$$

also, weil

$$2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$
$$=(\cos A+\cos B+\cos C)^2-(\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2)$$

ist:

$$1)\;\ldots\ldots\;D^2=\{3-2(\cos A+\cos B+\cos C)\}R^2,$$

und folglich nach Rel. III.:

$$2)\;\ldots\ldots\;D^2=(1-8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)R^2.$$

Also ist nach §. 3. 7):

$$3)\;\ldots\ldots\ldots\;D^2=R(R-2r),$$

wie längst bekannt ist.

Eine ganz ähnliche Behandlung gestatten die äusseren Berührungskreise.

Bezeichnen wir die Entfernung des Mittelpunkts des um das Dreieck beschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des über der Seite a liegenden äusseren Berührungskreises durch D_a; so ist nach §. 3. 2), 12), 14), 13):

$$\frac{D_a^2}{R^2}=(\sin C-4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2+(\cos C-4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2,$$

$$\frac{D_a^2}{R^2}=(\sin A-4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2+(\cos A+4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2,$$

$$\frac{D_a^2}{R^2}=(\sin B+4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2+(\cos B-4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)^2;$$

also auf ähnliche Art wie vorher:

$$\begin{aligned}3\frac{D_a^2}{R^2}=3&-8\sin C\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\&-8\sin A\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\&+8\sin B\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\\&-8\cos C\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\&+8\cos A\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\&-8\cos B\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\\&+16\cos\tfrac{1}{2}B^2\cos\tfrac{1}{2}C^2\\&+16\cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}A^2\\&+16\sin\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2,\end{aligned}$$

folglich nach einer sehr bekannten Relation und nach Rel. I., II., IV.:

$$\begin{aligned}3\frac{D_a^2}{R^2}=3&-2\sin C(\sin A+\sin B+\sin C)\\&-2\sin A(\sin A+\sin B-\sin C)\\&+2\sin B(\sin A-\sin B+\sin C)\\&-2\cos C(1-\cos A+\cos B+\cos C)\\&+2\cos A(1-\cos A+\cos B+\cos C)\\&-2\cos B(1-\cos A+\cos B+\cos C)\\&+4(1+\cos B)(1+\cos C)\\&+4(1+\cos C)(1-\cos A)\\&+4(1-\cos A)(1+\cos B)\end{aligned}$$

und daher, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned}3\frac{D_a^2}{R^2}=15&-2(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2)\\&-2(-\cos A+\cos B+\cos C)^2\\&+6(-\cos A+\cos B+\cos C)\\&+4(-\cos A\cos B+\cos B\cos C-\cos C\cos A),\end{aligned}$$

also, weil

$$2(-\cos A\cos B+\cos B\cos C-\cos C\cos A)$$

$$=(-\cos A+\cos B+\cos C)^2-(\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2)$$

ist:

$$4)\ \ldots\ \mathfrak{D}_a^2=\{3+2(-\cos A+\cos B+\cos C)\}R^2,$$

und folglich nach Rel. IV.:

$$5)\ \ldots\ \mathfrak{D}_a^2=(1+8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)R^2.$$

Also ist nach §. 3. 11):

$$6)\ \ldots\ \mathfrak{D}_a^2=R(R+2r_a).$$

Ueberhaupt hat man also jetzt die folgenden merkwürdigen Formeln:

$$7)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{D}^2\ =(1-8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)R^2,\\ \mathfrak{D}_a^2=(1+8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)R^2,\\ \mathfrak{D}_b^2=(1+8\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)R^2,\\ \mathfrak{D}_c^2=(1+8\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)R^2\end{array}\right.$$

und:

$$8)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{D}^2\ =R(R-2r),\\ \mathfrak{D}_a^2=R(R+2r_a),\\ \mathfrak{D}_b^2=R(R+2r_b),\\ \mathfrak{D}_c^2=R(R+2r_c).\end{array}\right.$$

Also ist:

$$\mathfrak{D}^2+\mathfrak{D}_a^2+\mathfrak{D}_b^2+\mathfrak{D}_c^2=R\{4R+2(r_a+r_b+r_c-r)\},$$

folglich nach §. 4. 38):

$$9)\ \ldots\ \mathfrak{D}^2+\mathfrak{D}_a^2+\mathfrak{D}_b^2+\mathfrak{D}_c^2=12R^2.$$

§. 9.

Bezeichnen wir die Entfernung des Mittelpunkts des um das Dreieck beschriebenen Kreises von dem Schwerpunkte durch $\mathfrak{D}$; so ist nach §. 3. 2) und 3):

$$9\cdot\frac{\mathfrak{D}^2}{R^2}=(2\cos A\sin B-\sin C)^2+(2\sin A\sin B-3\cos C)^2,$$

$$9\cdot\frac{\mathfrak{D}^2}{R^2}=(2\cos B\sin C-\sin A)^2+(2\sin B\sin C-3\cos A)^2,$$

$$9\cdot\frac{\mathfrak{D}^2}{R^2}=(2\cos C\cos A-\sin B)^2+(2\sin C\sin A-3\cos B)^2;$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$27\cdot\frac{\mathfrak{D}^2}{R^2}=27-4(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2)$$

$$-16(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C),$$

und folglich nach Rel. VII.:

$$1)\quad\ldots\quad \mathfrak{D}^2=\{1-\tfrac{4}{9}(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2)\}R^2,$$

also nach Rel. VI.:

$$2)\quad\ldots\quad \mathfrak{D}^2=\tfrac{1}{9}(1-8\cos A\cos B\cos C)R^2.$$

Hiernach und nach §. 5. 1) und §. 7. 1) ist:

$$D^2:D''^2:\mathfrak{D}^2=1:\tfrac{4}{9}:\tfrac{1}{9}=9:4:1,$$

also

$$D:D'':\mathfrak{D}=3:2:1.$$

§. 10.

Die Entfernung des Mittelpunkts des in das Dreieck beschriebenen Kreises von dem Schwerpunkte wollen wir durch E bezeichnen; so ist nach §. 3. 3). 8):

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{E^2}{R^2}=\{(\cos A\sin B+\sin C)-6\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\}^2$$
$$+\{\sin A\sin B-6\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\}^2,$$

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{E^2}{R^2}=\{(\cos B\sin C+\sin A)-6\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\}^2$$
$$+\{\sin B\sin C-6\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\}^2,$$

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{E^2}{R^2}=\{(\cos C\sin A+\sin B)-6\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\}^2$$
$$+\{\sin C\sin A-6\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\}^2;$$

folglich, wenn man quadrirt und addirt, nach einigen sehr bekannten Relationen und nach Rel. II., III., VII.:

$$\begin{aligned}\frac{9}{4}\cdot\frac{E^2}{R^2}= \quad & \sin A^2+\sin B^2+\sin C^2\\ &-(\cos A\sin B+\sin C)(-\sin A+\sin B+\sin C)\\ &-(\cos B\sin C+\sin A)(\sin A-\sin B+\sin C)\\ &-(\cos C\sin A+\sin B)(\sin A+\sin B-\sin C)\\ &-\sin A\sin B(\cos A+\cos B+\cos C-1)\\ &-\sin B\sin C(\cos A+\cos B+\cos C-1)\\ &-\sin C\sin A(\cos A+\cos B+\cos C-1)\\ &+3(1-\cos B)(1-\cos C)\\ &+3(1-\cos C)(1-\cos A)\\ &+3(1-\cos A)(1-\cos B),\end{aligned}$$

woraus sich, wenn man bemerkt, dass das Aggregat

$$\begin{aligned}&-\cos A\sin B^2-\cos B\sin C^2-\cos C\sin A^2\\ &-\sin A\sin B\cos B-\sin B\sin C\cos C-\sin C\sin A\cos A\\ &+\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\\ =&-\sin(A+B)\sin B-\sin(B+C)\sin C-\sin(C+A)\sin A\\ &+\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\\ =&-\sin B\sin C-\sin C\sin A-\sin A\sin B\\ &+\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\end{aligned}$$

ist, also verschwindet, leicht die Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{9}{4}\cdot\frac{E^2}{R^2}=&-2(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C)\\ &+3(1-\cos B)(1-\cos C)\\ &+3(1-\cos C)(1-\cos A)\\ &+3(1-\cos A)(1-\cos B),\end{aligned}$$

oder nach Rel. VII. die Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{9}{4}\cdot\frac{E^2}{R^2}= \quad & 3(1-\cos B)(1-\cos C)\\ &+3(1-\cos C)(1-\cos A)\\ &+3(1-\cos A)(1-\cos B)\\ &-(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2)\end{aligned}$$

ergiebt. Das Aggregat der drei ersten Theile auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist aber:

$$9-6(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$+3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$
$$=9-6(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$+\tfrac{3}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)^2-\tfrac{3}{2}(\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2),$$

also:

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{E^2}{R^2}=18-12(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$+3(\cos A+\cos B+\cos C)^2$$
$$-3(\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2)$$
$$-2(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2)$$
$$=12-12(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$+3(\cos A+\cos B+\cos C)^2$$
$$-(\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2),$$

also offenbar:

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{E^2}{R^2}=3\{2-(\cos A+\cos B+\cos C)\}^2$$
$$-(\cos A^2+\cos B^2+\cos C^2),$$

und folglich nach Rel. III., V.:

1)

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{E^2}{R^2}=3(1-4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2-(1-2\cos A\cos B\cos C).$$

Nach §. 3. 7) ist also:

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{E^2}{R^2}=3(1-\frac{r}{R})^2-(1-2\cos A\cos B\cos C),$$

wo man das Product $\cos A\cos B\cos C$ durch verschiedene Grössen aus dem Obigen ersetzen kann.

Es ist

$$9E^2=6(R-r)^2-2(1-2\cos A\cos B\cos C)R^2$$

und nach §. 6. 2):

$$D'^2=2r^2-4R^2\cos A\cos B\cos C,$$

also, wenn man addirt:

$$9E^2+D'^2=6(R-r)^2-2(R^2-r^2)$$

oder

2) . . . . . . $9E^2+D'^2=4(R-r)(R-2r).$

Aehnliche Relationen würden sich noch viele finden lassen, was ich aber jetzt nicht weiter ausführen will.

Schliesslich wird es nicht unzweckmässig sein, die merkwürdige Formel 1) durch ein Paar Beispiele zu verificiren.

Betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck, so ist

$$A = B = C = 60^0,$$

also

$$\cos A = \cos B = \cos C = \sin 30^0 = \tfrac{1}{2},$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}B = \sin\tfrac{1}{2}C = \sin 30^0 = \tfrac{1}{2};$$

also nach 1):

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{E^2}{R^2} = 3(1-4.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2})^2-(1-2.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2})$$

$$= 3(1-\tfrac{1}{2})^2-(1-\tfrac{1}{4}) = \tfrac{3}{4}-\tfrac{3}{4} = 0,$$

folglich $E = 0$, wie es sein muss.

Betrachten wir ferner ein gleichschenkliges Dreieck ABC, in welchem die gleichen Schenkel AC und BC doppelt so gross sind als die Grundlinie AB, und setzen also

$$AB = 1, \quad AC = BC = 2;$$

so ist $2\cos A = 2\cos B = \frac{1}{2}$, also:

$$\cos A = \cos B = \tfrac{1}{4},$$

$$\sin A = \sin B = \tfrac{1}{4}\sqrt{15}.$$

Ferner ist:

$$2\sin\tfrac{1}{2}A^2 = 1-\cos A = \tfrac{3}{4},$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}A^2 = 1+\cos A = \tfrac{5}{4};$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \cos A = \tfrac{1}{4},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sin A = \tfrac{1}{4}\sqrt{15}$$

und

$$\cos C = 2\cos\tfrac{1}{2}C^2 - 1 = \frac{15}{8} - 1 = \frac{7}{8}.$$

Folglich ist nach 1):

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{E^2}{R^2} = 3(1 - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{4})^2 - (1 - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8})$$

$$= 3(1 - \frac{3}{8})^2 - (1 - \frac{7}{64})$$

$$= 3\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \frac{57}{64} = \frac{75}{64} - \frac{57}{64} = \frac{9}{32}.$$

Bezeichnen wir die Höhe unsers Dreiecks durch h, so ist

$$h = 2\sin A = \tfrac{1}{2}\sqrt{15},$$

also $\frac{1}{6}\sqrt{15}$ die Entfernung des Schwerpunkts von der Grundlinie. Der Halbmesser r des in das Dreieck beschriebenen Kreises ist

$$r = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Folglich ist

$$E = \frac{1}{6}\sqrt{15} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)\sqrt{15} = \frac{1}{15}\sqrt{15} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Endlich ist offenbar

$$1 = R\cos\frac{1}{2}C = \frac{1}{4}R\sqrt{15}, \quad \text{also} \quad R = \frac{4}{\sqrt{15}},$$

und folglich

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{E^2}{R^2} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{15}{16} = \frac{9}{32},$$

ganz wie oben aus der Formel 1) gefunden worden ist.

Anhang.

Relationen zwischen den drei Winkeln des ebenen Dreiecks.

I.

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Weil nämlich

$$\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

ist, so ist:

$$\sin A + \sin B + \sin C$$
$$= \sin A(1+\cos B) + \sin B(1+\cos A),$$

woraus durch bekannte Zerlegungen, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B,$$

sogleich die zu beweisende Relation folgt.

II.

$$-\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Auf ähnliche Art wie vorher erhält man sogleich:

$$-\sin A + \sin B + \sin C$$
$$= -\sin A(1-\cos B) + \sin B(1+\cos A),$$

woraus durch bekannte Zerlegungen, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B,$$

die erste der drei zu beweisenden Relationen leicht folgt, aus welcher dann die beiden anderen sich sogleich durch blosse Vertauschung der Buchstaben ergeben.

III.

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C$$

Weil nämlich

$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

und

$$\cos C = -\cos(A+B) = 1 - 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)^2$$

ist, so ist

$$\cos A + \cos B + \cos C$$

$$= 1 + 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\{\cos\tfrac{1}{2}(A-B) - \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\}$$

$$= 1 + 4\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B,$$

woraus wegen

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin\tfrac{1}{2}C$$

die zu beweisende Relation folgt.

IV.

$$-\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C - 1,$$

$$\cos A - \cos B + \cos C = 4\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C - 1,$$

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C - 1.$$

Weil nämlich

$$-\cos A + \cos B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$

und

$$\cos C = -\cos(A+B) = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)^2 - 1$$

ist, so ist

$$-\cos A + \cos B + \cos C$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\{\sin\tfrac{1}{2}(A-B) + \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\} - 1$$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - 1,$$

woraus wegen

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}C$$

die erste der zu beweisenden Relationen folgt, aus welcher die beiden anderen sich durch blosse Vertauschung der Buchstaben ergeben.

V.

$$\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2 = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

Weil nämlich

$$\cos C = -\cos(A+B) = -(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$$

ist, so ist, wie man sogleich übersieht:

$$\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2$$
$$= 1 + 2\cos A \cos B(\cos A \cos B - \sin A \sin B),$$

woraus sich, weil

$$\cos C = -(\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$

ist, unmittelbar die zu beweisende Relation ergiebt.

VI.

$$\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 = 2(1 + \cos A \cos B \cos C).$$

Folgt unmittelbar aus V.

VII.

$$2(\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C)$$
$$= \sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2.$$

Ergiebt sich auf der Stelle, wenn man die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens auf folgende Art schreibt:

$$\sin A(\sin B \cos C + \cos B \sin C)$$
$$+ \sin B(\sin C \cos A + \cos C \sin A)$$
$$+ \sin C(\sin A \cos B + \cos A \sin B)$$
$$= \sin A \sin(B + C) + \sin B \sin(C + A) + \sin C \sin(A + B).$$

Natürlich kann man für die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auch den Ausdruck VI. setzen.

VIII.

$$\sin \tfrac{1}{2}A^2 + \sin \tfrac{1}{2}B^2 + \sin \tfrac{1}{2}C^2 = 1 - 2\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C.$$

Das Aggregat auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ist nämlich:

$$\tfrac{1}{2}(1 - \cos A) + \tfrac{1}{2}(1 - \cos B) + \tfrac{1}{2}(1 - \cos C)$$

oder

$$\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C),$$

woraus nach III. die zu beweisende Relation auf der Stelle folgt.

IX.

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 + \cos\tfrac{1}{2}B^2 + \cos\tfrac{1}{2}C^2 = 2(1 + \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C).$$

Folgt unmittelbar aus VIII.

X.

$$4\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}A)\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}B)\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}C)$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C - 1.$$

Es ist nämlich

$$4\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}A)\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}B)\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}C)$$
$$= \sqrt{2}.(\cos\tfrac{1}{4}A - \sin\tfrac{1}{4}A)(\cos\tfrac{1}{4}B - \sin\tfrac{1}{4}B)(\cos\tfrac{1}{4}C - \sin\tfrac{1}{4}C)$$
$$= \sqrt{2}.\{\cos\tfrac{1}{4}(A-B) - \sin\tfrac{1}{4}(A+B)\}(\cos\tfrac{1}{4}C - \sin\tfrac{1}{4}C);$$

aber

$$\tfrac{1}{4}C = 45^0 - \tfrac{1}{4}(A+B),$$

und folglich

$$\cos\tfrac{1}{4}C = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos\tfrac{1}{4}(A+B) + \sin\tfrac{1}{4}(A+B)\},$$

$$\sin\tfrac{1}{4}C = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos\tfrac{1}{4}(A+B) - \sin\tfrac{1}{4}(A+B)\};$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{4}C - \sin\tfrac{1}{4}C = \sqrt{2}.\sin\tfrac{1}{4}(A+B),$$

daher nach dem Obigen:

$$2\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}A)\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}B)\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}C)$$
$$= \{\cos\tfrac{1}{4}(A-B) - \sin\tfrac{1}{4}(A+B)\}\sin\tfrac{1}{4}(A+B)$$
$$= \sin\tfrac{1}{4}(A+B)\cos\tfrac{1}{4}(A-B) - \sin\tfrac{1}{4}(A+B)^2,$$

also:

$$4\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}A)\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}B)\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}C)$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B - \{1 - \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\}$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C - 1,$$

wie bewiesen werden sollte.

XIX.

Einige merkwürdige Ausdrücke für die dreiseitige Pyramide.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Für die Hauptelemente der dreiseitigen Pyramide, nämlich für den Inhalt, den Halbmesser der um die Pyramide beschriebenen Kugel, den Halbmesser der in dieselbe beschriebenen Kugel, u. s. w., lassen sich merkwürdige Ausdrücke entwickeln, wenn man als gegebene Stücke zu Grunde legt: den Halbmesser des um die Grundfläche beschriebenen Kreises, die drei Winkel der Grundfläche, und die drei Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche, wobei es sich von selbst versteht, dass jede Seitenfläche als Grundfläche angenommen werden kann. Diese Ausdrücke zu entwickeln, ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung.

Bei dieser Untersuchung werden wir uns der folgenden Bezeichnungen bedienen. Die Pyramide sei $ABCD$, und ABC sei ihre Grundfläche, also D ihre Spitze; den Halbmesser des um die Grundfläche beschriebenen Kreises bezeichnen wir durch R, und die den Seiten BC, CA, AB der Grundfläche gegenüberstehenden Winkel derselben seien wie gewöhnlich A, B, C; endlich bezeichnen wir die an BC, CA, AB liegenden drei Winkel, welche die Seitenflächen der Pyramide mit der Grundfläche einschliessen, beziehungsweise durch A', B', C'. Dies sind die Stücke, welche wir im Folgenden als gegeben betrachten werden.

§. 2.

Wir legen ein rechtwinkliges dreiaxiges Coordinatensystem der xyz zu Grunde. Der Punkt A sei der Anfang der xyz, und die Ebene der Grundfläche sei die Ebene der xy. Der positive Theil der Axe der x sei die von A nach B hin gehende Gerade; der positive Theil der Axe der y liege auf der Seite der Axe der x, auf welcher der Punkt C liegt; und der positive Theil der Axe der z werde auf der Seite der Ebene der xy angenommen, auf welcher der Punkt D liegt.

Die Coordinaten des Punktes A in diesem Systeme sind 0, 0, 0; die Coordinaten von B sind $2R\sin C$, 0, 0; und die Coordinaten von C sind $2R\cos A\sin B$, $2R\sin A\sin B$, 0; worüber man die vorhergehende Abhandlung: Ueber die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von einander nachsehen kann, auf welche wegen verschiedener im Folgenden zur Anwendung kommender Ausdrücke, welche die Grundfläche der Pyramide betreffen, hier ein für alle Mal verwiesen wird. Alles kommt nun zunächst darauf an, die Coordinaten der Spitze D zu finden, welche wir durch X, Y, Z bezeichnen wollen.

Die Gleichung der durch AB gehenden Seitenfläche der Pyramide ist offenbar:

$$z = y\tang C'$$

oder:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y\sin C' - z\cos C' = 0.$$

Nehmen wir B als den Anfang und BC als den positiven Theil der Axe der x_1 eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_1y_1z_1$ an, in welchem die positiven Theile der Axen der y_1 und z_1 auf ganz ähnliche Art wie vorher angenommen werden; so ist nach 1) in diesem Systeme die Gleichung der Ebene der durch BC gehenden Seitenfläche:

$$y_1\sin A' - z_1\cos A' = 0.$$

Nach den allgemeinen Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten*) ist aber:

---

*) M. s. meine Elemente der analytischen Geometrie. Thl. I. S. 31. Nr. 72.

$$x = c + x_1 \cos(180^0 - B) - y_1 \sin(180^0 - B),$$
$$y = \quad x_1 \sin(180^0 - B) + y_1 \cos(180^0 - B);$$

also:

$$x - c = -x_1 \cos B - y_1 \sin B,$$
$$y = \quad x_1 \sin B - y_1 \cos B;$$

woraus sogleich

$$x_1 = -(x - c)\cos B + y \sin B,$$
$$y_1 = -(x - c)\sin B - y \cos B$$

folgt, so dass also die Gleichung der durch BC gehenden Seitenfläche im Systeme der xyz nach dem Vorhergehenden die folgende ist:

$$2) \quad x \sin B \sin A' + y \cos B \sin A' + z \cos A' = c \sin B \sin A',$$

wobei es sich von selbst versteht, dass $z_1 = z$ zu setzen ist.

Endlich nehme man A als den Anfang und AC als den positiven Theil der Axe der x_2 eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_2y_2z_2$ an, in welchem wiederum die positiven Theile der Axen der y_2 und z_2 auf ganz ähnliche Art, wie vorher immer, angenommen werden; so ist nach 1) in diesem Systeme die Gleichung der Ebene der durch AC gehenden Seitenfläche:

$$y_2 \sin B' - z_2 \cos B' = 0.$$

Nach den allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie in der Lehre von der Verwandlung der Cordinaten ist aber:

$$x = x_2 \cos A - (-y_2) \sin A = x_2 \cos A + y_2 \sin A,$$
$$y = x_2 \sin A + (-y_2) \cos A = x_2 \sin A - y_2 \cos A;$$

also:

$$x_2 = x \cos A + y \sin A,$$
$$y_2 = x \sin A - y \cos A;$$

folglich, wenn man zugleich $z_2 = z$ setzt, im Systeme der xyz die Gleichung der durch CA gehenden Seitenfläche:

$$3) \quad \ldots \quad x \sin A \sin B' - y \cos A \sin B' - z \cos B' = 0.$$

Weil die Spitze D der Pyramide der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Seitenflächen ist, so haben wir zur Bestim-

mung ihrer Coordinaten X, Y, Z nach 1), 2), 3) die drei folgenden Gleichungen:

$$X\sin B\sin A' + Y\cos B\sin A' + Z\cos A' = c\sin B\sin A',$$

$$X\sin A\sin B' - Y\cos A\sin B' - Z\cos B' = 0,$$

$$Y\sin C' - Z\cos C' = 0.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos A\sin B'\cos C' + \cos B'\sin C',$$

$$\cos A'\sin C' + \cos B\sin A'\cos C',$$

$$-\cos B\sin A'\cos B' + \cos A\cos A'.\sin B'$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man, weil

$$\begin{aligned}
&\sin B\sin A'(\cos A\sin B'\cos C' + \cos B'\sin C')\\
&+\sin A\sin B'(\cos A'\sin C' + \cos B\sin A'\cos C')\\
=\ &\sin A\cos A'\sin B'\sin C'\\
&+\sin B\sin A'\cos B'\sin C'\\
&+(\sin A\cos B + \cos A\sin B)\sin A'\sin B'\cos C'\\
=\ &\sin A\cos A'\sin B'\sin C'\\
&+\sin B\sin A'\cos B'\sin C'\\
&+\sin C\sin A'\sin B'\cos C'
\end{aligned}$$

ist, wenn der Kürze wegen:

$$4) \ldots\ldots N = \sin A\cos A'\sin B'\sin C' + \sin B\sin A'\cos B'\sin C' + \sin C\sin A'\sin B'\cos C'$$

gesetzt wird, leicht die Formel:

$$NX = c\sin B\sin A'(\cos B'\sin C' + \cos A\sin B'\cos C').$$

Multiplicirt man die drei obigen Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin A\sin B'\cos C',$$

$$-\sin B\sin A'\cos C',$$

$$\sin A\cos A'\sin B' + \sin B\sin A'\cos B'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$\begin{aligned}
&\cos B\sin A'.\sin A\sin B'\cos C'\\
&+\cos A\sin B'.\sin B\sin A'\cos C'\\
&+\sin C'(\sin A\cos A'\sin B'+\sin B\sin A'\cos B')\\
=\;&\sin A\cos A'\sin B'\sin C'\\
&+\sin B\sin A'\cos B'\sin C'\\
&+(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin A'\sin B'\cos C'\\
&\quad=\sin A\cos A'\sin B'\sin C'\\
&\qquad+\sin B\sin A'\cos B'\sin C'\\
&\qquad+\sin C\sin A'\sin B'\cos C'
\end{aligned}$$

ist, die folgende Formel:

$$NY=c\sin A\sin B\sin A'\sin B'\cos C'.$$

Multiplicirt man endlich die drei obigen Gleichungen nach der Reihe mit

$$\begin{aligned}
&\sin A\sin B'\sin C',\\
&-\sin B\sin A'\sin C',\\
&-\cos A\sin B\sin A'\sin B'-\sin A\cos B\sin A'\sin B'
\end{aligned}$$

und addirt sie wiederum zu einander; so erhält man, weil

$$\begin{aligned}
&\cos A'.\sin A\sin B'\sin C'\\
&+\cos B'.\sin B\sin A'\sin C'\\
&+\cos C'(\cos A\sin B\sin A'\sin B'+\sin A\cos B\sin A'\sin B')\\
=\;&\sin A\cos A'\sin B'\sin C'\\
&+\sin B\sin A'\cos B'\sin C'\\
&+(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin A'\sin B'\cos C'\\
&\quad=\sin A\cos A'\sin B'\sin C'\\
&\qquad+\sin B\sin A'\cos B'\sin C'\\
&\qquad+\sin C\sin A'\sin B'\cos C'
\end{aligned}$$

ist, die folgende Formel:

$$NZ=c\sin A\sin B\sin A'\sin B'\sin C'.$$

Weil nun bekanntlich

$$c = 2R\sin C$$

ist, so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z der Spitze D die folgenden Ausdrücke:

5)

$$NX = 2R\sin B\sin C\sin A'(\cos B'\sin C' + \cos A\sin B'\cos C'),$$

$$NY = 2R\sin A\sin B\sin C\sin A'\sin B'\cos C',$$

$$NZ = 2R\sin A\sin B\sin C\sin A'\sin B'\sin C'.$$

Bezeichnen wir die Höhe der Pyramide durch H, so ist offenbar $H = Z$, und folglich:

6) . . . $NH = 2R\sin A\sin B\sin C\sin A'\sin B'\sin C'$,

woraus man leicht die Formel:

7) . . . $H = \dfrac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin A\cot A' + \sin B\cot B' + \sin C\cot C'}$

erhält.

Bezeichnen wir den Inhalt der Grundfläche und den körperlichen Inhalt der Pyramide respective durch $\varDelta$ und P, so ist

$$P = \tfrac{1}{3}\varDelta H,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\varDelta = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

ist, nach 6) und 7):

8) . . $NP = \frac{4}{3}R^3\sin A^2\sin B^2\sin C^2\sin A'\sin B'\sin C'$

und

9) . . $P = \frac{4}{3}R^3 . \dfrac{\sin A^2\sin B^2\sin C^2}{\sin A\cot A' + \sin B\cot B' + \sin C\cot C'}$.

Auch ist:

10) . . $P = \dfrac{\varDelta^2}{3R(\sin A\cot A' + \sin B\cot B' + \sin C\cot C')}$.

§. 3.

Wir wollen uns jetzt mit der Bestimmung der um die Pyramide beschriebenen Kugel beschäftigen, indem wir die Coordina-

ten des Mittelpunkts dieser Kugel durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und den Halbmesser derselben durch R' bezeichnen.

Weil der Mittelpunkt der um die Pyramide beschriebenen Kugel jederzeit in der durch den Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises auf die Ebene dieses Kreises errichteten Senkrechten liegt; so ist zuvörderst:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \mathfrak{X} = R\sin C, \quad \mathfrak{Y} = R\cos C.$$

Ferner hat man zur Bestimmung von $\mathfrak{Z}$ offenbar die Gleichung

$$\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = (X-\mathfrak{X})^2 + (Y-\mathfrak{Y})^2 + (Z-\mathfrak{Z})^2,$$

woraus sogleich

$$2(X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z}) = X^2 + Y^2 + Z^2$$

folgt; mittelst welcher Gleichung $\mathfrak{Z}$ bestimmt werden muss.

Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\sin B = \sin A\cos C + \cos A\sin C$$

erhält man aus 1) und §. 2. 5) sehr leicht:

$$N(X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y})$$

$$= 2R^2\sin B\sin C\sin A'(\sin B\sin B'\cos C' + \sin C\cos B'\sin C').$$

Eben so leicht ergiebt sich aus §. 2. 5) sogleich:

$$N^2(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

$$= 4R^2\sin B^2\sin C^2\sin A'^2 \left\{ \begin{array}{l} (\cos B'\sin C' + \cos A\sin B'\cos C')^2 \\ + \sin A^2\sin B'^2 \end{array} \right\},$$

oder nach einer leichten Transformation:

$$N^2(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

$$= 4R^2\sin B^2\sin C^2\sin A'^2 \{1 - (\cos B'\cos C' - \cos A\sin B'\sin C')^2\}.$$

Schreibt man nun die obige Gleichung, aus welcher $\mathfrak{Z}$ bestimmt werden muss, unter der Form:

$$\frac{N^2 Z\mathfrak{Z}}{2R^2} = \frac{N^2(X^2 + Y^2 + Z^2)}{4R^2} - N.\frac{N(X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y})}{2R^2},$$

so erhält man zur Bestimmung von $\mathfrak{Z}$ unmittelbar den Ausdruck:

2)

$$\frac{N^2 Z\mathfrak{Z}}{2R^2} = \sin B^2 \sin C^2 \sin A'^2 \{1-(\cos B' \cos C' - \cos A \sin B' \sin C')^2\}$$
$$- N \sin B \sin C \sin A' (\sin B \sin B' \cos C' + \sin C \cos B' \sin C')$$

oder:

$$3) \quad \ldots \ldots \quad \frac{N^2 Z\mathfrak{Z}}{2R^2 \sin B \sin C \sin A'}$$
$$= \sin B \sin C \sin A' \{1 - (\cos B' \cos C' - \cos A \sin B' \sin C')^2\}$$
$$- N(\sin B \sin B' \cos C' + \sin C \cos B' \sin C'),$$

welcher aber einer sehr bemerkenswerthen Transformation fähig ist. Führt man nämlich aus §. 2. 4) den Ausdruck von N in die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ein, so findet man zuvörderst sehr leicht, dass dieselbe sich auf die Form

$$\sin A^2 \sin B \sin C \sin A' \sin B'^2 \sin C'^2$$
$$- (\sin B^2 - 2\cos A \sin B \sin C + \sin C^2) \sin A' \sin B' \cos B' \sin C' \cos C'$$
$$- (\sin B \sin B' \cos C' + \sin C \cos B' \sin C') \sin A \cos A' \sin B' \sin C'$$

bringen lässt. Setzt man aber

$$\cos A = -\cos(B + C),$$

so ergiebt sich sehr leicht:

$$\sin B^2 - 2\cos A \sin B \sin C + \sin C^2$$
$$= (\sin B \cos C + \cos B \sin C)^2 = \sin A^2,$$

und es ist also die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in unserer obigen Gleichung:

$$\sin A \sin B' \sin C' . \sin A \sin B \sin C \sin A' \sin B' \sin C'$$
$$- \sin A \sin B' \sin C' \left\{\begin{array}{l} \sin A \sin A' \cos B' \cos C' \\ + \sin B \cos A' \sin B' \cos C' \\ + \sin C \cos A' \cos B' \sin C' \end{array}\right\}.$$

Folglich ist nach 3):

$$\frac{N^2 Z\mathfrak{Z}}{2R^2 \sin A \sin B \sin C \sin A' \sin B' \sin C'}$$
$$= \sin A \sin B \sin C \sin A' \sin B' \sin C'$$
$$- \left\{\begin{array}{l} \sin A \sin A' \cos B' \cos C' \\ + \sin B \cos A' \sin B' \cos C' \\ + \sin C \cos A' \cos B' \sin C' \end{array}\right\},$$

woraus sich nach §. 2. 5) der sehr merkwürdige, völlig symmetrisch gebildete Ausdruck:

$$4)\;\ldots\;\frac{N\mathfrak{Z}}{R}=\sin A\sin B\sin C\sin A'\sin B'\sin C'-\left\{\begin{array}{l}\sin A\sin A'\cos B'\cos C'\\+\sin B\cos A'\sin B'\cos C'\\+\sin C\cos A'\cos B'\sin C'\end{array}\right\},$$

oder

$$5)\;\ldots\;\frac{N\mathfrak{Z}}{R}=\frac{NZ}{2R}-\left\{\begin{array}{l}\sin A\sin A'\cos B'\cos C'\\+\sin B\cos A'\sin B'\cos C'\\+\sin C\cos A'\cos B'\sin C'\end{array}\right\},$$

oder

$$6)\;\ldots\;\tfrac{1}{2}Z-\mathfrak{Z}=\frac{R}{N}\left\{\begin{array}{l}\sin A\sin A'\cos B'\cos C'\\+\sin B\cos A'\sin B'\cos C'\\+\sin C\cos A'\cos B'\sin C'\end{array}\right\}$$

ergiebt. Leicht erhält man auch hieraus:

$$7)\;\ldots\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}Z-\mathfrak{Z}$$

$$=R\cot A'\cot B'\cot C'\,\frac{\sin A\operatorname{tang}A'+\sin B\operatorname{tang}B'+\sin C\operatorname{tang}C'}{\sin A\cot A'+\sin B\cot B'+\sin C\cot C'},$$

und weil nach §. 2. 5)

$$\tfrac{1}{2}Z=R\,\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A\cot A'+\sin B\cot B'+\sin C\cot C'}$$

ist, so ist:

$$8)$$

$$\mathfrak{Z}=R\,\frac{\sin A\sin B\sin C-\cot A'\cot B'\cot C'\left\{\begin{array}{l}\sin A\operatorname{tang}A'\\+\sin B\operatorname{tang}B'\\+\sin C\operatorname{tang}C'\end{array}\right\}}{\sin A\cot A'+\sin B\cot B'+\sin C\cot C'}.$$

Weil offenbar

$$R'^2=\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2=R^2+\mathfrak{Z}^2,$$

also

$$R'-R^2=\mathfrak{Z}^2$$

ist, so ist nach 8):

$$9) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{R'^2-R^2}{R^2}$$

$$=\left[\frac{\sin A\sin B\sin C-\cot A'\cot B'\cot C'\left\{\begin{array}{l}\sin A\tang A'\\+\sin B\tang B'\\+\sin C\tang C'\end{array}\right\}}{\sin A\cot A'+\sin B\cot B'+\sin C\cot C'}\right]^2$$

oder:

$$10) \ldots\ldots\ldots\ldots R'^2$$

$$=R^2\left\{1+\left[\frac{\sin A\sin B\sin C-\cot A'\cot B'\cot C'\left\{\begin{array}{l}\sin A\tang A'\\+\sin B\tang B'\\+\sin C\tang C'\end{array}\right\}}{\sin A\cot A'+\sin B\cot B'+\sin C\cot C'}\right]^2\right\}.$$

§. 4.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunkts der in die Pyramide beschriebenen Kugel durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und den Halbmesser dieser Kugel durch r'; so erhalten wir mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung aus den Formeln §. 2. 5), wenn wir

$$1) \ldots\ldots N' = \sin A\cos\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'$$
$$+\sin B\sin\tfrac{1}{2}A'\cos\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'$$
$$+\sin C\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\cos\tfrac{1}{2}C'$$

setzen, sogleich die folgenden Formeln:

2)

$$N'\mathfrak{x}=2R\sin B\sin C\sin\tfrac{1}{2}A'(\cos\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'+\cos A\sin\tfrac{1}{2}B'\cos\tfrac{1}{2}C'),$$
$$N'\mathfrak{y}=2R\sin A\sin B\sin C\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\cos\tfrac{1}{2}C',$$
$$N'\mathfrak{z}=2R\sin A\sin B\sin C\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'$$

und

$$3) \ldots r'=2R\frac{\sin A\sin B\sin C\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'}{N'}$$

oder:

$$4) \ldots r'=2R\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A\cot\tfrac{1}{2}A'+\sin B\cot\tfrac{1}{2}B'+\sin C\cot\tfrac{1}{2}C'}.$$

Bezeichnen wir die natürlich stets als positiv zu betrachtenden Entfernungen der Projection des Mittelpunkts der in die Py-

ramide beschriebenen Kugel auf der Ebene ABC von den Seiten a, b, c des Dreiecks ABC durch p_a, p_b, p_c; so ist nach 2):

$$5)\quad \begin{cases} p_a = \dfrac{2R\sin A\sin B\sin C\cos\frac{1}{2}A'\sin\frac{1}{2}B'\sin\frac{1}{2}C'}{N'}, \\ p_b = \dfrac{2R\sin A\sin B\sin C\sin\frac{1}{2}A'\cos\frac{1}{2}B'\sin\frac{1}{2}C'}{N'}, \\ p_c = \dfrac{2R\sin A\sin B\sin C\sin\frac{1}{2}A'\sin\frac{1}{2}B'\cos\frac{1}{2}C'}{N'}; \end{cases}$$

also:

$$6)\quad p_a : p_b : p_c = \cot\tfrac{1}{2}A' : \cot\tfrac{1}{2}B' : \cot\tfrac{1}{2}C'.$$

§. 5.

Die Coordinaten des Schwerpunkts der Pyramide wollen wir durch u, v, w bezeichnen, und setzen als bekannt voraus, dass dieser Punkt in der geraden Linie liegt, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze der Pyramide verbindet, und um den vierten Theil dieser Geraden von der Grundfläche entfernt ist. Weil nun bekanntlich die Coordinaten des Schwerpunkts der Grundfläche ABC

$$\tfrac{2}{3}R(\cos A\sin B + \sin C),\quad \tfrac{2}{3}R\sin A\sin B,\quad 0$$

sind, und wir oben die Coordinaten der Spitze durch X, Y, Z bezeichnet haben; so ist nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie, wie man leicht findet:

$$1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{2R(\cos A\sin B + \sin C) + X}{4}, \\ v = \dfrac{2R\sin A\sin B + Y}{4}, \\ w = \dfrac{Z}{4}; \end{cases}$$

oder:

$$\frac{2u}{R} = \cos A\sin B + \sin C + \frac{X}{2R},$$

$$\frac{2v}{R} = \sin A\sin B + \frac{Y}{2R},$$

$$\frac{2w}{R} = \frac{Z}{2R};$$

und folglich:

$$\frac{2Nu}{R}=N(\cos A\sin B+\sin C)+\frac{NX}{2R},$$

$$\frac{2Nv}{R}=N\sin A\sin B+\frac{NY}{2R},$$

$$\frac{2Nw}{R}=\frac{NZ}{2R};$$

also nach §. 2. 5):

2)

$$\frac{2Nu}{R}=N(\cos A\sin B+\sin C)$$
$$+\sin B\sin C\sin A'(\cos B'\sin C'+\cos A\sin B'\cos C'),$$

$$\frac{2Nv}{R}=N\sin A\sin B+\sin A\sin B\sin C\sin A'\sin B'\cos C',$$

$$\frac{2Nw}{R}=\sin A\sin B\sin C\sin A'\sin B'\sin C'.$$

Bezeichnet man die Entfernungen der Projection des Schwerpunkts auf der Grundfläche ABC von den Seiten a, b, c derselben respective durch q_a, q_b, q_c; so ist nach der zweiten der vorhergehenden Formeln:

3)

$$q_a=\tfrac{1}{2}R\sin B\sin C\left(1+\frac{\sin A\cos A'\sin B'\sin C'}{N}\right),$$

$$q_b=\tfrac{1}{2}R\sin C\sin A\left(1+\frac{\sin B\sin A'\cos B'\sin C'}{N}\right),$$

$$q_c=\tfrac{1}{2}R\sin A\sin B\left(1+\frac{\sin C\sin A'\sin B'\cos C'}{N}\right).$$

Die Entfernung des Schwerpunkts von der Grundfläche ABC wird unmittelbar durch die dritte der Formeln 2) bestimmt.

§. 6.

Wenn wir den Schwerpunkt der Pyramide durch S bezeichnen, so ist

$$\overline{SA}^2=u^2+v^2+w^2;$$

auch ist:

$$\overline{AD}^2=X^2+Y^2+Z^2.$$

Wenn wir nun die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Gleichungen:

$$\frac{2Nu}{R}=N(\cos A\sin B+\sin C)+\frac{NX}{2R},$$

$$\frac{2Nv}{R}=N\sin A\sin B+\frac{NY}{2R},$$

$$\frac{2Nw}{R}=\frac{NZ}{2R};$$

nachdem wir beide Seiten derselben quadrirt haben, zu einander addiren; so erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{4N^2}{R^2}\cdot\overline{SA}^2=\frac{N^2}{4R^2}\cdot\overline{AD}^2+N^2(\sin B^2+\sin C^2+2\cos A\sin B\sin C)\\ +2N(\cos A\sin B+\sin C)\cdot\frac{NX}{2R}\\ +2N\sin A\sin B\cdot\frac{NY}{2R};\end{aligned}$$

und folglich, wenn wir für

$$\frac{NX}{2R}\text{ und }\frac{NY}{2R}$$

ihre Ausdrücke aus §. 2. 5) einführen, weil offenbar

$$\begin{aligned}&\sin B\sin C\sin A'(\cos A\sin B+\sin C)(\cos B'\sin C'+\cos A\sin B'\cos C')\\ &\quad+\sin A^2\sin B^2\sin C\sin A'\sin B'\cos C'\\ &=\sin B\sin C(\cos A\sin B+\sin C)\sin A'\cos B'\sin C'\\ &\quad+\sin B\sin C(\cos A\sin C+\sin B)\sin A'\sin B'\cos C'\end{aligned}$$

ist, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Zeichen:

$$\begin{aligned}\frac{4N^2}{R^2}\cdot\overline{SA}^2=\frac{N^2}{4R^2}\cdot\overline{AD}^2\\ &+N^2(\sin B^2+\sin C^2+2\cos A\sin B\sin C)\\ &+2N\sin B\sin C(\cos A\sin B+\sin C)\sin A'\cos B'\sin C'\\ &+2N\sin B\sin C(\cos A\sin C+\sin B)\sin A'\sin B'\cos C',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{4N^2}{R^2}\cdot\overline{SB}^2=\frac{N^2}{4R^2}\cdot\overline{BD}^2\\ &+N^2(\sin C^2+\sin A^2+2\cos B\sin C\sin A)\\ &+2N\sin C\sin A(\cos B\sin C+\sin A)\sin B'\cos C'\sin A'\\ &+2N\sin C\sin A(\cos B\sin A+\sin C)\sin B'\sin C'\cos A',\end{aligned}$$

$$\frac{4N^2}{R^2}\cdot\overline{SC}^2=\frac{N^2}{4R^2}\cdot\overline{CD}^2$$
$$+N^2(\sin A^2+\sin B^2+2\cos C\sin A\sin B)$$
$$+2N\sin A\sin B(\cos C\sin A+\sin B)\sin C'\cos A'\sin B'$$
$$+2N\sin A\sin B(\cos C\sin B+\sin A)\sin C'\sin A'\cos B'$$

oder:

$$\frac{4N^2}{R^2}\cdot\overline{SA}^2=\frac{N^2}{4R^2}\cdot\overline{AD}^2$$
$$+N^2(\sin B^2+\sin C^2+2\cos A\sin B\sin C)$$
$$+2N(\cos A\sin B+\sin C)\sin B\sin C\sin A'\cos B'\sin C'$$
$$+2N(\cos A\sin C+\sin B)\sin B\sin C\sin A'\sin B'\cos C',$$

$$\frac{4N^2}{R^2}\cdot\overline{SB}^2=\frac{N^2}{4R^2}\cdot\overline{BD}^2$$
$$+N^2(\sin C^2+\sin A^2+2\sin A\cos B\sin C)$$
$$+2N(\cos B\sin C+\sin A)\sin C\sin A\sin A'\sin B'\cos C'$$
$$+2N(\cos B\sin A+\sin C)\sin C\sin A\cos A'\sin B'\sin C',$$

$$\frac{4N^2}{R^2}\cdot\overline{SC}^2=\frac{N^2}{4R^2}\cdot\overline{CD}^2$$
$$+N^2(\sin A^2+\sin B^2+2\sin A\sin B\cos C)$$
$$+2N(\cos C\sin A+\sin B)\sin A\sin B\cos A'\sin B'\sin C'$$
$$+2N(\cos C\sin B+\sin A)\sin A\sin B\sin A'\cos B'\sin C'.$$

Weil nun nach einer bekannten Relation

$$2(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C)$$
$$=\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2$$

und ausserdem

$$(\cos B\sin A+\sin C)\sin C\sin A+(\cos C\sin A+\sin B)\sin A\sin B$$
$$=\sin A\{(\sin B\cos C+\cos B\sin C)\sin A+\sin B^2+\sin C^2\}$$
$$=\sin A(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2),$$

$$(\cos C\sin B+\sin A)\sin A\sin B+(\cos A\sin B+\sin C)\sin B\sin C$$
$$=\sin B\{\sin A^2+(\sin C\cos A+\cos C\sin A)\sin B+\sin C^2\}$$
$$=\sin B(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2),$$

$$(\cos A \sin C + \sin B) \sin B \sin C + (\cos B \sin C + \sin A) \sin C \sin A$$

$$= \sin C \{ \sin A^2 + \sin B^2 + (\sin A \cos B + \cos A \sin B) \sin C \}$$

$$= \sin C (\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2)$$

ist; so erhält man durch Addition der drei obigen Gleichungen die Gleichung:

$$\frac{4N^2}{R^2}(\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2)$$

$$= \frac{N^2}{4R^2}(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2)$$

$$+ 3N^2(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2)$$

$$+ 2N(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2) \sin A \cos A' \sin B' \sin C'$$

$$+ 2N(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2) \sin B \sin A' \cos B' \sin C'$$

$$+ 2N(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2) \sin C \sin A' \sin B' \cos C',$$

also nach §. 2. 4), wenn man zugleich die Gleichung durch N^2 dividirt:

$$\frac{4(\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2)}{R^2}$$

$$= \frac{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2}{4R^2} + 5(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2)$$

oder:

$$\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2$$

$$= \frac{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2}{16} + \tfrac{5}{4}R^2(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2).$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$R^2 \sin A^2 = \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{\overline{BC}^2}{4},$$

$$R^2 \sin B^2 = \tfrac{1}{4}b^2 = \frac{\overline{CA}^2}{4},$$

$$R^2 \sin C^2 = \tfrac{1}{4}c^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4};$$

also:

1) $$\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2$$

$$= \frac{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 5(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)}{16}.$$

Wendet man diese Gleichung auf jede der vier Seitenflächen

ABC, ABD, BCD, CAD

der Pyramide an; so erhält man die vier folgenden Gleichungen:

$$\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2$$

$$=\frac{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2+5(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)}{16},$$

$$\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SD}^2$$

$$=\frac{\overline{CA}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+5(\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{AD}^2)}{16},$$

$$\overline{SB}^2+\overline{SC}^2+\overline{SD}^2$$

$$=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2+\overline{AD}^2+5(\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{BD}^2)}{16},$$

$$\overline{SC}^2+\overline{SA}^2+\overline{SD}^2$$

$$=\frac{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+5(\overline{CA}^2+\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)}{16};$$

und durch Addition dieser vier Gleichungen ergiebt sich:

$$3(\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2+\overline{SD}^2)$$

$$=\frac{12(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)}{16},$$

also:

$$\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2+\overline{SD}^2$$

$$=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2}{4},$$

woraus sich der folgende merkwürdige Satz ergiebt:

In jeder dreiseitigen Pyramide ist die Summe der Quadrate der Entfernungen des Schwerpunkts von den vier Ecken der vierte Theil von der Summe der Quadrate der sechs Kanten.

Anhang.

Wir wollen, uns vorbehaltend, später auf diese Untersuchungen zurückzukommen, einige der im Vorhergehenden erhaltenen Resultate an dem besonderen Falle des Tetraeders oder der regulären Pyramide verificiren.

In diesem Falle ist

$$A = B = C = 60^0,$$

also:

$$\cos A = \cos B = \cos C = \sin 30^0 = \tfrac{1}{2},$$

$$\sin A = \sin B = \sin C = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

und mittelst der sphärischen Trigonometrie findet man leicht:

$$\cos A' = \cos B' = \cos C' = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3},$$

$$\sin A' = \sin B' = \sin C' = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

folglich

$$\tang A' = \tang B' = \tang C' = 2\sqrt{2},$$

$$\cot A' = \cot B' = \cot C' = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Jede Kante des Tetraeders wollen wir als Einheit annehmen, so ist die Höhe der Grundfläche $= \sin A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und folglich der Inhalt der Grundfläche $= \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Die Höhe des Tetraeders ist

$$H = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\sin A' = \sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

und folglich der Inhalt des Tetraeders

$$P = \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{4}\sqrt{3}.\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{1}{12}\sqrt{2}.$$

Ist wie gewöhnlich R der Halbmesser des um die Grundfläche beschriebenen Kreises, so ist

$$R\cos 30^0 = \tfrac{1}{2}R\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}, \quad \text{also} \quad R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bezeichnet R' den Halbmesser der um das Tetraeder beschriebenen Kugel, so hat man offenbar die Gleichung:

$$R^2 = R'^2 - (H - R')^2,$$

woraus

$$R' = \frac{R^2 + H^2}{2H}$$

folgt; also ist nach dem Vorhergehenden:

$$R' = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Bezeichnet r' den Halbmesser der in das Tetraeder beschrie benen Kugel, so ist:

$$r' = R \sin 30^0 . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A' = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A'.$$

Es ist aber

$$2 \sin \tfrac{1}{2}A'^2 = 1 - \cos A' = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3},$$

$$2 \cos \tfrac{1}{2}A'^2 = 1 + \cos A' = 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3};$$

also

$$\sin \tfrac{1}{2}A' = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \cos \tfrac{1}{2}A' = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A' = \sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

und folglich

$$r' = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Nach der Formel §. 2. 7) ist:

$$H = \frac{2 . \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3}}{3 . \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Nach der Formel §. 2. 9) ist:

$$P = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{3 . \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \tfrac{1}{12}\sqrt{2}.$$

Nach der Formel §. 3. 10) ist:

$$R^2 = \tfrac{1}{3}\left\{1 + \left[\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} . 3 . \frac{1}{2}\sqrt{3} . 2\sqrt{2}}{3 . \frac{1}{2\sqrt{2}} . \frac{1}{2}\sqrt{3}}\right]^2\right\},$$

woraus man leicht

$$R'^2 = \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{8}) = \tfrac{3}{8}, \quad \text{also} \quad R' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

findet.

Nach §. 4. 4) ist:

$$r' = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3.\frac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Alle diese Resultate stimmen mit den vorher auf anderem Wege gefundenen vollkommen überein.

Die Entfernung des Schwerpunkts von der Spitze D ist

$$\tfrac{3}{4}H = \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = R',$$

so dass also der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte der um die Pyramide beschriebenen Kugel zusammenfällt, wie sich auch von selbst versteht. Also ist die Summe der Quadrate der Entfernungen des Schwerpunkts von den Ecken

$$4R'^2 = 4.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2}.$$

Die Summe der Quadrate der sechs Kanten ist $= 6$, wovon der vierte Theil $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ist, so dass also die Summe der Quadrate der Entfernungen des Schwerpunkts von den vier Ecken den vierten Theil von der Summe der Quadrate der sechs Kanten beträgt, was wiederum ganz mit dem in §. 6. bewiesenen allgemeinen Satze übereinstimmt.

Durch eine leichte Betrachtung findet man auch

$$u = \tfrac{1}{2}, \quad v = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad w = \frac{1}{2\sqrt{6}};$$

und ganz dieselben Werthe liefern die Formeln §. 5. 2).

XX.

Berichtigung zu der Abhandlung des Herrn Bacaloglo über Fusspunktcurven und Fusspunktflächen in Theil XXXV. Nr. V.

Von

Herrn Doctor *Magener*

in Posen.

Herr Bacaloglo hat in seiner Abhandlung: „Ueber Fusspunktcurven und Fusspunktflächen" (Archiv. Bd. 35. pag. 56.) den Satz aufgestellt: „Das von der Fusspunktfläche eines Ellipsoids begränzte Volumen ist constant für alle Pole, welche auf einer mit der gegebenen Fläche concentrischen Kugel liegen, und gleich der Summe aus dem Viertel des Volumens dieser Kugel und dem der Fusspunktfläche für den Mittelpunkt." Dieser Satz steht im Widerspruche mit dem von mir in dem zunächst vorhergehenden Hefte (Archiv. Bd. 34. pag. 459. und 462.) in der Abhandlung: „Kubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides" bewiesenen Theoreme: „Der geometrische Ort der Pole gleicher Fusspunktenkörper für ein ungleichaxiges Ellipsoid ist wiederum ein ungleichaxiges Ellipsoid, nicht aber eine Kugel", und es lag mir daher nahe, den Fehler in der obigen Abhandlung aufzudecken.

Führt man in die von mir pag. 451. entwickelte Gleichung der Fusspunktenfläche eines Ellipsoides:

$$\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}^2=a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2+c^2(z-\gamma)^2$$

die Polarcoordinaten:

$$x-\alpha=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y-\beta=r\sin\vartheta\sin\varphi;\quad z-\gamma=r\cos\vartheta$$

ein, so erhält man die von Herrn B. richtig aufgestellte Gleichung:

$$r = -\{\alpha\sin\vartheta\cos\varphi + \beta\sin\vartheta\sin\varphi + \gamma\cos\vartheta\}$$
$$\pm\sqrt{a^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\vartheta},$$

oder, wenn man

$$r_1 = \alpha\sin\vartheta\cos\varphi + \beta\sin\vartheta\sin\varphi + \gamma\cos\vartheta,$$
$$r_2 = \sqrt{a^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\vartheta}$$

setzt, $r = -r_1 \pm r_2$ oder $r = r_1 \pm r_2$.

Hieraus ergiebt sich der körperliche Inhalt $V_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides für den Pol (α, β, γ):

$$\text{A)} \qquad V_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{1}{3}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(r_1+r_2)^3\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

oder

$$\text{B)} \qquad V_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{1}{3}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r_1^3\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$
$$+\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r_1^2 r_2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi + \int_0^\pi\int_0^{2\pi} r_1 r_2^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$
$$+\frac{1}{3}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r_2^3\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

In diesem Ausdrucke sind das erste und dritte Integral für die angegebenen Grenzen gleich Null, das vierte giebt V_0, den Fusspunktenkörper für den Mittelpunkt des Ellipsoides; das zweite dagegen verschwindet nicht, sondern reducirt sich auf folgendes dreitheilige Integral:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\{\alpha^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \gamma^2\cos^2\vartheta\}$$
$$\times\sqrt{a^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\vartheta}\,\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

was sich ohne Transformation sogleich ergiebt, wenn man auf die Natur der Elemente der Integrale Rücksicht nimmt. Diese drei Theile entsprechen den Werthen V_α, V_β, V_γ in meiner Abhandlung.

Herr B. hat nun bei der Integration darin sich geirrt, dass er 1) behauptet, dass das Integral

$$\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r_1{}^3 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

gleich einem Viertel der Kugel sei, deren Radius gleich dem Abstande des Pols vom Mittelpunkte des Ellipsoides ist, und 2) dass das zweite Integral gleich Null ist, indem er bei der Transformation desselben, wie es scheint, bei'm ersten Integral $\cos^2\varphi d\varphi = \sqrt{\cos^2\varphi}\cos\varphi d\varphi = \sqrt{\cos^2\varphi} d\sin\varphi$ setzt und mit $\cos^2\varphi$ die Grössen unter dem Wurzelzeichen multiplicirt, also den stets positiven quadratischen Faktor $\cos^2\varphi$ in zwei Faktoren zerlegt, von welchen der eine zwar in den verschiedenen Quadranten das Vorzeichen wechselt, der andere aber fälschlich immer dasselbe Vorzeichen behält und analog bei den andern Integralen verfährt. Hierdurch ist denn natürlich auch das falsche Endresultat herbeigeführt worden.

Zur Verification des eben Angeführten wollen wir den einfachen Fall betrachten, wo die Basis eine Kugel ist und der Pol auf der Oberfläche derselben liegt. Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Pol (α, β, γ) und lässt die X-Axe vom Pole durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, so wird $\beta=\gamma=0$, $\alpha=R$, $r_1=R\sin\vartheta\cos\varphi$ und $r_2=R$, wenn R den Radius der Kugel bedeutet; mithin wird V^s, der Inhalt des entsprechenden Fusspunktenkörpers, nach der Formel B):

$$V^s=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^3\sin^4\vartheta\cos^3\varphi d\vartheta d\varphi$$

$$+\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^3\sin^3\vartheta\cos^2\varphi d\vartheta d\varphi+\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^3\sin^2\vartheta\cos\varphi d\vartheta d\varphi$$

$$+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^3\sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

In diesem Ausdrucke ist das erste und das dritte Integral gleich Null, wie man sogleich sieht, wenn man zuerst nach φ von 0 bis 2π integrirt; ferner ist, da

$$\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta d\vartheta=\left\{\frac{1}{12}\cos3\vartheta-\frac{3}{4}\cos\vartheta\right\}_0^{\pi}=\frac{4}{3}$$

und

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\left\{\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\varphi}{2}\right\}_0^{2\pi}=\pi$$

ist, das zweite Integral:

$$R^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\vartheta\cos^2\varphi d\vartheta d\varphi=\frac{4}{3}\pi R^3;$$

endlich ist das vierte Integral:

$$\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi=\frac{4}{3}\pi R^3;$$

folglich ist der Fusspunktenkörper $V^s=\frac{8}{3}\pi R^3$, gleich der doppelten Kugel vom Radius R, was mit dem von mir pag. 472. hergeleiteten Resultate übereinstimmt, während der oben angeführte Satz des Herrn B. damit im Widerspruche steht.

Der Inhalt dieses Fusspunktenkörpers lässt sich auch leicht direct ohne Berücksichtigung früherer Rechnungen aus der Fusspunktencurve des Kreises herleiten, wenn man den Körper als durch Umdrehung entstanden betrachtet. Wenn die Basis ein Kreis ist und der Pol im Umfange desselben liegt, so verlege man, wie oben, den Anfangspunkt der Coordinaten in den Pol und lasse die X-Axe vom Pole durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. Ist nun R der Radius des gegebenen Kreises und φ der Winkel, den ein beliebiger Radiusvector r der Fusspunktencurve mit der X-Axe macht, so ist, da nach Taf. II. Fig. 1.*) $AB=OC\pm AD$ $=R+R\cos\varphi$ ist, die Polargleichung der Fusspunktencurve:

$$r=R(1+\cos\varphi).$$

Dreht sich nun die eine Hälfte der Fusspunktencurve um die X-Axe einmal ganz herum, so entsteht der entsprechende Fusspunktenkörper, und wir erhalten seinen Inhalt nach der Formel:

$$V^s=\pi\int y^2dx.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi=R(\cos\varphi+\cos^2\varphi),\\
y^2 &= r^2\sin^2\varphi=R^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\sin^2\varphi,\\
dx &= -R(1+2\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi;
\end{aligned}$$

folglich:

$$V^s=-\pi R^3\int_{\pi}^{0}\{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\}\{1+2\cos\varphi\}\sin^3\varphi d\varphi,$$

---

*) Diese Figur kann erst im nächsten Hefte geliefert werden, weil zu dem vorliegenden Hefte eine ganze Figurentafel zu geben keine Veranlassung war. G.

oder

$$V^s = \pi R^3 \int_0^\pi \{1 + 4\cos\varphi + 5\cos^2\varphi + 2\cos^3\varphi\} \sin^3\varphi d\varphi.$$

Da nun

$$\int_0^\pi \{4\cos\varphi + 2\cos^3\varphi\} \sin^3\varphi d\varphi = 0 \text{ und } \int_0^\pi (1 + 5\cos^2\varphi) \sin^3\varphi d\varphi = \frac{8}{3}$$

ist, so erhält man:

$$V^s = \pi R^3 \int_0^\pi (1 + 5\cos^2\varphi) \sin^3\varphi d\varphi = \frac{8}{3}\pi R^3,$$

mithin ist, übereinstimmend mit dem Früheren, der Fusspunktenkörper V^s gleich der doppelten zu Grunde liegenden Kugel.

Posen, den 16. April 1861. Dr. Magener.

Nachschrift von Herrn E. Bacaloglo in Leipzig *).

Wie Herr Dr. Magener richtig bemerkt, ist in der erwähnten Abhandlung über Fusspunktörter in dem Ausdruck für das von der Fusspunktfläche des Ellipsoides begrenzte Volumen W:

$$\text{(a)} \quad W = \tfrac{1}{3}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_1^3 \sin\theta d\theta d\varphi + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_1^2 r_2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$+ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_1 r_2^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \tfrac{1}{3}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_2^3 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

wo

$$r_1 = l\sin\theta\cos\varphi + m\sin\theta\sin\varphi + n\cos\theta,$$

$$r_2 = \sqrt{a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\theta}$$

ist, nicht das zweite und dritte, sondern das erste und dritte Doppelintegral gleich Null. Man erhält dann für W den Ausdruck:

*) Ich hatte natürlich Herrn Dr. Magener's vorstehenden Aufsatz vor seinem Abdruck Herrn Bacaloglo mitgetheilt, worauf er, meine Mittheilung in der freundlichsten Weise aufnehmend, mir obige Nachschrift sandte. G.

$$W = l^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_2 \sin^3\theta \cos^2\varphi d\theta d\varphi$$

$$+ m^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_2 \sin^3\theta \sin^2\varphi d\theta d\varphi + n^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_2 \sin\theta \cos^2\theta d\theta d\varphi$$

$$+ \tfrac{1}{3} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_2^3 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Bezeichnet nun, wie in meiner früheren Abhandlung,

$$\Omega = \tfrac{1}{3} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_2^3 \sin\theta d\theta d\varphi$$

den Körperinhalt der Fusspunktfläche für den Mittelpunkt, und setzt man:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_2 \sin^3\theta \cos^2\varphi d\theta d\varphi = A^2,$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_2 \sin^3\theta \sin^2\varphi d\theta d\varphi = B^2, \quad \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_2 \sin\theta \cos^2\theta d\theta d\varphi = C^2,$$

wozu man berechtigt ist, da die Elemente dieser Integrale beständig positiv bleiben, so wird:

$$\text{(b)} \qquad W = A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 + \Omega.$$

Aus dieser, wie aus der früher von mir gegebenen Formel (63) [oben unter (a) reproducirt], folgt offenbar der Satz, dass **der Mittelpunkt des Ellipsoides ein Minimumpol ist.**

Obige Formel (b) zeigt ebenfalls, dass **die Pole der Fusspunktflächen mit constantem Volumen auf einem, mit dem ursprünglichen concentrischen Ellipsoide liegen,** welcher Satz überhaupt nur ein specieller Fall des unter Formel (66) a. a. O. von mir aufgestellten Satzes ist.

XXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herausgeber.

In den Exercices d'Analyse numérique par V. A. Le Besgue. Paris 1859. p. 104. wird folgende sehr merkwürdige Zerlegung als von Prouhet und Cayley gefunden angegeben:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)&(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2+f'^2+g'^2+h'^2)\\
= \quad &(aa'+bb'+cc'+dd'+ee'+ff'+gg'+hh')^2\\
&+(ab'-ba'-cd'+dc'-ef'+fe'-gh'+hg')^2\\
&+(ac'+bd'-ca'-db'+eg'-fh'-ge'+hf')^2\\
&+(ad'-bc'+cb'-da'-eh'-fg'+gf'+he')^2\\
&+(ae'+bf'-cg'+dh'-ea'-fb'+gc'-hd')^2\\
&+(af'-be'+ch'+dg'+eb'-fa'-gd'-hc')^2\\
&+(ag'+bh'+ce'-df'-ec'+fd'-ga'-hb')^2\\
&+(ah'-bg'-cf'-de'+ed'+fc'+gb'-ha')^2.\end{aligned}$$

Für $e=f=g=h=0$, $e'=f'=g'=h'=0$ erhält man hieraus die längst bekannte Relation:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)&(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)\\
= \quad &(aa'+bb'+cc'+dd')^2\\
&+(ab'-ba'-cd'+dc')^2\\
&+(ac'+bd'-ca'-db')^2\\
&+(ad'-bc'+cb'-da')^2,\end{aligned}$$

und wenn man nun noch

$$c = d = 0,\quad c' = d' = 0$$

setzt, so ergiebt sich:

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2,$$

wie gleichfalls bekannt genug ist.

Von dem Herausgeber.

Es ist

$$\begin{aligned}(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) - (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)(a_2 a_0 + b_2 b_0 + c_2 c_0) \\ = (a_0 b_1 - b_0 a_1)(a_0 b_2 - b_0 a_2) \\ + (b_0 c_1 - c_0 b_1)(b_0 c_2 - c_0 b_2) \\ + (c_0 a_1 - a_0 c_1)(c_0 a_2 - a_0 c_2).\end{aligned}$$

XXII.

Miscellen.

Berichtigung und Bemerkung.

Hochverehrter Herr Professor. Als ich meine Abhandlung Nr. XXVII. Thl. 34. dieses Archivs las, bemerkte ich, dass ich in derselben p. 399. Z. 12—16 einen für den Zweck der Arbeit zwar unwesentlichen, doch aber an sich nicht zu entschuldigenden Fehlschluss gemacht habe, der sich jedem unbefangenen Leser sogleich zu erkennen gibt. Es muss statt jener Zeilen heissen:

„Eine aufmerksame Betrachtung der Reihe (1. b) und der weiteren Rechnungen ergibt, was auch schon anderweitig unmittelbarer einleuchtet, dass $E = 0$ ist, es mag die ursprüngliche Reihe aus einer graden oder ungraden Anzahl Glieder bestehend angesehen werden, so dass immer u. s. w.“

Auch fehlt an der Reihe (1. b) der Index $n = \infty$.

Gestatten Sie mir noch die folgende Bemerkung. Ich erinnere mich, in Ohm's „Geist der mathematischen Analysis" gelesen zu haben, dass es nicht erlaubt sei, die Glieder einer unendlichen Reihe, unbeschadet ihrer Summe, so wie die einer endlichen Reihe, d. i. in beliebiger Reihenfolge, zu summiren. Ohm gibt auch in einer Anmerkung hierzu Beispiele, nämlich eine Anzahl Reihen, welche nach bestimmten Gesetzen aus einer zuerst gegebenen abgeleitet werden und von dieser sich scheinbar nur durch die Verschiedenheit der Aufeinanderfolge ihrer Glieder unterscheiden. Ein genaueres Zusehen verschaffte mir aber schon damals die Ueberzeugung, dass die abgeleiteten Reihen keineswegs aus denselben Gliedern bestehen, wie die Ausgangsreihe, dass vielmehr unendlich viele derselben für die Summation so wenig vorhanden sind, wie die Glieder

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

in der von Herrn Schlömilch für $f(\varrho)_{\varrho=0}$ abgeleiteten Reihe (s. Abh. XXVII.) und dass dieses die Ursache sei, wesshalb die Summenformeln der abgeleiteten Reihen so beträchtlich von jener der zuerst gegebenen Reihe abweichen. Dieses einzusehen scheint nicht schwierig und es möge daher diese einfache Bemerkung genügen.

Wollen Sie, hochverehrter Herr Professor, die Güte haben, vorstehende Zeilen in Ihr geschätztes Archiv aufzunehmen.

Dortmund am 7. August 1860 *).

Julius Bode.

---

*) Der Abdruck ist durch zufällige Umstände, deren Beseitigung nicht in meiner Macht lag, sehr verspätet worden. G.

Druckfehler.

In Thl. XXXV. auf S. 6. muss in dem Ausdrucke von $G_{01}+G_{10}$ in den Formeln 16) am Ende der Seite das Minuszeichen vor dem Bruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wegfallen.

Im Literarischen Bericht Nr. CXXXIX. S. 16. Z. 11. v. o. statt „Axion" s. m. „Axiom."

Verzeichniss der bis jetzt im Archiv angezeigten Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmen-Tafeln, Stereotyp-Ausgabe von 1860.

Nr.	Fehler.	Angezeigt Theil.	Angezeigt Seite.
1.	Taf. I. S. 29. Fusstafel, Spalte $^{\circ\prime\prime\prime}$, Z. 1. statt 3.35.40 lies: 0.35.40	XXXIV.	368
2.	Taf. I. S. 174. Fusstafel, Spalte $^{\circ\prime\prime\prime}$, Z. 1. statt 1.15.40 lies: 0.15.40	XXXV.	120
3.	Taf. I. S. 174. Fusstafel, Spalte $^{\circ\prime\prime\prime}$, Z. 3. statt 0.36.40 lies: 2.36.40	XXXV.	120
4.	Taf. II. S. 324. Differ. zwisch. $\log\sin 20^{\circ}6'30''$ und $40''$ statt 675 lies: 575	XXXV.	120
5.	Taf. I. S. 136. log 75000 statt 8150613 lies: 815$\overline{0}$613	XXXVI.	384

XXIII.

Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichts.

Von

Herrn *Eugen Lommel*,

Professor in Schwyz.

---

§. 1. Wenn eine ebene Welle homogenen Lichtes (ein Bündel paralleler Lichtstrahlen) einem irgendwie durchbrochenen, sonst undurchsichtigen Schirme begegnet, so werden hinter dem Schirm, neben den direkt durchgegangenen Strahlen, auch noch gebeugte Strahlen sich fortpflanzen, indem nach dem Principe des Huyghens jeder Punkt der beleuchteten Oeffnung als ein leuchtender Punkt anzusehen ist, welcher nach allen Seiten hin Lichtstrahlen aussendet. Ein Fernrohr, welches man, um die Beugungserscheinung zu beobachten, hinter dem Schirm aufgestellt hat, oder auch ein blosses Auge, wird immer alle diejenigen Strahlen in einem Punkte vereinigen, welche mit der nämlichen Richtung parallel sind, oder welche der nämlichen ebenen Stelle angehören. Will man für irgend eines dieser Bündel paralleler Strahlen den Vereinigungspunkt finden, so braucht man nur auf einer durch den optischen Mittelpunkt des Objektivs parallel mit der Richtung des Bündels gezogenen Geraden gegen den Beobachter hin die Brennweite des Objektivs aufzutragen; vollendet man diese Construktion für alle Strahlenbündel, so erhält man als geometrischen Ort des Beugungsbildes eine vom optischen Mittelpunkt des Objektivs aus mit dessen Brennweite als Radius beschriebene Halbkugel, deren Grundfläche mit der Schirmebene parallel läuft. Die Lage des optischen Mittelpunktes übt, wie man sieht, keinen Einfluss aus auf die Construktion des Beugungsbildes; eine Nei-

gung der Fernrohraxe zur Schirmebene wird nur bewirken, dass eine durch den optischen Mittelpunkt zur Axe senkrecht gelegte Ebene von der halbkugeligen Bildfläche eine Schnitze lostrennt, welche ausserhalb des Fernrohrs fällt, und daher durch dasselbe nicht gesehen werden kann, während der noch sichtbare Theil nicht die mindeste Aenderung dadurch erleidet. Das ganze Bild übersieht man nur dann, wenn die Fernrohraxe senkrecht steht zur Schirmebene; diese letztere Stellung ist es, welche wir in den folgenden Untersuchungen dem Fernrohr gegeben denken.

§. 2. Wird ein Fernrohr ohne Dazwischenkunft eines Schirmes der einfallenden Welle dargeboten, so vereinigen sich alle auf das Objektiv treffenden Strahlen in dessen Brennpunkt, ohne dass zugleich gebeugtes Licht wahrnehmbar wäre. Die Oeffnung des Objektivs, ja selbst die Pupille unseres Auges, ist nämlich zu gross, um eine merkliche Beugungserscheinung hervorzubringen. Man erkennt in der That aus dem analytischen Ausdruck, welcher sich für die von solchen kreisrunden Oeffnungen erzeugte Beugungserscheinung aufstellen lässt, dass die hellen und dunkeln Ringe, welche den von den direkten Lichtstrahlen entworfenen Lichtpunkt umsäumen, um so schmäler werden, je grösser man die Oeffnung annimmt, und endlich ganz verschwinden, wenn die Oeffnung unendlich gross gedacht wird. Nehmen wir daher, in Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit, an, dass bei unbedecktem Objektiv keine merkliche Begungserscheinung stattfinde, so ist diess, für den Calcul, gleichbedeutend mit der Annahme, dass das Objektiv, ebenso wie die einfallende Welle, nach allen Seiten unbegrenzte Ausdehnung besitze. Diese Anschauungsweise soll nun im Folgenden durchaus festgehalten werden.

§. 3. Wir wählen jetzt die Schirmebene zur xy-Ebene eines Systems räumlicher Orthogonalcoordinaten, dessen positive z-Axe gegen den Beobachter gerichtet ist; in den Anfangspunkt, dessen Wahl unserm Belieben völlig anheim steht, verlegen wir den optischen Mittelpunkt des Objektivs. Unsere Aufgabe ist nun zunächst die, für jeden gegebenen Zeitpunkt den Bewegungszustand eines beliebigen Punktes der Bildfläche zu ermitteln. Die Bewegung desjenigen Punktes der Halbkugel, dessen zugehöriger Radius mit den drei Axen der x, y und z Winkel bildet, deren Cosinus a, b und c heissen, ist offenbar die Resultirende aller Elementarbewegungen derjenigen Wellenebene, welche die Halbkugel in dem Punkte (a, b, c) berührt. Bezeichnen wir nun mit v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts, mit λ die Wellenlänge der einfallenden Strahlen, und zählen wir die Zeit t von jenem Momente an, in welchem der im Coordinatenanfang liegende

Aetherpunkt seine Schwingungen begann, so besitzt derselbe zur Zeit t die Phase

$$\frac{2\pi}{\lambda}.vt;$$

die nämliche Phase ist allen Aetherthei1chen gemein, welche mit jenem auf der nämlichen, durch den Ursprung senkrecht zur Richtung der direkt einfallenden Strahlen gelegten Wellenebene sich befinden. Bildet aber die Richtung der direkten Strahlen mit den Axen der x, y, z Winkel, deren Cosinus der Reihe nach l, m, n sind, so wird dem Punkte (x, y) auf der Schirmebene, welcher von der vorhin genannten Wellenebene um die Grösse $lx + my$ absteht, die Phase

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt - lx - my)$$

zukommen. Der Punkt (x, y) muss nun, nach dem Huyghen'schen Princip, als leuchtender Punkt angesehen werden, der nach allen Seiten Lichtstrahlen aussendet. Der Strahl, welcher die Richtung (a, b, c) verfolgt, hat (wenn die Brennweite des Objektivs oder der Radius der Bildfläche durch f vorgestellt wird), bis zur obenerwähnten Tangentialebene den Weg $f-(ax+by)$ zurückzulegen, und wird demnach mit der Phase

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt - f - (l-a)x - (m-b)y)$$

daselbst anlangen. Die Excursion, welche der von (x, y) ausgehende, nach (a, b, c) gerichtete Strahl auf jener die Bildfläche berührenden Wellenebene erzeugt, d. h. die Entfernung des daselbst liegenden Aethertheilchens von seiner Gleichgewichtslage, erhält man, wenn man den Sinus dieser Phase multiplicirt mit der Amplitude des Strahls. Um für letztere einen Ausdruck zu gewinnen, denken wir uns aus dem einfallenden Lichte ein Strahlenbündel herausgehoben, dessen senkrechter Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, und alle Elementarstrahlen desselben zu einem einzigen Strahle vereinigt; die Amplitude dieses Strahls wird der Summe der Amplituden aller Elementarstrahlen gleich sein; bezeichnen wir diese Summe mit A, so wird das unendlich dünne Strahlenbündel, welches dem Elemente $dxdy$ des Schirmes senkrecht begegnet, die Amplitude $Adxdy$ besitzen; bildet dagegen, wie wir oben angenommen haben, die Richtung der direkten Strahlen mit der Normalen des Elementes $dxdy$ (welche zur z-Axe parallel ist) einen Winkel, dessen Cosinus $= n$ ist, so wird demselben nur die Amplitude $nAdxdy$ zukommen; die Excursion,

welche der vom Punkte (x, y) des Schirmes ausgehende Strahl auf der Berührungsebene der Bildfläche erzeugt, wird demnach durch

$$nAdxdy \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt-f-(l-a)x-(m-b)y)$$

ausgedrückt sein. Zufolge dem Princip der Uebereinanderlagerung kleiner Bewegungen erhält man die Excursion des Bildpunktes (a, b, c), wenn man alle Excursionen addirt, welche in der zugehörigen Tangentialebene stattfinden, d. h. wenn man das Doppelintegral

$$1) \qquad nA\iint \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt-f-(l-a)x-(m-b)y)dydx$$

über alle jene Punkte des Schirmes ausdehnt, welche dem Lichte den Durchgang verstatten. Mit Hilfe dieses Integrals lassen sich dann alle Umstände angeben, welche die Oscillation des Punktes (a, b, c) begleiten, also namentlich auch die Lichtintensität, welche er auf der Bildfläche hervorbringt. Da nun das Integral nur von den Coordinaten fa, fb der Projektion des Bildpunktes auf die Schirmebene abhängig ist, so wollen wir uns die im Punkte (a, b, c) der halbkugeligen Bildfläche stattfindende Lichtstärke auf der Schirmebene selbst im Punkte (fa, fb), oder, da es uns nicht auf die absolute Grösse, sondern nur auf die Gestalt des Bildes ankommt, in irgend einem Punkte des Schirmes aufgetragen denken, dessen Coordinaten den Grössen (a, b) proportional sind, und statt des halbkugeligen Bildes selbst nur diese seine Projektion weiter untersuchen.

§. 4. Stehen die direkten Strahlen senkrecht zum Schirm, hat man also $l=0$, $m=0$, $n=1$, so geht das obige Integral über in

$$A\iint \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt-f+ax+by).dydx;$$

denkt man sich nun in dem ersten Integral die Grössen a, b beziehlich durch a', b' ersetzt, so erkennt man leicht, dass es sich von dem letzteren nur durch den constanten Faktor n unterscheidet, welcher angibt, wieviel weniger Lichtstrahlen in geneigter Richtung durch die nämliche Oeffnung dringen, sobald man nur

$$a'-l=a, \quad b'-m=b$$

nimmt; um also aus der bei senkrecht einfallendem Licht stattfindenden Beugungserscheinung diejenige bei schiefem Einfallen abzuleiten, braucht man nur die für erstere entworfene Projektion

parallel mit sich selbst zu verschieben, bis der frühere Anfangspunkt, in welchem sich die direkten Strahlen sammelten, mit der Projektion (l, m) des jetzt vom direkten Licht getroffenen Bildpunktes zusammenfällt, und dann das ganze Bild mit einem constanten, von der Richtung der direkten Strahlen abhängigen Faktor gleichmässig zu beschatten; im Uebrigen erfährt die Projektion des Bildes bei dieser Verschiebung nicht die mindeste Aenderung, während das halbkugelige Bild selbst eine um so grössere Verzerrung erleidet, je weiter die Verschiebung geht. Wir dürfen uns sonach auf die Betrachtung des letzteren Integrales, bei welchem die direkt einfallenden Strahlen senkrecht zur Schirmebene gedacht sind, beschränken, führen aber von nun an der Kürze wegen die Bezeichnungen

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt-f)=p\,,\quad \frac{2\pi a}{\lambda}=q,\quad \frac{2\pi b}{\lambda}=r$$

in dasselbe ein, indem wir zugleich den Faktor A der Einheit gleichsetzen, weil ja doch nur die Intensitätsverhältnisse, nicht die wirkliche Lichtstärke des Bildes Gegenstand unserer Aufgabe sein können. In dem so abgeänderten Doppelintegral

$$\text{II)}\qquad \iint \sin(p+qx+ry)dydx$$

können die Grössen q und r, welche den Cosinussen a und b direkt, der Wellenlänge λ aber umgekehrt proportional sind, selbst als Coordinaten der Bildprojektion angesehen werden.

§. 5. Um nun das letztere Integral in der bequemen Form eines Produktes aus Amplitude und Phasensinus zu erhalten, lösen wir zunächst den Sinus auf, indem wir den Theil p der Phase, welcher die Zeit t in sich schliesst, von dem übrigen Theile, welcher die Coordinaten x und y enthält, trennen, und erhalten:

$$\sin p\iint\cos(qx+ry)dydx+\cos p\iint\sin(qx+ry)dydx=C\sin p+S\cos p,$$

wo abkürzend

$$\iint\cos(qx+ry)dydx=C \quad\text{und}\quad \iint\sin(qx+ry)dydx=S$$

gesetzt wurde. Setzt man alsdann

$$C=J\cos i \quad\text{und}\quad S=J\sin i,$$

so wird

$$C\sin p+S\cos p=J\sin(p+i),$$

während die Gleichungen

$$\operatorname{tang} i = \frac{S}{C}$$

und

$$J^2 = C^2 + S^2$$

zur Bestimmung von i und J dienen. Der Ausdruck J^2 gibt die Lichtstärke des Punktes (q, r) an.

§. 6. Wir denken uns jetzt das Integral (II) für eine beliebige in einem dunkeln Schirm angebrachte Oeffnung hergestellt, und vergleichen damit den Ausdruck, der sich für ein dunkles, mit jener Oeffnung congruentes Schirmchen ergibt, welches der einfallenden nach allen Seiten unbegrenzten Lichtwelle in den Weg tritt. Man muss in diesem Falle die Integration des Ausdrucks

$$\sin(p + qx + ry) \,.\, dydx$$

von den Wänden des Schirmchens an nach allen Seiten bis in's Unendliche ausdehnen, oder, was dasselbe ist, man muss von der Excursion, welche durch die gesammte Welle hervorgebracht würde, die Wirkung desjenigen Theiles abziehen, welcher vom Schirmchen verdeckt wird. Man erhält so

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(p + qx + ry) \,.\, dydx - \iint \sin(p + qx + ry) \,.\, dydx,$$

wo die Grenzen des zweiten Doppelintegrals die nämlichen sind, wie oben bei der kleinen Oeffnung. Um den Werth des ersten Doppelintegrals kennen zu lernen, denken wir uns die einfallende Welle parallel zur Abscissenaxe in unendlich viele geradlinige Streifen von der Breite β zerlegt. Das Integral nach y zerfällt dadurch in eine unendliche Menge von Integralen, deren jedes einem Streifen der Lichtwelle entspricht; ein beliebiges derselben, z. B.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} \sin(p + qx + ry) \,.\, dy$$

liefert nach vollendeter Integration der Ausdruck:

$$-\frac{1}{r}(\cos(p + qx + r\alpha + r\beta) - \cos(p + qx + r\alpha)),$$

welcher Null wird, sobald man die Breite β der Streifen, welche ja beliebig gewählt werden kann, aus der Gleichung $r\beta = 2\nu\pi$ bestimmt, während ν eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Die Bestimmung von β aus dieser Gleichung wird nur dann unmöglich,

wenn $r=0$ ist; alsdann kann man, so lange nur q nicht Null ist, die Lichtwelle in Streifen zerlegen, welche der Ordinatenaxe parallel laufen und nun zuerst nach x integriren; jedes einzelne, einem solchen Streifen entsprechende Integral wird alsdann Null aus den nämlichen Gründen wie vorher. Wenn also q und r nicht gleichzeitig Null sind, verschwindet das Doppelintegral mit den unendlichen Grenzen vollständig, und man behält für die Excursion des Bildpunktes (q, r) nur noch den Ausdruck:

$$-\iint \sin(p+qx+ry)\,.\,dydx,$$

welcher sich von dem für eine gleichgrosse und gleichgestaltete Oeffnung geltenden nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen unterscheidet. Da der Lichteindruck, welchen ein schwingender Aetherpunkt hervorbringt, durch das Quadrat der Amplitude dargestellt wird, so verschwindet bei der Berechnung desselben der Zeichenunterschied; die Lichterscheinung also, welche durch ein dunkles Schirmchen hervorgebracht wird, ist vollkommen identisch mit derjenigen, welche von einer gleichgestalteten und gleichgrossen Oeffnung herrührt, mit alleiniger Ausnahme desjenigen Punktes, welcher von den direkten Strahlen getroffen wird. Dieser besitzt nämlich, weil für ihn $q=r=0$ ist, die Excursion

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dydx - \iint dydx\right).\sin p;$$

seine Amplitude, welche durch den eingeklammerten Faktor vorgestellt wird, ist demnach gleich der Amplitude der ganzen Welle vermindert um die Amplitude desjenigen Theils, welcher von dem dunkeln Schirmchen aufgehalten wird. In beiden Fällen also, für das dunkle Schirmchen und die Oeffnung, ist die Amplitude des direkt beleuchteten Punktes gleich der Summe der Amplituden aller durch das Objektiv (oder die Pupille des Auges) wirklich eindringenden Strahlen.

Alle diese Schlussfolgerungen sind ganz unabhängig von der Natur der Grenzen des zweiten Doppelintegrals; sie gelten daher nicht nur für eine Oeffnung und ein Schirmchen, sondern auch für beliebige Gruppen von Oeffnungen und Schirmchen.

§. 7. Der im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Satz lässt sich leicht auch durch folgende elementare Betrachtungen beweisen. Sei A (Taf. II. Fig. 2.) ein beliebiger Punkt am Rande einer kleinen Oeffnung und AS irgend ein von demselben ausgehender gebeugter Strahl, und legen wir durch letzteren sekrecht

zur Ebene des Schirmes (oder der mit ihm congruirenden Welle) eine Ebene, so schneidet diese die Oeffnung längs der Geraden AB. Wollen wir jetzt die Resultante aller Strahlen finden, welche in der genannten Ebene (die zugleich die Ebene der Figur ist) liegen, so theilen wir AB, von A angefangen, nach B hin, in gleiche Theile Aa, ab, bc, cd u. s. w., deren Länge so beschaffen ist, dass der Gangunterschied Al zweier Randstrahlen AS und as der jenen Abtheilungen entsprechenden Strahlenbündel gerade eine ganze Wellenlänge beträgt. Alsdann verschwindet die Wirkung der vollständigen Bündel Aa, ab, bc ganz, und nur diejenige des unvollständigen Bündels cB (dessen Breite cB in der Figur kleiner als $\frac{1}{2}cd$ angenommen ist) bleibt übrig. Tritt jetzt, ohne dass im Uebrigen etwas geändert wird, an die Stelle der kleinen Oeffnung ein mit ihr congruenter kleiner Schirm, und macht man die nämliche Construktion wie vorher, so stellt jetzt AB den Schnitt des Schirmchens, die bis in's Unendliche verlängert gedachten Geraden AW' und BW dagegen stellen den Schnitt der unbegrenzten Lichtwelle dar. Theilt man jetzt die Gerade WW' von dem Punkt A aus nach rechts und nach links, wie oben angegeben, in die gleichen Theile Aa, ab, bc, cd, ..., Aa', ..., so bringen die Strahlen, welche von den Wellenstücken AW' und dW ausgehen, keine Wirkung hervor, und die zwischen A und B auf das dunkle Schirmchen treffenden werden ganz abgehalten. Es kann also bloss noch der Theil Bd der Welle zur Wirkung kommen. Ist aber m der Mittelpunkt von cd, und macht man $dn = Bm$, so vernichten sich die Bündel Bm und dn gegenseitig, weil sie in ihrem Gange um eine halbe Wellenlänge differiren, und man behält bloss noch das Bündel mn übrig, welches sich von dem bei der kleinen Oeffnung übrig gebliebenen Bündel cB bloss durch seinen Gangunterschied von einer halben Wellenlänge unterscheidet. Daraus folgt aber, dass die im Bilde vom dunkeln Schirmchen erzeugte Excursion gleich, aber entgegengerichtet ist derjenigen, welche die mit jenem congruente kleine Oeffnung hervorbringt, und dass die Lichtstärken selbst in beiden Fällen die nämlichen sind. Nur wenn der Strahl AS senkrecht steht zu AB, also für die direkt einfallenden Strahlen, lässt sich die hier angewendete Construktion nicht durchführen, weil die Theile Aa, ab, ... alsdann unendlich gross genommen werden müssten. Alsdann werden aber alle auf das Objektiv treffenden Strahlen in dessen Brennpunkt vereinigt.

Legt man der Figur (und dem Beweise) andere Voraussetzungen zu Grunde, als hier geschehen ist, (nimmt man z. B. $cB > \frac{1}{2}cd$), so wird man doch immer zu dem nämlichen Resultate gelangen.

§. 8. Aber nicht allein zwischen den in einem dunkeln Schirm angebrachten Oeffnungen und congruenten undurchsichtigen Schirmchen herrscht eine solche Uebereinstimmung in den von ihnen hervorgebrachten Beugungserscheinungen, sondern auch zwischen Oeffnungen, welche in durchsichtigen planplanen isotropen Platten angebracht sind, und gleichgestalteten planplanen durchsichtigen Schirmchen. Man erhält nämlich, wenn d die Dicke der Platte, n ihren Brechungsexponenten und K den Schwächungscoefficienten bezeichnet, für eine in der Platte angebrachte Oeffnung die Excursion:

$$K.\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(p-N+qx+ry).dydx$$

$$-K.\iint\sin(p-N+qx+ry).dydx+\iint\sin(p+qx+ry).dydx,$$

und für ein ebenso gestaltetes durchsichtiges Plättchen von der nämlichen Dicke und dem nämlichen Material:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(p+qx+ry).dydx$$

$$-\iint\sin(p+qx+ry).dydx+\iint\sin(p-N+qx+ry).dydx,$$

wo N statt $\frac{2\pi}{\lambda}.(n-1)d$ steht. Da in beiden Ausdrücken die Integrale mit den unendlichen Grenzen, so lange nicht $q=r=0$ ist, verschwinden, und die noch übrigbleibenden Ausdrücke sich nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen unterscheiden, so erkennt man sogleich, dass die beiden Beugungsbilder nur in jenem Punkte von einander abweichen können, welcher von den direkten Strahlen getroffen wird, indem dieser Punkt in beiden Fällen alles Licht in sich vereinigt, welches durch das Objektiv des Fernrohrs (oder die Pupille des Auges) überhaupt eindringt.

Von der durch einen dunkeln Schirm hervorgebrachten Erscheinung unterscheidet sich die jetzige bloss dadurch, dass jene, mit Beibehaltung ihrer Gestalt und ihrer Intensitätsverhältnisse, jetzt in allen ihren Punkten durch einen constanten Faktor gleichmässig modificirt erscheint; was man sogleich erkennt, wenn man hier wie oben (§. 5.) die Berechnung der Intensität J^2 des Bildes unternimmt. Man erhält, wenn man in dem ersten der obigen Ausdrücke den Theil p der Phase von dem übrigen absondert und das Doppelintegral mit den unendlichen Grenzen, welches $=0$ ist, weglässt, zuerst:

$$\sin p . \iint [\cos(qx+ry) - K.\cos(qx+ry-N)].dy dx$$
$$+ \cos p . \iint [\sin(qx+ry) - K.\sin(qx+ry-N)].dy dx$$
$$= \sin p . [C.(1-K\cos N) - K.S.\sin N]$$
$$+ \cos p . [S.(1-K\cos N) + K.C.\sin N],$$

und daraus alsdann:

$$J^2 = [C.(1-K\cos N)-K.S.\sin N]^2 + [S.(1-K\cos N)+K.C.\sin N]^2$$
$$= (1-2K\cos\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d + K^2).(C^2+S^2).$$

Der Faktor $1-2K\cos\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d+K^2$ verschwindet, und mit ihm die ganze Beugungserscheinung, wenn man hat $K=n=1$, d. h. wenn die optischen Eigenschaften der Platte von denen des umgebenden Mittels nicht verschieden sind. Wenn dagegen n und K bestimmte, von 1 verschiedene Werthe besitzen ($n>1$, $K<1$), so ändert sich der Faktor periodisch, wenn sich die Dicke der Platte ändert. Er befindet sich in seinem Minimum $(1-K)^2$, so oft $d=\frac{\nu\lambda}{n-1}$ wird (wo ν jede positive ganze Zahl bedeutet), er wird 1, wenn d der Gleichung $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d=\frac{K}{2}$ genügt, für $d=\frac{4\nu+1}{4}\cdot\frac{\lambda}{n-1}$ wird derselbe $=1+K^2$, sein Maximum $(1+K)^2$ erreicht er bei $d=\frac{2\nu+1}{2}\cdot\frac{\lambda}{n-1}$, und durchläuft dann abnehmend wieder die Werthe

$$1+K^2 \text{ für } d=\frac{4\nu+3}{4}\cdot\frac{\lambda}{n-1}, \quad 1 \text{ für } \cos\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d=\frac{K}{2},$$
$$(1-K)^2 \text{ für } d=\frac{(\nu+1)\lambda}{n-1},$$

um von da ab, bei stets wachsendem d, den nämlichen Cyclus von Werthen von Neuem zu durchlaufen. Man gelangt demnach zu dem merkwürdigen Satze, dass die Beugungserscheinung, welche eine in einer durchsichtigen Platte angebrachte Oeffnung bei homogenem Lichte hervorbringt, je nach der Dicke der Platte bald düsterer bald heller erscheint als diejenige, welche von einer gleichgestalteten, gleichgrossen, aber in einem dunkeln Schirm angebrachten Oeffnung erzeugt wird; auch kann man der Platte verschiedene Dicken geben (zu bestimmen aus der Gleichung

$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d=\frac{K}{2}$), für welche sich die Erscheinung von derjenigen des dunkeln Schirmes gar nicht unterscheidet.

Nimmt man, statt des homogenen, weisses Licht an, so werden, wenn eine Farbe sich in ihrem Minimum befindet, es nicht zugleich auch die anderen sein; das farbige Bild, welches jetzt entsteht, wird sich daher in allen Fällen von demjenigen unterscheiden, welches eine in dunklem Schirm befindliche Oeffnung im weissen Lichte zeigt.

§. 9. Wenn eine in dunklem Schirm angebrachte Oeffnung von einer durchsichtigen isotropen Platte verschlossen wird, oder wenn ein mit jener Oeffnung congruentes dunkles Schirmchen auf einer solchen Platte befestigt ist, so findet im Punkte (q, r) des Bildes im ersten Falle die Excursion

$$K.\iint\sin(p-N+qx+ry).dydx$$

Statt, im zweiten Falle aber die folgende:

$$K.\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(p-N+qx+ry).dydx$$
$$-K.\iint\sin(p-N+qx+ry).dydx,$$

welche sich nur durch den Phasenunterschied N und durch ihre mit K verkleinerte Amplitude von denjenigen unterscheiden, welche bei Weglassung der Platte stattfinden. Die Intensität des Bildes selbst erscheint bloss durch den unveränderlichen Faktor K^2 geschwächt, ohne sich mit der Dicke der Platte oder mit der Wellenlänge des einfallenden Lichtes zu ändern.

§. 10. In den beiden Doppelintegralen

$$\iint\cos(qx+ry).dydx=C \quad \text{und} \quad \iint\sin(qx+ry).dydx=S,$$

auf deren Kenntniss die Beantwortung aller bisher berührten Fragen zurückgeführt ist, kann eine der beiden angedeuteten Integrationen, z. B. die nach y, ohne Anstand ausgeführt werden. Man erhält:

$$C=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{r}.\sin(qx+ry_2)-\int_\alpha^\beta\frac{dx}{r}.\sin(qx+ry_1)=\Gamma_2-\Gamma_1,$$

$$S=-\int_\alpha^\beta\frac{dx}{r}.\cos(qx+ry_2)+\int_\alpha^\beta\frac{dx}{r}.\cos(qx+ry_1)=\Sigma_2+\Sigma_1,$$

wenn man unter y_1 und y_2 die Ordinaten der untern und der obern

Beugungscurve, unter α und β aber die äussersten Abscissenwerthe der Oeffnung versteht.

Man bemerkt sogleich, dass die Herstellung obiger Integrale in geschlossener Form immer möglich ist bei gradlinig begrenzten Oeffnungen. Die interessantesten Fälle dieser Art hat Schwerd in seinem ausgezeichneten Werke: „Die Beugungserscheinungen, aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt von F. M. Schwerd. Mannheim 1835", nach anderer Methode zwar, aber so meisterhaft und erschöpfend behandelt, dass wir uns hier, auf das genannte Werk verweisend, eine Wiederholung derselben erlassen dürfen. Wenn wir nun trotzdem die Discussion der von einer parallelogrammatischen Oeffnung erzeugten Erscheinung hier folgen lassen, so geschieht diess zur Bequemlichkeit des Lesers, weil wir im Verlaufe dieser Abhandlung auf dieselbe zurückzuweisen genöthigt sein werden.

§. 11. Da wir dem rechtwinkligen Axenkreuz in der Schirmebene eine beliebige Lage geben können, so verlegen wir seinen Anfangspunkt in den Diagonalendurchschnitt des Parallelogramms und nehmen die x-Axe senkrecht zu dem einen Seitenpaar. Dann sind

$$y_2 = \alpha x + \tfrac{1}{2}\beta,$$

$$y_1 = \alpha x - \tfrac{1}{2}\beta$$

die Gleichungen der beiden Geraden, welche die Oeffnung oben und unten begrenzen. Substituirt man diese Werthe in die Integrale C und S, und formt die unter den Integralzeichen vorkommenden Sinus und Cosinus um, indem man den mit x behafteten Theil des Bogens von dem constanten trennt, so erhält man, wenn γ die Entfernung der zur Abscissenaxe senkrechten Seiten bezeichnet:

$$C = 2.\frac{\sin\frac{1}{2}\beta r}{r}.\int_{-\frac{1}{2}\gamma}^{+\frac{1}{2}\gamma} \cos(q + \alpha r)x\,.\,dx$$

und

$$S = 2.\frac{\sin\frac{1}{2}\beta r}{r}.\int_{-\frac{1}{2}\gamma}^{+\frac{1}{2}\gamma} \sin(q + \alpha r)x\,.\,dx;$$

das Integral S verschwindet, wie man leicht sieht, zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\gamma$ und $+\frac{1}{2}\gamma$, so dass nur das Integral C auszuwerthen übrig bleibt, welches ohne Weiteres

$$C=\beta\gamma\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\beta r}{\frac{1}{2}\beta r}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma(q+\alpha r)}{\frac{1}{2}\gamma(q+\alpha r)}$$

$$=\beta\gamma\cdot\frac{\sin\pi\beta b\lambda^{-1}}{\pi\beta b\lambda^{-1}}\cdot\frac{\sin\pi\gamma(a+\alpha b)\lambda^{-1}}{\pi\gamma(a+\alpha b)\lambda^{-1}}=J$$

gefunden wird. Führt man jetzt, um diesem Ausdruck eine bequeme Gestalt zu geben, statt der rechtwinkligen Coordinaten a, b schiefwinklige Coordinaten a', b' ein, deren Ordinatenaxe senkrecht steht zu dem zweiten Seitenpaar des Parallelogramms, während man die Abscissenaxe senkrecht zu dem ersten Seitenpaar beibehält, so findet man $a'=a+\alpha b$ und b gleich dem Produkte aus b' in den Cosinus des Winkels, dessen Tangente $=\alpha$ ist; fasst man, nachdem man diese Werthe eingesetzt hat, β mit dem genannten Cosinus zusammen und bezeichnet dieses Produkt, welches nichts anderes ist, als die Entfernung des zweiten Seitenpaares, mit δ, so hat man schliesslich, wenn man auch noch den Flächeninhalt $\beta\gamma$ des Parallelogramms $=1$ annimmt:

$$J^2=\left(\frac{\sin\pi\gamma a'\lambda^{-1}}{\pi\gamma a'\lambda^{-1}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\pi\delta b'\lambda^{-1}}{\pi\delta b'\lambda^{-1}}\right)^2.$$

Bedeuten μ und ν unabhängig von einander alle positiven und negativen ganzen Zahlen, so verschwindet der erste Faktor für

$$a'=\frac{\mu\lambda}{\gamma},$$

der zweite Faktor aber für

$$b'=\frac{\nu\lambda}{\delta},$$

so lange nur μ und ν nicht Null sind. Durch diese Gleichungen sind demnach zwei zu den Axen parallele Systeme völlig dunkler Geraden vorgestellt, welche die Projektion des Beugungsbildes in parallelogrammatische Felder zerschneiden, die, der parallelogrammatischen Oeffnung ähnlich, gegen dieselbe um 90° gedreht erscheinen. Nimmt man aber ν, also auch b', gleich Null, so erhält man, weil der zweite Faktor gleich 1 wird, die Intensität auf der Abscissenaxe:

$$J'^2=\left(\frac{\sin\pi\gamma a'\lambda^{-1}}{\pi\gamma a'\lambda^{-1}}\right)^2,$$

und ebenso diejenige auf der Ordinatenaxe für $a'=0$:

$$J''^2=\left(\frac{\sin\pi\delta b'\lambda^{-1}}{\pi\delta b'\lambda^{-1}}\right)^2.$$

Man braucht demnach, um in einem beliebigen Punkte a', b' des Bildes die Lichtstärke kennen zu lernen, nur die Intensitäten, welche auf den Axen den nämlichen Coordinaten entsprechen, mit einander zu multipliciren, und da die Ausdrücke, welche diese Intensitäten vorstellen, alle beide die nämliche Form haben, so braucht man nur die Werthe von

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

für alle Werthe von x zu berechnen, und, wie Schwerd es im obengenannten Werke gethan hat, in eine Tabelle zusammenzustellen; man kann alsdann mit Hilfe dieser Tabelle für jeden Punkt des Bildes die Lichtstärke sofort angeben. In der folgenden kleinen Tabelle sind die Maxima jenes Ausdrucks aufgeführt.

x		$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$
0.000000	0° 0′ 0″	1.000000
4.493409	257° 27′ 12″	0.047190
7.725252	442 37 28	0.016480
10.904120	624 45 36	0.008340
14.066194	805 56 1	0.005029
17.220753	986 40 36	0.003361
20.371302	1167 11 23	0.002404
23.519446	1347 33 55	0.001805
26.666054	1527 51 9	0.001404

Man sieht, dass die Maxima den Punkten, deren Abscissen einer ungeraden Anzahl von Quadranten gleich sind, um so näher rücken, je weiter man auf der x-Axe vorwärtsschreitet.

§. 12. Für krummlinig begrenzte Oeffnungen können die Integrale C und S in geschlossener Form nicht angegeben werden.

Bei einer kreisförmigen Oeffnung zeigen offenbar alle durch den Mittelpunkt der Bildprojektion gezogenen Geraden die nämliche Reihenfolge von Intensitäten; es genügt daher, bloss eine dieser Geraden, z. B. die Abscissenaxe selbst, näher zu untersuchen. Setzt man zu dem Ende in den Integralen C und S die Ordinate $r=0$, so bemerkt man, dass das Integral S verschwindet, das Integral C aber die Form

$$C = 4 . \int_0^R \cos qx . \sqrt{R^2 - x^2} . dx = 4R . \int_0^1 \cos Rqv . \sqrt{1-v^2} . dv$$

$$= 4R^2 . \int_0^1 \sqrt{1-v^2} . [1 - \frac{(Rq)^2 . v^2}{2!} + \frac{(Rq)^4 . v^4}{4!} - \ldots .]$$

annimmt, wo R den Halbmesser der kreisförmigen Oeffnung bedeutet. Nun ist aber:

$$\int_0^1 v^{2\mu} . \sqrt{1-v^2} . dv = \frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu+1|2}} . \frac{\pi}{2},$$

so dass man, wenn auch noch x an die Stelle von Rq und der Flächeninhalt $R^2\pi$ der Oeffnung gleich 1 gesetzt wird, schliesslich erhält:

$$C = J = 1 - \frac{3}{4} . \frac{x^2}{3!} + \frac{3.5}{4.6} . \frac{x^4}{5!} - \frac{3.5.7}{4.6.8} . \frac{x^6}{7!} + - \ldots \text{ in inf.}$$

eine unendliche Reihe, welche für jeden Werth von x convergent ist, und die Werthe von J und J^2 mit beliebiger Genauigkeit, und für kleinere Werthe von x auch mit grosser Bequemlichkeit, zu berechnen erlaubt.

Schwerd hat statt des Kreises das eingeschriebene regelmässige 180-Eck berechnet. Die so gefundenen Werthe stimmen mit denjenigen der obigen Reihe sehr gut überein.

Nullwerthe der Funktion J finden Statt bei folgenden Werthen von x:

3.832
7.014
10.172
13.322
16.471.

§. 13. Ohne auf die Discussion der von speciellen Oeffnungen hervorgebrachten Erscheinungen weiter einzugehen, wollen wir noch einige allgemeine Sätze erörtern, welche sich aus der blossen Form der Integrale C und S ergeben.

Multiplicirt man in den Integralen C und S des §. 10., nachdem man zuvor r' an die Stelle von r gesetzt hat, die Ordinaten y_1 und y_2 der beiden Begrenzungscurven mit einem constanten Faktor K, so erhält man:

$$C' = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{r'} . \sin(qx + r'Ky_2) - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{r'} . \sin(qx + r'Ky_1),$$

$$S' = -\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{r'} . \cos(qx + r'Ky_2) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{r'} . \cos(qx + r'Ky_1) .$$

Setzt man nun $r' = \frac{r}{K}$, so unterscheiden sich diese Integrale von den ursprünglichen C und S bloss dadurch, dass sie noch mit K multiplicirt erscheinen. Kann daher eine Oeffnung dadurch von einer andern abgeleitet werden, dass man sämmtliche Ordinaten dieser letzteren mit einem constanten Faktor K versieht, so erhält man das Bild jener ersteren aus dem der letzteren, wenn man seine Ordinaten mit der nämlichen Grösse K dividirt; die Amplitude des Punktes $(q, \frac{r}{K})$ im neuen Bilde ist alsdann von derjenigen des Punktes (q, r) im ursprünglichen Bilde nur durch den Faktor K verschieden, welcher das Verhältniss der Flächeninhalte der beiden Oeffnungen ausdrückt.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich z. B. die Erscheinung, welche eine elliptische Oeffnung hervorbringt, leicht auf die von einem Kreise herrührende zurückführen. Multiplicirt man nämlich die Ordinaten des Kreises mit einem Faktor K, der grösser ist als 1, so geht der Kreis dadurch in eine Ellipse über, deren grosse Axe in die Ordinatenaxe zu liegen kommt; dividirt man gleichzeitig die Ordinaten des Beugungsbildes mit K, so verwandeln sich die hellen und dunkeln Kreise, welche von der kreisrunden Oeffnung erzeugt waren, in Ellipsen, welche unter sich und der elliptischen Oeffnung ähnlich sind, deren grosse Axen aber in die Abscissenaxe fallen; die Amplitude eines jeden dieser elliptischen Ringe ist Kmal, seine Lichtstärke folglich K^2mal so gross als die des entsprechenden Kreisringes, weil auch der Flächeninhalt der elliptischen Oeffnung Kmal so gross ist als derjenige der kreisförmigen Oeffnung, von welcher sie abgeleitet wurde.

§. 14. Setzt man $y_2 = y_1 + h$, d. h. nimmt man die obere Begrenzungscurve eines Spaltes der unteren parallel an, so erhält man:

$$C = \sin hr . \Sigma_1 - (1 - \cos hr) . \Gamma_1 = 2 \sin \tfrac{1}{2}hr . (\cos \tfrac{1}{2}hr . \Sigma_1 - \sin \tfrac{1}{2}hr . \Gamma_1),$$

$$S = \sin hr . \Gamma_1 + (1 - \cos hr) . \Sigma_1 = 2 \sin \tfrac{1}{2}hr . (\cos \tfrac{1}{2}hr . \Gamma_1 + \sin \tfrac{1}{2}hr . \Sigma_1);$$

folglich

$$J^2 = 4\sin^2\tfrac{1}{2}hr.(\Gamma_1{}^2 + \Sigma_1{}^2).$$

In diesem Ausdruck hängt blos der zweite, eingeklammerte, Faktor von der Natur der Begrenzungscurven ab, nicht aber der erste; dieser enthält dagegen die Entfernung h der beiden Grenzcurven, von welcher jener völlig unabhängig ist. Da nun $\sin\frac{1}{2}hr = 0$ wird für $hr = 2\nu\pi$, so erscheint im Beugungsbild ein System völlig dunkler gerader Linien, welche zu den Rändern des Spaltes senkrecht, also parallel zur Abscissenaxe, verlaufen und sämmtlich in der Gleichung

$$b = \frac{\nu\lambda}{h}$$

enthalten sind; jede derselben ist, wie man sieht, von der nächsten um eine Grösse entfernt, welche der Wellenlänge direkt, der Differenz der Begrenzungsordinaten aber umgekehrt proportional ist. Nur für $\nu = 0$ (oder $r = 0$) erhält man keine dunkle Linie, indem J^2 für diesen Werth die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Bestimmt man diesen $\frac{0}{0}$ Werth nach der gewöhnlichen Methode, so findet man für $r = 0$:

$$J_0{}^2 = h^2.(\beta-\alpha)^2.\left(\frac{\sin\frac{1}{2}q(\beta-\alpha)}{\frac{1}{2}q(\beta-\alpha)}\right)^2.$$

Daraus ergibt sich aber, dass jeder Spalt, dessen untere Begrenzungscurve der obern congruent und parallel ist, auf der durch die Bildmitte senkrecht zu den Rändern des Spalts gezogenen Geraden genau die nämliche Erscheinung zeigt wie ein parallelogrammatischer Spalt von der nämlichen Breite und Randlänge.

§. 15. Hat man für irgend eine Oeffnung

$$C = \Gamma_2 - \Gamma_1,$$
$$S = -\Sigma_2 + \Sigma_1;$$

und daraus

$$J^2 = C^2 + S^2 = \Gamma_1{}^2 + \Gamma_2{}^2 + \Sigma_1{}^2 + \Sigma_2{}^2 - 2(\Gamma_1\Gamma_2 + \Sigma_1\Sigma_2)$$

gefunden, und ändert man die Oeffnung jetzt dadurch, dass man der Ordinate y_2 der oberen Begrenzungscurve eine constante Grösse h hinzufügt, so ergibt sich:

$$C' = \cos hr.\Gamma_2 + \sin hr.\Sigma_2 - \Gamma_1,$$
$$S' = -\cos hr.\Sigma_2 + \sin hr.\Gamma_2 + \Sigma_1;$$

und hieraus:

$$J'^2 = C'^2 + S'^2$$

$$= \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 - 2\cos hr.(\Gamma_1\Gamma_2 + \Sigma_1\Sigma_2) - 2\sin hr.(\Gamma_1\Sigma_2 - \Sigma_1\Gamma_2).$$

Kennt man daher für die ursprüngliche Oeffnung die Integrale Γ_1, Γ_2, Σ_1, Σ_2, so kann man mit Hilfe dieser Formel die Beugungserscheinung der zweiten Oeffnung leicht berechnen. Bemerkenswerth aber ist, dass dieser Ausdruck dem für die erstere Oeffnung geltenden gleich wird, so oft $\sin hr = 0$ und gleichzeitig $\cos hr = +1$ ist, also sobald man hat:

$$b = \frac{\nu\lambda}{h}.$$

Zieht man demnach, in dem ersten und in dem zweiten Beugungsbild, das in vorstehender Gleichung enthaltene System von zur Abscissenaxe parallelen Geraden, so ist jede dieser Geraden im zweiten Bild hinsichtlich ihrer Beleuchtung vollkommen identisch mit der entsprechenden Geraden des ersten Bildes. Nur die Abscissenaxe selbst entzieht sich diesem Gesetz, indem für $r = 0$ der obige Ausdruck für J'^2 die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Berechnet man aber für diesen Fall J'^2 direkt, so findet man zunächst:

$$C' = \int_\alpha^\beta (y_2 + h - y_1).\cos qx.dx$$

$$= C + h\int_\alpha^\beta \cos qx.dx = C + h.(\beta-\alpha).\cos\tfrac{1}{2}q(\beta+\alpha).\frac{\sin\frac{1}{2}q.(\beta-\alpha)}{\frac{1}{2}q(\beta-\alpha)},$$

$$S' = \int_\alpha^\beta (y_2 + h - y_1).\sin qx.dx$$

$$= S + h\int_\alpha^\beta \sin qx.dx = S + h.(\beta-\alpha).\sin\tfrac{1}{2}q(\beta+\alpha).\frac{\sin\frac{1}{2}q.(\beta-\alpha)}{\frac{1}{2}q(\beta-\alpha)};$$

folglich:

$$J'^2 = C^2 + S^2 + 2h.(\beta-\alpha).\frac{\sin\frac{1}{2}q(\beta-\alpha)}{\frac{1}{2}q(\beta-\alpha)}.(C\cos\tfrac{1}{2}q(\beta+\alpha) + S\sin\tfrac{1}{2}q(\beta+\alpha))$$

$$+ h^2(\beta-\alpha)^2.\left(\frac{\sin\frac{1}{2}q(\beta-\alpha)}{\frac{1}{2}q(\beta-\alpha)}\right)^2.$$

Daraus geht aber hervor, dass die Beleuchtung der Abscissenaxe nur in jenen Punkten mit der ursprünglichen übereinstimmt, in welchen ein parallelogrammatischer Spalt von gleicher Breite wie die gegebene Oeffnung völlige Dunkelheit hervorbringen würde. In jenen Punkten aber, welche bei der ursprünglichen Oeffnung dunkel erschienen (für welche C und S gleichzeitig verschwinden), herrscht jetzt diejenige Beleuchtung, welche ein parallelogrammatischer Spalt von der nämlichen Breite und der Randlänge h dort erzeugen würde.

§. 16. Für das Beugungsbild eines Spaltes, dessen obere Begrenzungscurve, gegeben durch die Gleichung $y=f(x)$, der unteren congruent und parallel ist, fanden wir in §. 14., wenn auch anders geschrieben, den Ausdruck:

$$J^2=h^2.\left(\frac{\sin\frac{1}{2}hr}{\frac{1}{2}hr}\right)^2$$
$$\times\left(\left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_{n+1}}\sin(qx+ry)dx\right)^2+\left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_{n+1}}\cos(qx+ry)dx\right)^2\right),$$

wenn unter h die Ordinatendifferenz der beiden Begrenzungscurven, unter γ_1 und γ_{n+1} aber die Abscissen der Ränder des Spaltes verstanden werden. Zerlegt man jetzt die Oeffnung durch unendlich nahe auf einander folgende Ordinaten in unendlich viele schmale Streifen, so können alle diese Streifen als Parallelogramme angesehen werden, deren Begrenzungslinien durch die Gleichungen

$$y_1=\alpha_1x+\beta_1,\ y_2=\alpha_2x+\beta_2,\ \ldots.\ y_n=\alpha_nx+\beta_n$$

gegeben sind, während

$$\alpha_1=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\gamma_1},\ \alpha_2=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\gamma_2},\ \ldots.\ \alpha_n=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\gamma_n}$$

und

$$\beta_1=f(\gamma_1)-\alpha_1\gamma_1,\ \beta_2=f(\gamma_2)-\alpha_2\gamma_2,\ \ldots.\ \beta_n=f(\gamma_n)-\alpha_n\gamma_n$$

gedacht werden. Man erhält alsdann, weil $\gamma_2-\gamma_1$ unendlich klein gedacht wird, für den ersten Streifen:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sin(qx+ry).dx = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sin((q+\alpha_1 r)x+\beta_1 r).dx$$

$$= \frac{\sin\beta_1 r}{q+\alpha_1 r}.(\sin\gamma_2(q+\alpha_1 r)-\sin\gamma_1(q+\alpha_1 r))$$

$$-\frac{\cos\beta_1 r}{q+\alpha_1 r}.(\cos\gamma_2(q+\alpha_1 r)-\cos\gamma_1(q+\alpha_1 r))$$

$$= \frac{\sin\beta_1 r}{\frac{1}{2}(q+\alpha_1 r)}.\cos[\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_1)(q+\alpha_1 r)].\sin[\tfrac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)(q+\alpha_1 r)]$$

$$+\frac{\cos\beta_1 r}{\frac{1}{2}(q+\alpha_1 r)}.\sin[\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_1)(q+\alpha_1 r)].\sin[\tfrac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)(q+\alpha_1 r)]$$

$$= (\gamma_2-\gamma_1).\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)(q+\alpha_1 r)}{\frac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)(q+\alpha_1 r)}.\sin[\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_1)(q+\alpha_1 r)+\beta_1 r].$$

Auf analoge Weise findet man:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos(qx+ry).dx$$

$$= (\gamma_2-\gamma_1).\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)(q+\alpha_1 r)}{\frac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)(q+\alpha_1 r)}.\cos[\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_1)(q+\alpha_1 r)+\beta_1 r].$$

Führt man die Integration für die folgenden Streifen auf die nämliche Art durch, so ergibt sich zuletzt:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_{n+1}} \sin(qx+ry).dx$$

$$= (\gamma_2-\gamma_1).\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)(q+\alpha_1 r)}{\frac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)(q+\alpha_1 r)}.\sin[\tfrac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_1)(q+\alpha_1 r)+\beta_1 r]$$

$$+(\gamma_3-\gamma_2).\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_3-\gamma_2)(q+\alpha_2 r)}{\frac{1}{2}(\gamma_3-\gamma_2)(q+\alpha_2 r)}.\sin[\tfrac{1}{2}(\gamma_3+\gamma_2)(q+\alpha_2 r)+\beta_2 r]+\ldots.$$

$$+(\gamma_{n+1}-\gamma_n).\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)(q+\alpha_n r)}{\frac{1}{2}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)(q+\alpha_n r)}.\sin[\tfrac{1}{2}(\gamma_{n+1}+\gamma_n)(q+\alpha_n r)+\beta_n r].$$

Für das andere Integral

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_{n+1}} \cos(qx+ry).dx$$

erhält man eine Summe, welche sich von der vorhergehenden blos dadurch unterscheidet, dass im letzten Faktor eines jeden

Gliedes ein Cosinuszeichen an die Stelle des Sinuszeichens getreten ist.

Addirt man jetzt die Quadrate der beiden Integrale, so erhält man:

$$J^2 = h^2 . \left(\frac{\sin \frac{1}{2} hr}{\frac{1}{2} hr}\right)^2$$

$$\times \Big[(\gamma_2 - \gamma_1)^2 . \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)(q + \alpha_1 r)}{\frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)(q + \alpha_1 r)}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots . + (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2 . \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)(q + \alpha_n r)}{\frac{1}{2}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)(q + \alpha_1 r)}\right)^2$$

$$+ 2(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_2) . \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)(q + \alpha_1 r)}{\frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)(q + \alpha_1 r)}\right) . \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma_3 - \gamma_2)(q + \alpha_2 r)}{\frac{1}{2}(\gamma_3 - \gamma_2)(q + \alpha_2 r)}\right)$$

$$\times \cos [\tfrac{1}{2}(\gamma_3 - \gamma_2)(q + \alpha_2 r) - \tfrac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)(q + \alpha_1 r) + (\beta_2 - \beta_1) r] + \ldots \Big] .$$

Da nun die Endordinate eines jeden parallelogrammatischen Streifens mit der Anfangsordinate des nächstfolgenden zusammenfällt, so ergeben sich aus den desswegen stattfindenden Bedingungsgleichungen:

$$\alpha_1 \gamma_2 + \beta_1 = \alpha_2 \gamma_2 + \beta_2, \; \alpha_2 \gamma_3 + \beta_2 = \alpha_3 \gamma_3 + \beta_3, \; \ldots . \; \alpha_{n-1} \gamma_n + \beta_{n-1} = \alpha_n \gamma_n + \beta_n$$

die folgenden Relationen:

$$\beta_2 - \beta_1 = \gamma_2(\alpha_1 - \alpha_2), \; \beta_3 - \beta_1 = \gamma_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \gamma_3(\alpha_2 - \alpha_3),$$

$$\beta_3 - \beta_2 = \gamma_3(\alpha_2 - \alpha_3), \; \beta_4 - \beta_1 = \gamma_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \gamma_3(\alpha_2 - \alpha_3) + \gamma_4(\alpha_3 - \alpha_4),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_n - \beta_{n-1} = \gamma_n(\alpha_{n-1} - \alpha_n), \; \beta_n - \beta_1 = \gamma_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \gamma_3(\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + \gamma_n(\alpha_{n-1} - \alpha_n).$$

Setzt man jetzt

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots . = \alpha_n = \alpha,$$

und bestimmt α aus der Gleichung:

$$q + \alpha r = 0,$$

so erlangt im Ausdruck J^2 jeder Summand der eckig eingeklammerten Summe seinen grössten Werth, die Intensität selbst erreicht also ihr Maximum:

$$J^2 = h^2 . (\gamma_{n+1} - \gamma_1)^2 . \left(\frac{\sin \frac{1}{2} hr}{\frac{1}{2} hr}\right)^2 .$$

Dabei ist die Oeffnung, mit Beibehaltung ihrer ursprünglichen Breite und Randlänge, in ein Parallelogramm übergegangen, dessen obere und untere Begrenzungslinie senkrecht stehen zu der Geraden, welche den Punkt (q, r) der Bildprojektion mit dem Coordinatenanfang verbindet. Will man daher mittelst eines Spaltes von gegebener Breite und gegebenem Flächeninhalt, welcher oben und unten von Parallelcurven begrenzt sein soll, auf einen beliebigen Punkt des Beugungsbildes eine möglichst grosse Lichtmenge werfen, so braucht man demselben nur eine parallelogrammatische Gestalt zu geben, und die Richtung der geraden Begrenzungslinien so zu wählen, dass jener Punkt in die eine Hauptaxe des vom Parallelogramm erzeugten Bildes zu liegen kommt.

§. 17. Aufgabe. In einem dunkeln Schirm werde ein Spalt von der Breite $\beta-\alpha$ angebracht; man soll die Curven, welche ihn oben und unten begrenzen, so wählen, dass die im Punkt (q, r) des Bildes hervorgebrachte Lichtstärke ein Maximum werde.

Bezeichnet man, wie in §. 10.,

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{r}[\sin(qx+ry_2)-\sin(qx+ry_1)]$$

mit C, und

$$-\int \frac{dx}{r}[\cos(qx+ry_2)-\cos(qx+ry_1)]$$

mit S, so stellt

$$J^2 = C^2 + S^2$$

die Intensität im Punkte (q, r) des Bildes vor. Soll dieselbe ein Maximum (oder Minimum) werden, so muss die Variation von J^2 verschwinden, wodurch man die Gleichung

$$C\delta C + S\delta S = 0$$

erhält. Nun ist aber

$$\delta C = \int_\alpha^\beta [\cos(qx+ry_2).\delta y_2 - \cos(qx+ry_1).\delta y_1]dx$$

$$= \int_\alpha^\beta (c_2\delta y_2 - c_1\delta y_1).dx$$

und

$$\delta S = \int_\alpha^\beta [\sin(qx+ry_2).\delta y_2 - \sin(qx+ry_1).\delta y_1].dx$$

$$= \int_\alpha^\beta (s_2\delta y_2 - s_1\delta y_1).dx.$$

Da die bestimmten Integrale C und S von x unabhängig sind, so kann man mit ihnen unter die Integralzeichen von δC und δS hineinmultipliciren, wodurch man erhält:

$$C\delta C + S\delta S = \int_\alpha^\beta [(c_2C+s_2S)\delta y_2 - (c_1C+s_1S)\delta y_1].dx = 0.$$

Setzt man jetzt, um dieses Integral zum Verschwinden zu bringen, die Faktoren der willkührlichen Variationen δy_2 und δy_1 einzeln der Null gleich, so erhält man zur Bestimmung der beiden Begrenzungscurven die zwei Gleichungen:

$$c_2C+s_2S=0 \quad \text{und} \quad c_1C+s_1S=0.$$

Aus denselben ergibt sich ohne weiteres die Relation:

$$\frac{s_2}{c_2} = \frac{s_1}{c_1}$$

oder:

$$\text{tg}(qx+ry_2 = \text{tg}(qx+ry_1),$$

woraus man schliesst:

$$y_2 = y_1 + \frac{\nu\pi}{r},$$

d. h. die Ordinaten der beiden Begrenzungscurven dürfen sich nur um eine constante Grösse $\frac{\nu\pi}{r}(=\frac{\nu\lambda}{2b})$ von einander unterscheiden, oder die beiden Curven müssen congruent und parallel sein. Nachdem diess festgestellt, fallen obige zwei Gleichungen in die einzige

$$\text{tang}(qx+ry) = -\frac{C}{S}$$

zusammen, welche alle möglichen Lösungen der Aufgabe in sich schliesst. Nun ist aber der Quotient zur Rechten nach x constant, also muss $qx+ry$ ebenfalls constant sein; die gesuchten Begrenzungslinien können demnach nichts anderes sein, als gerade Linien, welche zu derjenigen, die den Coordinatenanfang mit dem Punkt (q, r) des Bildes verbindet, senkrecht stehen. Die eben

genannte Gerade ist aber eine der Hauptaxen des Bildes, welches von dem durch die vorhin bestimmten Begrenzungslinien mit den Rändern des Spalts gebildeten Parallelogramm erzeugt wird. Nimmt man in der bereits gefundenen Ordinatendifferenz $\frac{\nu\pi}{r}$ der beiden Begrenzungslinien ν gerade, so wird die Intensität im Punkte (q, r) Null, und man hat ein Minimum vor sich; die Maxima treten ein für die ungeraden Werthe von ν; es fällt alsdann der Punkt (q, r) in einen jener Punkte der Hauptaxe, für welche blos der Zähler des Ausdrucks $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ seinen grössten Werth erreicht, also nicht in jene Punkte, für welche dieser Ausdruck selbst ein Maximum wird.

Die grösste Intensität, welche durch einen Spalt von der Breite $\beta-\alpha$ im Punkte (q, r) erzeugt werden kann, ist demnach

$$=\frac{4.(\beta-\alpha)^2}{r^2};$$

sie ändert sich, wie man leicht bemerkt, nicht, wie gross oder wie klein man auch das ungerade ν nehmen mag. Sie vermindert sich aber, wenn man eines der so eben bestimmten Parallelogramme (durch paralleles Verschieben einer Grenzlinie) etwas vergrössert oder verkleinert, oder wenn man seinen Begrenzungslinien anders gerichtete Gerade oder beliebige Curven substituirt.

§. 18. Ein dunkler Schirm sammt seiner Oeffnung werde in seiner Ebene parallel verschoben, so dass der früher im Ursprung liegende Punkt die Coordinaten x_0, y_0 bekommt, so sind jetzt

$$x'=x_0+x, \quad y'=y_0+y$$

die Coordinaten desjenigen Punktes der Oeffnung, welchem vorher die Coordinaten x, y entsprachen, und die Ausdrücke:

$$\iint\cos(qx'+ry').dydx=C',$$

$$\iint\sin(qx'+ry').dydx=S',$$

wo, nach beendigter Integration, die nämlichen Grenzen wie in C und S angenommen werden müssen, sind jetzt die Composanten der Amplitude, welche im Punkte (q, r) des Bildes stattfindet. Nun ist aber

$$\begin{aligned}C'&=\iint\cos(qx_0+ry_0+qx+ry).dydx\\&=\cos(qx_0+ry_0).\iint\cos(qx+ry).dydx\\&\quad-\sin(qx_0+ry_0)\iint\sin(qx+ry).dydx=cC-sS\end{aligned}$$

und ebenso

$$S' = cS + sC.$$

Man erhält demnach:

$$C'^2 + S'^2 = C^2 + S^2,$$

d. h. eine und dieselbe Oeffnung bringt stets dieselbe Lichterscheinung hervor, an welcher Stelle des Schirmes sie auch angebracht sein mag, wenn sie nur in allen Lagen ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt. Wir hätten die Herleitung dieses Satzes unterlassen dürfen, indem sich derselbe bereits bei unsern einleitenden Betrachtungen (§. 1.) auf die einfachste Weise ergab, wenn wir nicht die eben gefundenen Ausdrücke zur Berechnung der Erscheinung, welche durch eine beliebige Anzahl unter sich congruenter Oeffnungen, deren homologe Linien parallel sind, hervorgebracht wird, benutzen wollten. Jede der beiden Composanten C' und S' wird nämlich jetzt in so viele einzelne Integrale zerfallen, als Oeffnungen vorhanden sind; man bemerkt aber nach der vorhergehenden Entwickelung leicht, dass diesen Integralen folgende Form zukommen muss:

$$\overbrace{\begin{array}{c} cC - sS \\ c'C - s'S \\ c''C - s''S \\ \cdots\cdots \end{array}}^{C'} \qquad \overbrace{\begin{array}{c} cS + sC \\ c'S + s'C \\ c''S + s''C, \\ \cdots\cdots \end{array}}^{S'}$$

wo z. B. unter c' und s' beziehlich $\cos(qx_0' + ry_0')$ und $\sin(qx_0' + ry_0')$ zu verstehen ist. Man erhält daher:

$$C' = (c + c' + c'') + \ldots\ldots).C - (s + s' + s'' + \ldots\ldots).S = c_1C - s_1S,$$

$$S' = (c + c' + c'') + \ldots\ldots).S + (s + s' + s'' + \ldots\ldots).C = c_1S + s_1C.$$

Die Lichtstärke, welche im Punkte (q, r) des Bildes auftritt, ist folglich:

$$C'^2 + S'^2 = (c_1^2 + s_1^2).(C^2 + S^2).$$

Um dieselbe zu erhalten, braucht man also nur die von einer einzigen Oeffnung im nämlichen Punkte erzeugte Intensität mit einem Faktor $c_1^2 + s_1^2$ zu multipliciren, welcher von der Anzahl und der Gruppirung der Oeffnungen in bekannter Weise abhängt.

Hat man statt der Gruppe von Oeffnungen jetzt eine ganz gleiche Gruppe dunkler Schirmchen, welche jenen Oeffnungen

congruent sind, so muss man die so eben berechneten Composanten C' und S', um die neuen zu erhalten, subtrahiren beziehlich von den Integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(qx+ry).dydx \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(qx+ry).dydx,$$

welche, so lange nur q und r nicht gleichzeitig Null sind, verschwinden. Die jetzigen Composanten der Amplitude unterscheiden sich daher, wenn q und r nicht gleichzeitig Null sind, von den vorigen blos durch das entgegengesetzte Vorzeichen, während die Lichtstärke selbst vollkommen identisch ist mit der früheren. Für den Mittelpunkt des Bildes (wo $q=r=0$ ist) dagegen, in welchem sich die direkten Strahlen vereinigen, hat man

$$C'=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dydx-n\iint dydx \quad \text{und} \quad S'=0,$$

wenn n die Anzahl der vorhandenen Schirmchen angibt. Das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dydx=\mathbf{K}$$

drückt die Amplitude aus, welche im Brennpunkte des Fernrohrs stattfinden würde, wenn gar kein Schirmchen vorhanden wäre;

$$(\mathbf{K}-n\iint dydx)^2$$

ist somit die Intensität des Lichtes, welches überhaupt direkt in das Fernrohr eindringt.

§. 19. Sind die n Oeffnungen (oder Schirmchen) längs einer geraden Linie in gleiche Abstände gestellt, so dass man hat:

$$x_0=x_0,\ x_0'=x_0+\xi,\ x_0''=x_0+2\xi,\ \ldots\ x_0^{(n-1)}=x_0+(n-1)\xi;$$

$$y_0=y_0,\ y_0'=y_0+\eta,\ y_0''=y_0+2\eta,\ \ldots\ y_0^{(n-1)}=y_0+(n-1)\eta;$$

so bilden die Bogen der mit c und s bezeichneten Cosinus und Sinus eine arithmetische Progression, und die Reihen c_1 und s_1 lassen sich mit Hilfe der Formeln

$$\cos x+\cos(x+y)+\cos(x+2y)+\ldots+\cos(x+(n-1)y)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}ny}{\sin\frac{1}{2}y}.\cos(x+\frac{n-1}{2}y)$$

und

$$\sin x + \sin(x+y) + \sin(x+2y) + \ldots + \sin(x+(n-1)y)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}ny}{\sin\frac{1}{2}y}.\sin\left(x+\frac{n-1}{2}y\right)$$

summiren. Man findet so:

$$C' = \frac{\sin\frac{1}{2}n(q\xi+r\eta)}{\sin\frac{1}{2}(q\xi+r\eta)}$$

$$\times\left(C.\cos\left(qx_0+ry_0+\frac{n-1}{2}(q\xi+r\eta)\right)-S.\sin\left(qx_0+ry_0+\frac{n-1}{2}(q\xi+r\eta)\right)\right)$$

und

$$S' = \frac{\sin\frac{1}{2}n(q\xi+r\eta)}{\sin\frac{1}{2}(q\xi+r\eta)}$$

$$\times\left(S.\cos\left(qx_0+ry_0+\frac{n-1}{2}(q\xi+r\eta)\right)+C.\sin\left(qx_0+ry_0+\frac{n-1}{2}(q\xi+r\eta)\right)\right).$$

Daraus aber ergibt sich:

$$C'^2+S'^2=\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n(q\xi+r\eta)}{\sin\frac{1}{2}(q\xi+r\eta)}\right)^2.(C^2+S^2)=\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n(q\xi+r\eta)}{n\sin\frac{1}{2}(q\xi+r\eta)}\right)^2(n.J)^2.$$

In dieser Formel würde der zweite Faktor $(n.J)^2$ für sich allein die Lichterscheinung ausdrücken, die eine einzige der gegebenen Oeffnungen hervorbringt, wenn so viel Licht durch sie hindurchgeht, als durch alle n Oeffnungen zusammengenommen. Die von der Anzahl und Lage der Oeffnungen herrührenden Modifikationen des Bildes sind im ersten Faktor enthalten, dessen bereits von Schwerd gegebene Discussion hier nicht wiederholt werden soll. Dieses Verhalten der beiden Faktoren zu einander charakterisirt Schwerd sehr schön in folgenden Worten: „Der zweite Faktor bildet so zu sagen die Grundlage des ganzen Gemäldes; nur wo dieser Licht aufträgt, da können Spektra erscheinen. Der erste Faktor hingegen dient blos dazu, die Intensität der von dem zweiten Faktor aufgetragenen Lichtmasse an bestimmten Stellen zu vermindern oder ganz zu zerstören, und dadurch neue Formen hervorzubringen."

§. 20. Längs einer durch den Coordinatenanfang gelegten geraden Linie seien jederseits von demselben n unter sich congruente dunkle Schirmchen in gleichen Abständen aufgereiht, so dass der Coordinatenanfang selbst in die Mitte eines Zwischenraums zu stehen kommt. Man hat alsdann $x_0=\frac{1}{2}\xi$, $y_0=\frac{1}{2}\eta$, also:

$$C'=\frac{2\sin\frac{1}{2}n(q\xi+r\eta).\cos\frac{1}{2}n(q\xi+r\eta)}{\sin\frac{1}{2}(q\xi+r\eta)}.C=\frac{\sin 2n\frac{1}{2}(q\xi+r\eta)}{\sin\frac{1}{2}(q\xi+r\eta)}.C$$

und ebenso

$$S' = \frac{\sin 2n\frac{1}{2}(q\xi + r\eta)}{\sin\frac{1}{2}(q\xi + r\eta)} \cdot S.$$

Bezeichnet man den Abstand eines Schirmchens von dem nächstdarauffolgenden mit γ, und mit φ den Winkel, welchen die Reihe der Schirmchen mit der x-Axe bildet, so ist:

$$\xi = \gamma\cos\varphi \quad \text{und} \quad \eta = \gamma\sin\varphi;$$

setzt man jetzt auch noch:

$$q = \delta\cos\psi \quad \text{und} \quad r = \delta\sin\psi,$$

so wird

$$q\xi + r\eta = \gamma\delta\cos(\varphi - \psi).$$

Denkt man sich m solche Reihen, vom Coordinatenanfang strahlenförmig auslaufend, ringsum gleichförmig vertheilt, so erscheinen die Schirmchen längs Kreislinien gestellt, deren Halbmesser der Reihe nach $\frac{1}{2}\gamma$, $\frac{3}{2}\gamma$, $\frac{5}{2}\gamma$, ... sind. Ihre gegenseitigen Abstände, längs der Kreisperipherie gemessen, sind alsdann den Radien der Kreise proportional (m. vgl. Taf. II. Fig. 3.).

Will man jetzt die Erscheinung kennen lernen, welche durch diese Gruppe von $2mn$ dunklen Schirmchen hervorgebracht wird, so braucht man nur die Summe

$$\Sigma\left[\frac{\sin(2n\,.\,\frac{1}{2}\gamma\delta\cos(\varphi-\psi))}{\sin(\frac{1}{2}\gamma\delta\cos(\varphi-\psi))}\right]$$

dadurch zu berechnen, dass man in ihrem allgemeinen Gliede statt φ nach und nach Null und alle um $\frac{\pi}{m}$ von einander verschiedenen Werthe bis π einsetzt, und dann alle so entstehenden Ausdrücke addirt. Die nämliche Summe wird offenbar auch erhalten, wenn man χ an die Stelle von $\varphi - \psi$ setzt, und jetzt χ alle um $\frac{\pi}{m}$ von einander verschiedenen Werthe von 0 bis π annehmen lässt. Denkt man sich die Anzahl m der Schirmreihen immer grösser und zuletzt unendlich gross, so wird $\frac{\pi}{m}$ unendlich klein $= d\chi = \beta$, und der Werth der obigen Summe rückt immer näher dem Integrale:

$$\frac{1}{\beta} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin(2n\,.\,\frac{1}{2}\gamma\delta\cos\chi)}{\sin(\frac{1}{2}\gamma\delta\cos\chi)} \cdot d\chi.$$

Setzt man aber

$$\tfrac{1}{2}\gamma\delta\cos\chi = x,$$

so geht dieses Integral über in

$$\frac{1}{\beta}\cdot\int_{-\frac{1}{2}\gamma\delta}^{+\frac{1}{2}\gamma\delta}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{2}\gamma\delta)^2-x^2}} = \frac{2}{\beta}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\gamma\delta}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{2}\gamma\delta)^2-x^2}}.$$

Obgleich hier die unter dem Integralzeichen stehende Funktion an der einen Grenze, für $x=\frac{1}{2}\gamma\delta$, die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so gehört doch dieses Integral noch nicht zu den unterbrochenen, sondern hat einen bestimmten Werth, weil der Exponent des im Nenner verschwindenden Faktors $(\frac{1}{2}\gamma\delta - x)^{\frac{1}{2}}$ kleiner ist als 1. Nun ist aber aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bekannt, dass

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\cdot f(x)\,.\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot f(0)$$

ist, wenn $k=\infty$ und h positiv und $\overline{\overline{<}}\,\pi$ gedacht wird. Denken wir uns daher die Anzahl n der Schirmchen einer Reihe unendlich gross, und gleichzeitig $\gamma\delta \overline{\overline{<}}\, 2\pi$, so finden wir:

$$\frac{2}{\beta}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\gamma\delta}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{2}\gamma\delta)^2-x^2}} = \frac{\pi}{\beta}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\gamma\delta}.$$

Nun ist

$$\delta = \sqrt{q^2+r^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\varrho,$$

wo ϱ (gleich dem Sinus des Beugungswinkels) den Radius Vektor desjenigen Punktes der Bildprojektion vorstellt, dessen Orthogonalcoordinaten a und b sind. Führt man mittelst dieser Gleichung ϱ an die Stelle von δ in obiger Formel, so geht die dortige Bedingung $\gamma\delta \overline{\overline{<}}\, 2\pi$ jetzt über in diese $\gamma\varrho \overline{\overline{<}}\, \lambda$, welche, weil ϱ immer kleiner als 1 bleibt, stets erfüllt ist, wenn man γ gleich oder kleiner annimmt als die kleinste Wellenlänge. Nehmen wir jetzt weiter noch an, die Schirmchen seien kleine Kreise vom Radius α, so muss ihr Durchmesser, damit sich die dem Coordinatenanfang zunächst befindlichen nicht gegenseitig theilweise decken kleiner sein als $\frac{1}{2}\gamma d\chi$ oder $\frac{1}{2}\beta\gamma$; es ist demnach α verschwindend

klein gegen die Wellenlänge λ, und von der in §. 12. für den Kreis berechneten Reihe J bleibt blos noch das erste Glied übrig, welches dem negativen Flächeninhalt $-\alpha^2\pi$ des kleinen Kreises gleich ist. Mit dem Quadrate von $-\alpha^2\pi$ hat man demnach das Quadrat des oben ausgewertheten Integrals noch zu multipliciren, um den Ausdruck zu haben, welchem die von der angenommenen Gruppe kreisrunder Schirmchen auf der Peripherie eines mit dem Radius ϱ von der Bildmitte aus beschriebenen Kreises hervorgebrachte Lichtstärke um so näher rückt, je grösser man die Anzahl m der geradlinigen Reihen werden lässt. Man findet so

$$\left(\frac{\pi\alpha^2}{\beta\gamma}\right)^2 \cdot \frac{\lambda^2}{\varrho^2}.$$

Für den Mittelpunkt des Bildes aber wird diese Formel nicht mehr gelten, sondern die daselbst stattfindende Intensität ist nach §. 18. ausgedrückt durch

$$(\mathbf{K} - n.\iint dy dx)^2,$$

wo $\mathbf{K}$ die Amplitude alles Lichtes, welches ohne Dazwischenkunft von Schirmchen direkt in's Fernrohr oder in's Auge eintreten würde, n die Anzahl aller vorhandenen Schirmchen und das Doppelintegral den Flächeninhalt eines einzigen Schirmchens vorstellt. In dem vorliegenden Fall trifft demnach auf die Bildmitte die Intensität

$$(\mathbf{K} - 2mn\alpha^2\pi)^2.$$

Man ersieht daraus, wie die Intensität des direkt einfallenden Lichtes abnimmt, wenn die Schirmchen grösser werden und wenn sie dichter zusammen rücken; gleichzeitig aber wächst die Intensität des gebeugten Lichtes, wie der oben für dasselbe aufgestellte Näherungsausdruck zeigt. Man ersieht aus diesem ferner, dass, bei homogenem Lichte, die Lichtstärke in irgend einem Punkte des Bildes dem Quadrate seiner Entfernung von der Bildmitte umgekehrt und dem Quadrate der Wellenlänge direkt proportional ist. Setzt man daher die im weissen Licht vorhandene Menge einer jeden Farbe $=1$, so werden sich, wenn man einen weissen Lichtpunkt durch eine solche Gruppe verschwindend kleiner Schirmchen betrachtet, die im gebeugten Licht vorhandenen Mengen der einzelnen Farben zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Wellenlängen. Nimmt man daher, im gebeugten Licht, das der Stelle B des Sonnenspektrums entsprechende Roth zur Einheit, so ergeben sich für die übrigen Fraunhoferschen Linien die folgenden Zahlenverhältnisse:

B	1.0000
C	0.9044
D	0.7288
E	0.5827
F	0.4957
G	0.3880
H	0.3302.

In dem gebeugten Lichte, welches durch unsere Gruppe verschwindend kleiner Schirmchen hindurchgeht, werden demnach die Strahlen grösserer Wellenlänge entschieden vorherrschen; es muss daher eine röthlichgelbe Färbung zeigen, und zwar durchaus die nämliche Nüance. Nur der direkt beleuchtete Bildmittelpunkt wird weiss erscheinen, seine Lichtstärke trübt sich aber um so mehr, je grösser die Schirmchen werden und je dichter sie zusammenrücken, während gleichzeitig die röthlichen gebeugten Strahlen an Helligkeit gewinnen.

Betrachtet man durch die Gruppe von Schirmchen eine weisse Lichtscheibe, so würde jeder Punkt derselben für sich auf der Bildfläche sein weisses Bild erzeugen, welches von röthlichem gebeugten Lichte rings umgeben wäre. Da aber jeder Punkt des Bildes jetzt von den röthlichen Ringen der Nachbarpunkte bedeckt wird, so kann er nicht mehr weiss erscheinen, sondern er wird diejenige röthliche Nüance zeigen, welche aus der Mischung seines weissen Lichtes mit den auf ihn treffenden röthlichen Strahlen seiner Nachbarpunkte hervorgeht. Diese Nüance wird aber um so entschiedener roth sein, je mehr bei dichterem Zusammenrücken und Grösserwerden der Schirmchen das direkt eingedrungene weisse Licht gegen das brillanter werdende röthliche Licht der gebeugten Strahlen zurücktritt. Eine weisse Lichtscheibe wird also, durch eine solche Gruppe verschwindend kleiner Schirmchen betrachtet, eine röthliche Färbung zeigen, welche um so entschiedener hervortritt, je grösser die Schirmchen werden und je dichter sie zusammenrücken; wobei jedoch vorausgesetzt ist, dass sie sich nicht gegenseitig decken.

§. 21. Bei der im vorigen Paragraphen angenommenen Gruppirung der kleinen Schirmchen sind die gegenseitigen Abstände derjenigen, welche den innersten Ring vom Radius $\frac{1}{2}\gamma$ zusammensetzen, verschwindend klein gegen die Zwischenräume γ, durch welche die Schirmchen in den ursprünglich angenommenen geradlinigen Reihen von einander getrennt sind. Die Vertheilung der

Schirmchen über das Gesichtsfeld ist daher keineswegs eine gleichmässige. Um eine gleichmässigere Vertheilung wenigstens in der Nähe des Anfangspunktes O (Taf. II. Fig. 3.) zu erzielen, denken wir uns zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ringen eine beliebige Anzahl p neuer Ringe eingeschaltet, und da wo sie die ursprünglichen geradlinigen Reihen schneiden, mit Schirmchen besetzt. Diejenigen Schirmchen, welche, auf einer und derselben durch den Coordinatenanfang gelegten Geraden stehend, dem νten Ringe eines jeden Zwischenraumes angehören, bilden eine geradlinige Reihe, welche sich von der Anfangs des vorigen Paragraphen betrachteten blos dadurch unterscheidet, dass für sie jetzt $x_0 = (\frac{1}{2} + \frac{\nu}{p})\xi$ und $y_0 = (\frac{1}{2} + \frac{\nu}{p})\eta$ zu nehmen ist; sie liefert daher die Composante

$$C' = \frac{2 \sin \frac{1}{2} n (q\xi + r\eta) . \cos (\frac{1}{2} n + \frac{\nu}{p})(q\xi + r\eta)}{\sin \frac{1}{2} (q\xi + r\eta)} . C.$$

Da aber der echte Bruch $\frac{\nu}{p}$ gegen das unendlich grosse $\frac{1}{2}n$ vernachlässigt werden kann, so ergibt sich genau wie früher:

$$C' = \frac{\sin 2n . \frac{1}{2}(q\xi + r\eta)}{\sin \frac{1}{2}(q\xi + r\eta)} . C,$$

und ebenso auch

$$S' = \frac{\sin 2n . \frac{1}{2}(q\xi + r\eta)}{\sin \frac{1}{2}(q\xi + r\eta)} . C.$$

Es wird sich daher auch die Summe Σ des νten Ringsystems von derjenigen des ersten gar nicht unterscheiden und man wird schliesslich für die Intensität des gebeugten Lichtes der Gesammtgruppe den Ausdruck

$$\left(\frac{\pi p \alpha^2}{\beta\gamma}\right)^2 . \frac{\lambda^2}{\varrho^2}$$

finden, während die Intensität des direkten Lichtes durch

$$(\mathbf{K} - 2mnp\alpha^2\pi)^2$$

vorgestellt wird. Die jetzige Erscheinung ist demnach in qualitativer Beziehung von der vorigen gar nicht, in quantitativer aber in sofern verschieden, dass das direkte weisse Licht noch weit mehr verdüstert, das gebeugte röthliche Licht dagegen viel brillanter erscheint als dort.

Bei der hier vorgenommenen Einschaltung von Schirmchen

ist jedoch der vom innersten Ring, dessen Radius $=\frac{1}{2}\gamma$ ist, eingeschlossene Flächenraum vollständig offen geblieben, weil eine Fortsetzung des Einschaltungsgesetzes bis zum Mittelpunkt O daselbst nothwendig eine gegenseitige Deckung der Schirmchen hätte herbeiführen müssen. Da aber dieser offene Raum verschwindend klein ist im Vergleich zum ganzen Gesichtsfeld, so ist es gleichgültig, ob wir ihn offen lassen oder ganz verschliessen, oder ihn nach irgend einem Gesetze mit kleinen Schirmchen erfüllen; die Wirkung, welche diese hervorbringen würden, würde immerhin verschwindend klein sein gegenüber der in den obigen Formeln enthaltenen Wirkung der übrigen. Wir können daher jene Formeln auch noch für den Fall gelten lassen, dass der kleine offene Raum, dessen Durchmesser kleiner ist als die kleinste Wellenlänge, in beliebiger Weise mit Schirmchen erfüllt sei.

§. 22. Nun werde an die Stelle eines jeden dunkeln Schirmchens der Gruppe ein kleines kugelförmiges Wasserbläschen ebenfalls vom Radius α gesetzt; die Dicke der Wasserschicht in demselben sei verschwindend klein gegen den Radius, so wird ein Lichtstrahl AB (Taf. II. Fig. 4.), weil wegen der Dünne der Schicht die Elemente der Kugelflächen in B und C als parallel betrachtet werden können, innerhalb des Bläschens parallel mit seiner ursprünglichen Richtung nach CD verlaufen und dann aus demselben Grunde das Bläschen in der nämlichen Richtung verlassen, in welcher er dasselbe traf. Die Lichtstrahlen werden daher nahezu ebenso durch das Bläschen gehen, als wäre dasselbe ein kreisrundes dünnes, von parallelen Ebenen begrenztes Plättchen vom Radius α, und wir können daher die in §. 8. für solche Plättchen entwickelte Theorie auf dasselbe anwenden. Man muss aber, um für ein solches Plättchen die Lichtstärke zu erhalten, die für ein gleichgestaltetes dunkles Schirmchen geltende Intensität mit dem Faktor

$$1-2K\cos\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d+K^2$$

multipliciren, wo K den Schwächungscoefficienten, d die Dicke des Plättchens und n den Brechungscoefficienten der Substanz bedeutet, aus welcher das Plättchen besteht. Da nun aber hier, wie wir oben voraussetzten, d verschwindend klein ist gegen α, und α selbst kleiner ist als λ, so ist der Bogen jenes Cosinus von Null unendlich wenig verschieden, und der Faktor geht über in

$$(1-K)^2.$$

Für die aus Wasserbläschen bestehende Gruppe erhält man daher die Ausdrücke:

$$(1-K)^2 \cdot \left(\frac{\pi p \alpha^2}{\beta\gamma}\right)^2 \cdot \frac{\lambda^2}{\varrho^2} \quad \text{und} \quad (\mathbf{K}-2(1-K)^2 m n p \alpha^2 \pi)^2.$$

Die Erscheinung ist demnach von der vorigen qualitativ nicht verschieden; nur wird das direkt einfallende weisse Licht mehr betragen als vorher, während das röthliche gebeugte Licht gegen vorher geschwächt erscheint.

§. 23. In den vorausgehenden Entwickelungen scheint mir nun, aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie geschöpft, die Erklärung der Thatsache enthalten zu sein, dass der Wasserdampf in einem gewissen Stadium seiner Verdichtung die rothen und gelben Strahlen vorzugsweise durchlässt. Der Wasserdampf bildet, wenn er aus dem vollkommen gasförmigen Zustand in den flüssigen übergeht, äusserst zarte Bläschen, welche, Anfangs ausserordentlich klein und nur spärlich vorhanden, mit fortschreitender Verdichtung immer häufiger und grösser werden. Obgleich nun diese Bläschen nicht, wie diejenigen des vorigen Paragraphen, in einer und derselben Ebene liegen, sondern im Raume zerstreut sind, so können wir doch diesen Fall auf jenen zurückführen, indem wir alle Bläschen auf eine zu den direkt einfallenden Strahlen senkrechte Ebene projiciren; denken wir uns alsdann jedes Bläschen an die Stelle seiner Projektion, oder, was dasselbe ist, an die Stelle des Schattens gesetzt, welchen es auf jene Ebene werfen würde, so wird die jetzige Wirkung der Bläschen, wie man sich leicht überzeugt, von der früheren nicht verschieden sein. Die Anordnung der Bläschen in der genannten Ebene wird nun allerdings eine durchaus unregelmässige sein und sich jeder Berechnung entziehen, ja es werden sogar die einzelnen Bläschen sich bewegen und in jedem Augenblick eine andere Lage einnehmen. Will man aber die Erscheinung dennoch dem Calcul unterwerfen, so muss man über die Anordnung der Bläschen eine bestimmte Annahme machen, welche sich möglichst genau den Bedingungen der Aufgabe anschliesst. Da nun kein Grund vorhanden ist, irgend einer der rings von der Fernrohraxe ausgehenden Richtungen vor den andern einen Vorzug einzuräumen, so nehmen wir an, dass alle diese Richtungen unter sich gleich seien. Dieser Bedingung ist aber durch unsere obige Anordnung der Gruppe genügt, während durch §. 21. zugleich dafür gesorgt ist, dass die Schirmchen wenigstens in der Nähe des Mittelpunktes O möglichst gleichförmig über das Gesichtsfeld vertheilt seien. Es dürfte demnach als gerechtfertigt erscheinen, wenn wir die im vorigen Paragraphen besprochene Gruppe von Wasserbläschen als Repräsentantin ansehen der Gruppe von Wasserbläschen, welche im sich verdichtenden Wasserdampfe entstehen, und wenn

wir demgemäss die dort gezogenen Folgerungen auch auf den jetzigen Fall ausdehnen, und folgende Sätze aussprechen:

Die äusserst feinen Wasserbläschen, welche sich bei Verdichtung des gasförmigen Wasserdunstes bilden, üben auf das durchgehende Licht eine beugende Wirkung aus; kommt dieses Licht von einem sehr weit entfernten weissen Lichtpunkt, so wird der Punkt selbst zwar weiss erscheinen, aber das gebeugte Licht, welches ihn rings umgibt, wird eine röthliche Nüance zeigen; eine sehr weit entfernte weisse Lichtscheibe wird dagegen in ihrer ganzen Ausdehnung roth erscheinen, und dieses Roth wird um so tiefer sein, je grösser die Bläschen werden und je dichter sie zusammrücken.

Enthalten die unteren Schichten der Atmosphäre, während sich die untergehende Sonne dem Horizont nähert, Wasserdampf im Zustand der anfangenden Verdichtung, so wird die Sonne, je tiefer sie sinkt, durch immer dickere Schichten von Wasserbläschen gesehen werden, und die Projektionen der einzelnen Wasserbläschen auf jene zur Gesichtslinie senkrechte Ebene werden immer näher zusammenrücken; zugleich werden, indem bei abnehmender Wärme die Verdichtung weiterschreitet, die Wasserbläschen grösser werden. Die untergehende Sonne muss daher, nach dem obigen Satze, eine um so tiefere Röthe zeigen, je mehr sie sich dem Horizonte nähert. Bei Sonnenaufgang werden sich die nämlichen Umstände in umgekehrter Ordnung wiederholen. Die Erscheinung der Morgen- und Abendröthe, welche bereits von Forbes aus der von ihm beobachteten Eigenschaft des sich verdichtenden Wasserdampfes, die rothen und gelben Strahlen vorzugsweise durchzulassen, erklärt wurde, wäre also hiemit, wie diese Eigenschaft des Wasserdampfes selbst, durch den Calcul aus den Grundgesetzen der Undulationstheorie abgeleitet.

Der oben ausgesprochene Satz kann jedoch offenbar nur für den Anfang der Verdichtung gelten, wo die Wasserbläschen ausserordentlich klein und nur ziemlich spärlich vorhanden sind. Werden sie nämlich bei fortschreitender Verdichtung häufiger und grösser, so werden sich ihre Projektionen ein oder mehreremal decken, und sie werden dann einen undurchsichtigen Nebel bilden, welcher im reflektirten Lichte weiss erscheint.

XXIV.

Ueber das Aufsuchen der reellen Wurzeln eines Gleichungs-Polynoms.

Von

Herrn *H. Schramm*,

Assistenten für höhere Mathematik und Geodäsie am k. k. Joanneum zu Gratz.

Um die Anzahl und die Grenzen der reellen, positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung zu finden, hat man bisher viele, und mitunter sehr schöne und scharfsinnige Methoden erfunden; davon werden jedoch die wenigsten wirklich angewendet, weil sie entweder nicht ganz bestimmte und verlässliche Resultate liefern, oder weil sie mit umständlichen Rechnungen verbunden sind. Zu der ersteren Gattung gehören alle Sätze, welche die obere und untere Grenze der Wurzeln angeben, zu der letzteren, — unter andern, — auch der Sturm'sche Satz.

Man greift daher wieder zu dem, zwar einfachsten, aber der Mathematik nicht ganz würdigen Mittel, dem Probiren.

Ist nemlich:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

die aufzulösende Gleichung, in der $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gegebene dekadische Zahlen bedeuten, so setzt man in $f(x)$ statt x so lange verschiedene Werthe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ ein, bis $f(x)$ sein Zeichen ändert, und weiss dann, dass zwischen zwei Werthen α_r und α_{r+r_1}, deren Substitutionsresultate entgegengesetzte Zeichen haben, eine ungerade Anzahl von Wurzeln liegt.

Bekanntlich ist dieses Verfahren auch nicht immer verlässlich, eben weil es nur eine ungerade Anzahl von Wurzeln erkennen lässt. Auch wird dabei die Berechnung der Substitutionsresultate $f(\alpha)$, für hohe Werthe von α, ziemlich beschwerlich. Um sich diese Arbeit erleichtern und zugleich alle Zweifel über zwei oder mehrere nahe beisammenliegende Wurzeln zu beseitigen, kann man wie folgt verfahren:

„Man betrachte $f(x)$ als den allgemeinen Ausdruck des $x$ten Gliedes einer Differenzreihe der $n$ten Ordnung, und suche durch wirkliche Berechnung dieser Reihe den Zeiger $x=\alpha$ eines Gliedes, welches gleich Null ist; oder wenn dieses nicht stattfindet, jene Zeiger α und $\alpha+1$, zwischen denen die Glieder durch 0 gehen.“

Dass eine ganze rationale Funktion $f(x)$ immer als Glied einer Differenzreihe der $n$ten Ordnung betrachtet werden kann, ist hinreichend bekannt, und man erzielt damit vor allem eine leichtere Berechnung der Funktionswerthe $f(\alpha)$. Andere Vortheile, die diese Betrachtung noch überdies bietet, sollen später besprochen werden.

Auf welche Art diese Berechnung ausgeführt werden kann, wollen wir gleich an einer spezielleren Annahme zeigen, nemlich an einem Polynome des 4ten Grades, indem die Sache leichter zu übersehen ist, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

Ist

$$f(x)=u_x=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0. \quad . \quad . \quad (1)$$

die gegebene Gleichung und, nach der üblichen Bezeichnungsweise,

$$\Delta^1 u_x=u_{x+1}-u_x, \quad \Delta^2 u_x=\Delta^1 u_{x+1}-\Delta^1 u_x, \text{ u. s. w.};$$

so lässt sich die Differenzreihe $\ldots . u_x,\ u_{x+1},\ u_{x+2}\ldots .$ rechnen, wenn man entweder 1) je ein Glied von demselben Zeiger der Hauptreihe und der dazu gehörigen Differenzreihen der niedrigeren Ordnungen kennt, oder 2) wenn $n+1$ (hier also $4+1$) aufeinanderfolgende Glieder der Hauptreihe bekannt sind. — Für die erste Art der Berechnung erhält man

$$\Delta^1 u_x=u_{x+1}-u_x=f(x+1)-f(x),$$

oder:

$$\Delta^1 u_x=4a_0x^3+(6a_0+3a_1)x^2+(4a_0+3a_1+2a_2)x+a_0+a_1+a_2+a_3;$$

ebenso:

$$\Delta^2 u_x = \Delta^1 u_{x+1} - \Delta^1 u_x,$$
$$\Delta^2 u_x = 12 . a_0 x^2 + (24 a_0 + 6 a_1) x + 14 a_0 + 6 a_1 + 2 a_2;$$

ferner:

$$\Delta^3 u_x = 24 a_0 x + 36 a_0 + 6 a_1,$$
$$\Delta^4 u_x = 24 a_0.$$

Um daraus die 0ten Glieder dieser Differenzreihen zu finden, setze man:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0, \quad u_0 = a_4, \\ \Delta^1 u_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \quad \Delta^2 u_0 = 36 a_0 + 6 a_1, \\ \Delta^4 u_0 = 24 a_0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Das Gesetz, welches die Coeffizienten in diesen Ausdrücken befolgen, ist, in einem Polynom vom $n$ten Grade, nur bei $\Delta^1 u_0$ und $\Delta^n u_0$ einfach und übersichtlich, nemlich:

$$\Delta^1 u_0 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . u_{n-1},$$
$$\Delta^n u_0 = 1 . 2 . 3 \ldots . n . a_0.$$

Die übrigen Differenzen lassen sich, wie später gezeigt werden soll, rekurrirend, eine aus der anderen, unmittelbar angeben.

Hat man auf diese Art $\Delta^1 u_0$, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$ gerechnet, so bilde man daraus nach den bekannten Regeln eine Differenzreihe, die man so lange fortsetzt, bis man zu der Ueberzeugung gelangt, dass die weiteren Glieder ihr Zeichen nicht mehr ändern können.

Beispiel: Hätte man die Gleichung:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 12x + 70 = 0$$

aufzulösen, so berechne man:

$$u_0 = 70, \quad \Delta^1 u_0 = 1 - 6 + 3 - 12 = -14,$$
$$\Delta^2 u_0 = 14 - 6.6 + 2.3 = -16, \quad \Delta^3 u_0 = 36 - 6.6 = 0, \quad \Delta^4 u_0 = 24$$

und bilde daraus die Differenzreihe:

−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
170	92	70	56	26	−20	−58	−40	+106
− 78	−22	−14	−30	−46	−38	+18	146	370
+ 56	+ 8	−16	−16	+ 8	+56	128	224	344
− 48	−24	0	+24	48	72	96	120	144
24	24	24	24	24	24	24	24	24

Diese Gleichung hat also nur zwei positive Wurzeln, wovon die eine zwischen 2 und 3, die andere zwischen 5 und 6 liegt. Man sieht auch sogleich, dass ausser diesen genannten keine reellen Wurzeln mehr vorkommen können, indem über das 6te hinaus die Glieder um eine positive Grösse vermehrt, und über 0, —1, —2 hinaus um eine negative vermindert, also ebenfalls vermehrt werden.

Um nach der 2ten Art diese Differenzreihe zu erhalten, rechne man vier*) aufeinanderfolgende Funktionswerthe, z. B. $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ und bilde daraus durch Subtraction je zweier neben einander stehenden Glieder die nöthigen Differenzen, und füge zuletzt noch die bekannte 4te Reihe mit constanten Gliedern $=1.2.3.4$ $=24$ hinzu, und rechne mit Hülfe der letzteren weiter. Für unser Beispiel würde man das folgende Gerippe erhalten haben:

	−1	0	1	2	
	92	70	56	26	
	−22	−14	−30		
	8	−16			
	−24				
....24	24	24	24	24	24....

womit man die Berechnung der Reihe, respective der auf einander folgenden Funktionswerthe $f(x)$ leicht fortsetzen kann.

Nicht genug daran, dass man sich auf diese Art die Rechnung erleichtert, und sich gleichsam ein Bild der ganzen Gleichung verschafft, kann man auch die Glieder der niederen Differenzreihen benutzen um:

1) die einzuführende Wurzel x in zwei engere Grenzen einzuschliessen und

2) um nahe beisammenliegende Wurzeln aufzusuchen, und dieselben zu trennen.

I.

Ist $u_r = f(r)$ das $r$te Glied einer Differenzreihe, und $\Delta^1 u_r$, $\Delta^2 u_r \ldots$ die dazugehörigen Differenzen, d. i. die $r$ten Glieder der auf einander folgenden Differenzreihen, so ist, nach einer bekannten Formel:

---

*) Eigentlich sollte man $n+1$, $=4+1$, rechnen; da jedoch die constante Differenz $=1.2.3.4\,a_0$ bekannt ist, so fällt ein Glied weg.

$$u_{r+z} = u_r + z\Delta^1 u_r + z(z-1)\frac{\Delta^2 u_r}{1.2} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 u_r}{1.2.3} + \ldots$$

wobei z auch ein Bruch, kleiner als 1 sein kann. Ordnet man nach z, so erhält man:

$$u_{r+z} =$$

$$u_r + z\left\{\Delta^1 u_r - \frac{\Delta^2 u_r}{1.2} + \frac{2\Delta^3 u_r}{1.2.3} - \frac{2.3\Delta^4 u_r}{1.2.3.4} + \ldots\right\}$$

$$+ z^2\left\{\frac{\Delta^2 u_r}{1.2} - \frac{(1+2)\Delta^3 u_r}{1.2.3} + \frac{(2+3+2.3)\Delta^4 u_r}{1.2.3.4} - \frac{(2.3+2.4+3.4+2.3.4)\Delta^5 u_r}{1.2.3.4.5} + \ldots\right\}$$

$$+ z^3\left\{\frac{\Delta^3 u_r}{1.2.3} - \frac{(1+2+3)\Delta^4 u_r}{1.2.3.4} + \frac{(2+3+4+2.3+2.4+3.4)\Delta^5 u_r}{1.2.3.4.5} - \ldots\right\}$$

$$+ z^4\left\{\frac{\Delta^4 u_r}{1.2.3.4} - \frac{1+2+3+4}{1.2.3.4.5}\cdot\Delta^5 u_r + \ldots\right\}$$

$$+ z^5\left\{\frac{\Delta^5 u_r}{1.2.3.4.5} - \ldots\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

oder auch:

$$(3)$$

$$u_{r+z} = u_r + z\left\{\Delta u_r - \frac{\Delta^2 u_r}{2} + \frac{\Delta^3 u_r}{3} - \frac{\Delta^4 u_r}{4} + \ldots\right\}$$

$$+ z^2\left\{\frac{\Delta^2 u_r}{2!} - 3\frac{\Delta^3 u_r}{3!} + 11\frac{\Delta^4 u_r}{4!} - 50\frac{\Delta^5 u_r}{5!} - \ldots\right\}$$

$$+ z^3\left\{\frac{\Delta^3 u_r}{3!} - 6\frac{\Delta^4 u_r}{4!} + 35\frac{\Delta^5 u_r}{5!} - \ldots\right\}$$

$$+ z^4\left\{\frac{\Delta^4 u_r}{4!} - 10\frac{\Delta^5 u_r}{5!} + \ldots\right\}$$

$$+ z^5\left\{\frac{\Delta^5 u_r}{5!} + \ldots\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

wobei die Reihe beim $(n+1)$ten Gliede abbricht, weil $\Delta^{n+1}u_r = 0$ ist.

Ist nun r eine Grenze der Wurzel x, also $x = r + z$, und entwickelt man

$$f(x) = f(r+z) = f(r) + zf'(r + z^2\frac{f''(r)}{1.2} + z^3\frac{f'''(r)}{1.2.3} + \ldots,$$

so muss diese Reihe mit der Entwickelung in 3) offenbar identisch sein, d. h. es ist:

$$f(r) = u_r, \quad f'(r) = \Delta u_r - \frac{\Delta^2 u_r}{2} + \frac{\Delta^3 u_r}{3} - \frac{\Delta^4 u_r}{4} + \ldots,$$

$$f''(r) = \frac{\Delta^2 u_r}{1.2} - \frac{3\Delta^3 u_r}{1.2.3} + 11\frac{\Delta^4 u_r}{1.2.3.4} + \ldots,$$

u. s. w.

und man kann somit aus den bekannten Differenzen den ersten Differential-Quotienten, so wie auch alle übrigen ableiten.

Besonders ist es der erste $f'(r)$, dessen Bildungsgesetz sogleich in die Augen fällt, und leicht zu merken ist. Man kann daher, nach der Newton'schen Methode, jene Correction z annähernd berechnen, durch den Quotienten:

$$z_1 = -\frac{f(r)}{f'(r)} = \frac{u_r}{\Delta u_r - \frac{\Delta^2 u_r}{2} + \frac{\Delta^3 u_r}{3} - \frac{\Delta^4 u_r}{4} + \ldots} \quad \ldots (5)$$

(Dabei kann noch bemerkt werden, dass allgemein $\frac{\Delta^n u_r}{1.2.3\ldots n}$ immer eine ganze Zahl ist, wenn die Coeffizienten a_0, a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$ es sind).

Einen zweiten Näherungswerth erhält man unmittelbar aus der Differenzreihe, wenn man zur Berechnung von z die Regula falsi verwendet; denn, sind u_r und u_{r+1} jene Glieder der Hauptreihe, zwischen welchen die Wurzel liegt, so hat man bekanntlich (s. Taf. II. Fig. 5.):

$$z_2 : 1 = \mp u_r : \pm (u_{r+1} + u_r),$$

$$z_2 = -\frac{u_r}{u_{r+1} + u_r}.$$

Da jedoch, unter der Voraussetzung, dass u_r und u_{r+1} entgegengesetzte Zeichen haben,

$$\Delta^1 u_r = u_{r+1} - (-u_r) = u_{r+1} + u_r$$

ist, so hat man auch:

$$z_2 = -\frac{u_r}{\Delta^1 u_r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Wenn ferner

$$f''(x) = \frac{\Delta^2 u_x}{1.2} - \frac{3\Delta^3 u_x}{1.2.3} + \frac{11\Delta^4 u_x}{1.2.3.4} - \ldots,$$

zwischen $x = r$ und $x = r+1$ seine Zeichen nicht ändert, so ist stets eine dieser Correctionen z_1 und z_2 grösser, die andere kleiner als z selbst, und wir haben somit die Wurzel in zwei neue Grenzen eingeschlossen:

$$r - \frac{f(r)}{f'(r)} \lessgtr x \lessgtr r - \frac{u_r}{\Delta^1 u_r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Nimmt man aus diesen Werthen das arithmetische Mittel, so gibt dieses einen neuen Näherungswerth, dessen erste Dezimale in der Regel schon richtig ist, und mit welchem man somit die Rechnung nach irgend einer der bekannten Näherungsmethoden fortführen kann. Geht der zweite Differential-Quotient $f''(x)$ zwischen $x = r$, und $x = r+1$ durch 0, was man sogleich an dem Zeichenwechsel der zweiten Differenzreihe (mit den Gliedern $\Delta^2 u_x$) wahrnimmt, indem in

$$f''(r) = \frac{\Delta^2 u_r}{1.2} - \frac{3\Delta^3 u_r}{1.2.3} + \ldots$$

$\frac{\Delta^2 u_r}{1.2}$ den grössten Einfluss darauf ausübt, so nehme man nur

$$z_2 = \frac{-u_r}{\Delta^1 u_r}$$

als Näherungswerth von z, weil derselbe am leichtesten zu rechnen ist, und der Wurzel am nächsten kommt.

Diese Art und Weise der Aufsuchung der Wurzeln einer Gleichung empfiehlt sich besonders dann, wenn man die genauere Berechnung derselben nach der Newton'schen Methode fortsetzen will, indem meistens ein einmaliges Anwenden der letzteren hinreicht, um die Wurzel auf drei bis vier Dezimal-Stellen zu berechnen.

Wenden wir also das Gesagte auf die früher vorgelegte Zahlengleichung an: Für die zwischen 2 und 3 liegende Wurzel haben wir, wenn wir die früher gefundenen 2ten und 3ten Glieder der zusammengehörigen Differenzenreihen herausschreiben:

2	3
26	−20
−46	−38
+ 8	56
48	72
24	24

$$f'(2) = (-46) - \frac{8}{2} + \frac{48}{3} - \frac{24}{4} = -40,$$

$$\Delta^1 u_2 = -46;$$

also ist:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{26}{40} = 0\cdot65, \\ z_2 &= \frac{26}{46} = 0\cdot565, \end{aligned}\right\} \text{ woraus } z = 0\cdot6\ldots.$$

und $x_1 = 2\cdot6$ ist.

Daraus erhält man durch einmalige Anwendung der Newton-schen Regel:

$$y = -\frac{f(2\cdot6)}{f'(2\cdot6)} = -0\cdot014199,$$

somit

$$x = 2\cdot58580,$$

während die richtige Wurzel $= 4 - \sqrt{2} = 2\cdot58579\ldots.$ ist.

Um die andere Wurzel, welche zwischen 5 und 6 liegt, zu finden, wollen wir uns der Horner'schen Methode bedienen. Statt jedoch die Wurzeln des gegebenen Polynoms nach der genannten Methode um 5 zu vermindern, kann man aus den vorhandenen Differenzen (vom Zeiger 5) diese neue Gleichung sogleich ableiten, wenn man in die Gleichung (3) für u_{r+z} die Werthe für $\Delta^1 u_r$, $\Delta^2 u_r \ldots.$ einsetzt:

$$\Delta^1 u_5 = 146, \quad \frac{\Delta^3 u_5}{1.2.3} = 20,$$

$$\frac{\Delta^2 u_5}{1.2} = 112, \quad \frac{\Delta^4 u_5}{1.2.3.4} = 1$$

und zugleich $u_{r+z} = 0$ setzt. Man erhält dann:

$$-40 + z(146 - 112 + 40 - 6) + z^2(112 - 60 + 11) + z^3(20 - 6) + z^4 = 0,$$

oder

$$z^4 + 14z^3 + 63z^2 + 68z - 40 = 0,$$

in welcher Gleichung $z = x - 5$ ist. Da nun nach dem Früheren die Wurzel zwischen

$$5 + \frac{40}{68} = 5\cdot58$$

und

$$5+\frac{40}{146}=5\cdot 27$$

(siehe Rel. (7)) liegt, so kann man das arithmetische Mittel daraus nehmen, um die Zahl zu erhalten, um welche man sämmtliche Wurzeln der neuen Gleichung zu vermindern hat; diese ist

$$\frac{0\cdot 58+0\cdot 27}{2}=0\cdot 42\ldots.$$

0·4)	1	14	63	68	−40
	1	14·4	68·76	95·504	−1·7984
	1	14·8	74·68	125·776	
	1	15·2	80·76		
	1	15·6			
	1				

Es ist also:

$$y^4+15\cdot 6y^3+80\cdot 76y^2+125\cdot 776y-1\cdot 7984=0,$$

die weiter aufzulösende Gleichung, in welcher $y=x-5\cdot 4$ ist.

Wir wollen uns jedoch mit dem neuen Näherungswerthe

$$x=5\cdot 4+y=5\cdot 4+\frac{1\cdot 7984}{125\cdot 776}=5\cdot 41429$$

begnügen, welcher erst in der 5ten Dezimale von der richtigen Wurzel $x=4+\surd 2=5\cdot 41421\ldots.$ abweicht.

Die zur Bildung der Differenzreihe nöthigen Grössen $\varDelta^1 u_0$, $\varDelta^2 u_0$, $\varDelta^3 u_0\ldots.$ hätte man auch aus der allgemeinen Formel

$$0=u_r=u_0+x.\varDelta^1 u_0+\frac{x(x-1)}{1.2}\varDelta^2 u_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\varDelta^3 u_0+\ldots.$$

erhalten, wenn man die darin angezeigten Produkte entwickelt, das Ganze nach x geordnet und mit dem gegebenen Gleichungspolynom

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots.a_{n-1}x+a_n=0$$

verglichen hätte. Durch Gleichsetzung der Coeffizienten der correspondirenden Potenzen von x erhielte man $n+1$ Gleichungen, welche linear und leicht aufzulösen sind. Soll aber die eben beschriebene Methode der Aufsuchung der Wurzeln auch einen praktischen Werth haben, so müssen sich die Grössen $\varDelta^1 u_0$, $\varDelta^2 u_0\ldots.$

unmittelbar und leicht angeben lassen, ohne erst grössere Multiplikationen auszuführen, oder Gleichungen auflösen zu müssen.

Auch dieses lässt sich erreichen, wenn man durch Induktion das Gesetz ermittelt, nach welchem die einzelnen Coeffizienten der Grössen a_0, a_1, $a_2 \ldots . a_n$ in $\frac{\Delta^1 u_0}{1}$, $\frac{\Delta^2 u_0}{2!}$, $\frac{\Delta^3 u_0}{3!} \ldots .$ gebildet sind, und man erhält dann folgende Regel:

Sind $+A_0 a_m + A_1 a_{m+1} + A_2 a_{m+2} + \ldots .$ drei auf einander folgende Glieder von $\frac{\Delta^{r-1} u_0}{(r-1)!}$, und ebenso $B_0 a_m + B_1 a_{m+1} + B_2 a_{m+2} + \ldots$ die correspondirenden Glieder von $\frac{\Delta^r u_0}{r!}$, wobei A_0, A_1, A_2, ... und $B_2 \ldots .$ bekannt sind, so ist:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= r B_2 + A_2 \\ B_0 &= r B_1 + A_1 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

d. h. man erhält den Coeffizienten eines Gliedes der $r$ten Differenz, wenn man den (rechts) vorhergehenden mit dem Zeiger der Differenz, r, multiplizirt, und den darüberstehenden Coeffizienten der vorhergehenden Differenz addirt.

Nun haben wir schon früher bemerkt, dass

$$\Delta^1 u_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots . + a_{n-1}$$

ist, dass jede folgende Differenz um ein Glied weniger hat, so dass der letzte Gleichungscoeffizient in $\frac{\Delta_r u_0}{r!} \ldots . = a_{n-r}$ ist, und den Coeffizienten 1 hat. Es lassen sich also mit Hülfe der eben ausgesprochenen Regel die gesuchten Grössen $\Delta^1 u_0$, $\frac{\Delta^2 u_0}{2!} \ldots .$ der Reihe nach, eine aus der andern (recurrirend) entwickeln. — Für eine Gleichung vom 6ten Grade z. B. erhält man:

$$(\beta)$$

$$\Delta^1 u_0 = \quad a_0 + \quad a_1 + \quad a_2 + \quad a_3 + a_4 + a_5,$$

$$\frac{\Delta^2 u_0}{2!} = \binom{2.15+1}{=31} a_0 + \binom{2.7+1}{=15} a_1 + \binom{2.3+1}{=7} a_2 + \binom{2.1+1}{=3} a_3 + a_4,$$

$$\frac{\Delta^3 u_0}{3!} = \binom{3.25+15}{=90} a_0 + \binom{3.6+17}{=25} a_1 + \binom{3.1+3}{=6} a_2 + a_3.$$

und ebenso

$$(\beta)$$

$$\frac{\Delta^4 u_0}{4!} = 65a_0 + 10a_1 + a_2, \quad \frac{\Delta^5 u_0}{5!} = 15a_0 + a_1, \quad \frac{\Delta^6 u_0}{6!} = a_0.$$

Will man diese Formeln sogleich für eine Gleichung von niedrigerem Grade benützen, so hat man nur ebenso viele Coeffizienten $a_0, a_1 \ldots = 0$ zu setzen, als in derselben Potenzen von x fehlen. Ebenso leicht lassen sich durch Umkehrung dieser Formeln aus den gegebenen Differenzen $\Delta^1 u_0$, $\frac{\Delta^2 u_0}{2!}, \ldots$ die entsprechenden Gleichungscoeffizienten finden, denn es ist:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{\Delta^6 u_0}{6!}, & a_2 &= \frac{\Delta^4 u_0}{4!} - (65a_0 + 10a_1), \\ a_1 &= \frac{\Delta^5 u_0}{5!} - 15a_0, & &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

Diese Resultate lassen sich auch benützen, um eine gegebene Zahlengleichung mit Hülfe der Differenzreihen allein aufzulösen; man kann dabei in folgender Weise verfahren:

1) Hat man bereits eine, dem gegebenen Gleichungspolynom

$$f(x) = u_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0$$

entsprechende Differenzreihe gerechnet, und zwischen $x = \alpha$ und $x = \alpha + 1$ eine Wurzel gefunden, so bilde man aus den αten, oder $(\alpha + 1)$ten Gliedern (jenachdem die Wurzel näher an α oder $\alpha + 1$ liegt) mit Hülfe von (γ) eine neue Gleichung, deren Wurzeln y respektive um α, oder $\alpha + 1$ kleiner sind, setze hierauf je nach Umständen $y = \frac{y_1}{2}$, $\frac{y_1}{3}$, oder $\frac{y_1}{10}$, bilde wieder die dazu gehörende Differenzreihe, und verfahre mit dieser wie früher.

2) Sind auf diese Art zwei, oder mehrere Stellen der Wurzel gefunden worden, und ist z die noch fehlende Correction, so untersuche man, welche von den höchsten Gliedern der Gleichung auf das Resultat keinen Einfluss mehr üben, und lasse dieselben ganz weg. Dieser Einfluss ist dem grössten Werthe nach $= \frac{A_{n-r} z^r}{A_{n-1}}$, wobei A_{n-r} und A_{n-1} Coeffizienten der Potenzen von z^r und z bedeuten, und vorausgesetzt wird, dass man $z = -\frac{A_n}{A_{n-1}}$

annehmen kann. Enthalten ferner A_{n-1} und A_n mehr Stellen, als man voraussichtlich in Anspruch nehmen wird, so beseitige man diese überflüssigen Stellen durch Division der ganzen Gleichung mit 10, 100, u. dg. und benütze dieselben höchstens zur Correctur.

Beispiel: Es sei die Gleichung

$$x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 11x - 23 = 0$$

aufzulösen und die Wurzeln auf 6 bis 7 Decimalstellen zu berechnen.

		−1	0	1	2
....	+	+ 6	− 23	− 30	− 9 +
....	−	− 29	− 7	+ 21	367
....	+ 208	22	28	346	1816
....	− 186	6	318	1470	4182
....	+ 192	312	1152	2712	4992
.... −	+ 120	840	1560	2280	3000
720	720	720	720	720	720

also $x_1 = 2 + y$, $x^2 = -1 + y_1$

$$\Delta^2 u_0 = 2(31 - 30 + 21 - 15 + 7) = 28$$
$$\Delta^3 u_0 = 6(90 - 50 + 18 - 5) = 318$$
$$\Delta^4 u_0 = 24(65 - 20 + 3) = 1152$$
$$\Delta^5 u_0 = 120(15 - 2) = 1560$$

Daraus erhält man die neue Gleichung*):

---

*) Bei der Bestimmung dieser Wurzel wurden absichtlich auch alle Nebenrechnungen angegeben, um dem Leser den Umfang derselben zu zeigen.

$$y^6 + 10y^5 + 43y^4 + 99y^3 + 129y^2 + 85y - 9 = 0;$$

da aber $\frac{y^6}{85} = \frac{0\cdot000001}{85}$ zu vernachlässigen ist, so bleibt, wenn man noch $y = \frac{y_1}{10}$ setzt:

$$y_1^5 + 43y_1^4 + 990y_1^3 + 12900y_1^2 + 85000y_1 - 90000 = 0$$

0	1
-90000	$+ \; 8934$
98934	131306
32372	40010
7638	8910
1272	1392
120	120

$$y_1 = 1 - z$$

$a_1 = 25 - 15 = 10$
$a_2 = 208 - 65 - 100 = 43$
$a_3 = 697 - 90 - 250 - 258 = 99$
$a_4 = 908 - 31 - 150 - 301 - 297 = 129$
$a_5 = 367 - 282 = 85$

$$\Delta^2 u_0 = 2 \left\{ \begin{array}{r} 15 \\ 301 \\ 2970 \\ 12900 \\ \hline 16186 \end{array} \right\} \qquad \Delta^3 u_0 = 6 \left\{ \begin{array}{r} 25 \\ 258 \\ 990 \\ \hline 1273 \end{array} \right\}$$

$$\Delta^4 u_0 = 24(10 + 43) = 6 \cdot 212$$

$a_1 = 58 - 10 = 48$
$a_2 = 1485 - 25 - 288 = 1172$
$a_3 = 20005 - 15 - 336 - 3516 = 16138$
$a_4 = 131306 - 17359 = 113947$

hieraus ist ferner, da schon $\frac{43z^4}{113947} = \frac{43.0.00006}{113947}$ zu vernachlässigen ist:

$$1172z^3 - 16\cdot138z^2 + 113\cdot947z - 8934 = 0$$

und wenn man $z = \frac{z_1}{20}$ setzt, und die Gleichung durch 100 dividirt:

$$1\cdot 2z_1{}^3 - 322\cdot 7z_1{}^2 + 45578\cdot 8z_1 - 71472 = 0$$

0	1
−71472	−26215
45257	44619
638	631
7	7

$$z_1 = 1 + u$$

$$319u^2 - 44937u - 26215 = 0 \text{ und } u = \frac{u_1}{2}$$

$$3\cdot 2u_1{}^2 - 8987\cdot 4u_1 + 10486 = 0$$

0	1
10486	+1499
−8987	−8955
32	.32

$$u_1 = 1 + \frac{1499}{8971} = 1\cdot 1670$$

$$\varDelta^1 u_0 = 45580 - 322\cdot 7 = 45257$$

$$\varDelta^2 u_0 = 2(3\cdot 5 - 322\cdot 7) = -2\cdot 319$$

$$a_0 = 1\cdot 2$$

$$a_1 = -315\cdot 2 - 3\cdot 5 = -319$$

$$a_2 = 44619 + 319 - 1\cdot 2 = 44937$$

ferner

$$z_1 = 1 + \frac{1\cdot 1670}{2} = 1\cdot 5834, \quad y_1 = 1 - \frac{z_1}{10} = 1 - 0\cdot 079175 = 0\cdot 920825$$

und endlich:

$$x_1 = 2\cdot 0920825.$$

Die andere Wurzel liegt näher an -1 als an 0, und wir setzen $x = 1 + y$, so ist:

$$y^6 - 8y^5 + 28y^4 - 57y^3 + 75y^2 - 68y + 6 = 0 \quad \text{und} \quad y = \frac{y_1}{10},$$

$$8y_1^5 - 280y_1^4 + 5700y_1^3 - 75000y_1^2 + 680000y_1 - 600000 = 0,$$

0	1
-600000	$+ 10428$
610428	490948
-119480	$- 94160$
25320	$+ 20520$
$- 4800$	$- 3840$
960	960

$y_1 = 1 - z$

$$8z^5 + 240z^4 + 4660z^3 + 59500z^2 + 546020z - 10428 = 0, \quad z = \frac{z_1}{100}$$

$$\frac{4660}{546020} z^3 = \frac{0 \cdot 4}{54} 0 \cdot 000008$$

$$5 \cdot 9z_1^2 + 5460z_1 - 10428 = 0$$

0	1	2
-10428	-4962	$+ 516$
5466	5478	5490
12	12	12

$$z_1 = 2 - \frac{516}{5484} = 1 \cdot 9056,$$

ferner

$$z = 0{\cdot}019056, \quad y_1 = 1 - z = 0{\cdot}980944; \quad x = -1 + \frac{y_1}{10} = -0{\cdot}09019056.$$

Die vorgelegte Gleichung hat also die reellen Wurzeln:

$$x_1 = 2 \cdot 0920825,$$
$$x_2 = -0 \cdot 9019056.$$

II.

Wie man mit Hülfe dieser Methode eine gerade Anzahl von Wurzeln finden könne, welche in einem Intervalle α und $\alpha + 1$ liegen, und die man somit nach dem Zeichenwechsel der Glieder $f(\alpha)$ und $f(\alpha + 1)$ nicht erkennen kann, ergiebt sich aus dem vorhergehenden von selbst. Wir wollen diesen Fall wieder in einem Beispiele betrachten, und wählen dazu die Gleichung:

$$u_x = x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 12 - 8 = 0.$$

Hier ist:

$$u_0 = -8,\ \Delta^1 u_0 = 13,\ \Delta^2 u_0 = -10,\ \Delta^3 u_0 = 0,\ \Delta^4 u_0 = 24$$

− 2	− 1	0	1	2	3	4	
56	− 7	− 8	+ 5	+ 8	+ 1	+ 8	+
−63	− 1	+13	+ 3	− 7	+ 7	69	
+62	+14	−10	−10	+14	62	134	
−48	−24	0	+24	48	72	96	
24	24	24	24	24	24	24	

Diese Gleichung hat:

zwischen −2 und −1 eine Wurzel,
" 0 " +1 eine Wurzel,
" 2 " 4 entweder zwei Wurzeln

oder auch gar keine. Liegen in diesem Intervalle **zwei** Wurzeln, so handelt es sich zunächst darum, zu entscheiden, ob dieselben zwischen 2 und 3, oder zwischen 3 und 4 liegen. Eine vollständige Auskunft ertheilt uns hierüber der **erste Differentialquotient, welcher zwischen beiden Wurzeln sein Zeichen ändern muss.** Diesen erhält man nach dem Vorhergehenden:

$$f'(2) = -7 - \frac{14}{2} + \frac{48}{3} - \frac{24}{4} = -7 - 7 + 16 - 6 = -4$$

ebenso $$f'(3) = 7 - 31 + 24 - 6 = -6$$

$$f'(4) = 69 - 67 + 32 - 6 = 28$$

woraus zu ersehen ist, dass die Wurzeln nur zwischen 3 und 4 liegen können, und man erhält zugleich ihre Näherungswerthe:

$$x_1 = 3 + \frac{1}{6} = 3\cdot166,$$

$$x_2 = 4 - \frac{8}{28} = 3\cdot71;$$

mit denen man die Rechnung nach einer der bekannten Methoden fortsetzen könnte. Da jedoch dadurch noch immer nicht bewiesen ist, dass sich in diesem Intervalle wirklich zwei Wurzeln vorfinden (indem das zwischen 3 und 4 liegende Minimum der Ordinate auch positiv sein kann) so bilden wir, um dieses zu ermitteln, eine neue Gleichung, deren Wurzeln um 3 kleiner sind als die der vorgelegten.

Es ist:

$$\Delta^1 u_3 = 7, \quad \frac{\Delta^2 u_3}{1.2} = 31, \quad \frac{\Delta^3 u_3}{1.2.3} = 12, \quad \frac{\Delta^4 u_3}{1.2.3.4} = 1,$$

$$x = 3 + z$$

und

$$1 - 6z + (31 - 36 + 11)z^2 + (12 - 6)z^3 + z^4 = 0,$$

oder, wenn man die angezeigten Additionen vollzieht, und zugleich $z = \frac{z_1}{10}$ setzt:

$$F(z_1) = u_{z_1} = z^4_1 + 60z^3_1 + 600z^2_1 - 6000z + 10000 = 0$$

und weil

$$\Delta^1 u_0 = -5339, \ \Delta^2 u_0 = 1574, \ \Delta^3 u_0 = 396, \ \Delta^4 u_0 = 24$$

ist, so hat man:

0	1	2	3	4	5
+ 10000	4661	896	− 899	− 304	+ 3125
− 5339	− 3765	− 1795	+ 595	3429	
1574	1970	2390	2834	3302	
396	420	444	468	492	
24	24	24	24	24	

Es bleibt somit kein Zweifel mehr darüber, dass zwischen 3 und 4 wirklich zwei Wurzeln liegen, wovon sich die eine zwischen 3·2 und 3·3, die andere aber zwischen 3·4 und 3·5 befindet.

Und weil ferner:

$$F'(2) = -1795 - 1195 + 148 - 6 = -2848$$

und

$$F'(4) = 3429 - 1651 + 164 - 6 = 1936$$

ist, so hat man für x_1 und x_2 die Näherungswerthe:

$$x_1 = \begin{cases} 3 \cdot 2 + \frac{896}{2848} = 3 \cdot 2315 \\ 3 \cdot 2 + \frac{896}{1795} = 3 \cdot 2498 \end{cases} \quad \text{und deren Mittel } x_1 = 3 \cdot 240 \,,$$

und ebenso:

$$x_2 = \begin{cases} 3 \cdot 4 + \frac{304}{3429} = 3 \cdot 409 \\ 3 \cdot 4 + \frac{304}{1936} = 3 \cdot 4152 \end{cases} \quad \text{Mittel } x_2 = 3 \cdot 412.$$

Nachdem diese beiden Wurzeln somit getrennt sind, kann man sie mittelst irgend einer bekannten Methode (am besten der Newton'schen) noch genauer berechnen, und erhält:

$$x_1 = 3\cdot 23607,$$
$$x_2 = 3\cdot 41421.$$

Diese Beispiele dürften genügen, um zu zeigen, auf welche Art man das in der Ueberschrift bezeichnete Ziel: „Die Anzahl, und die Grenzen der reellen Wurzeln einer Zahlengleichung zu finden", erreichen könne, ohne sich dabei auf dem unsicheren Wege des Probirens zu bewegen.

XXV.

Beitrag für den Unterricht in der Reliefperspective.

Von

Herrn Doctor *Burghardt*,

Director der Realschule in Nordhausen.

Wenn O (Taf. II. Fig. 6.) ein gegebenes Projectionscentrum, Op den nach dem Punkte p eines Objectes führenden Projectionsstrahl, b den Durchschnittspunkt des letzteren mit einer der Lage nach gegebenen Ebene und r einen dem Punkte p entsprechenden Punkt bezeichnet, so soll die für die Punkte p und r und andere ähnlich gelegene Punkte stattfindende Uebereinstimmung der Lage durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$\frac{Op}{bp} = \lambda . \frac{Or}{br},$$

in welcher λ eine constante Grösse ist.

Befindet sich p auf der Geraden EF, so bestimmen O und EF eine Projectionsebene, deren Durchschnitt mit der Ebene der Punkte b.... die Gerade L ist. Verbindet man in dieser Ebene r mit E, so ergiebt sich aus der projectivischen Eigenschaft des anharmonischen Verhältnisses, dass auch

$$\frac{Op_{\prime}}{b_{\prime}p_{\prime}} = \lambda . \frac{Or_{\prime}}{b_{\prime}r_{\prime}}$$

oder dass der Ort aller Punkte, welche den Punkten der Geraden EF nach obiger Gleichung entsprechen, wieder eine Gerade, und zwar für die Punkte von EF die Gerade ED ist; dem unendlich entfernten Punkte der Geraden EF entspricht dann $r_{\prime\prime}$, der Durchschnittspunkt des parallelen Gesichtsstrahls auf $Er_{\prime\prime}$.

Für alle übrigen, unter beliebiger Richtung der Gesichtsstrahlen in unendlicher Entfernung befindlichen Punkte ist in obiger Relation $\frac{Op}{bp}$ gleich der Einheit, folglich $\frac{Or}{br}$ ein bestimmter constanter Werth. Den unendlich entfernten Punkten der Projectionsebene entsprechen daher die Punkte einer der festen Linie L parallelen und durch D gehenden Linie L'. Wird durch L' eine der festen Ebene der Punkte b parallele Ebene gelegt, so ist auch für alle Punkte r dieser Ebene $\frac{Or}{br}$ wiederum dieselbe constante Grösse. Für alle unendlich entfernten Punkte des Raumes ist daher der Ort aller nach obiger Gleichung correspondirenden Punkte eine durch L' gehende und der Ebene der Punkte b parallele Ebene. Bezeichnet man die Entfernung dieser Ebene von O mit $OV = d$, ihre Entfernung von der Ebene der Punkte b mit $VM = e$, so ist für die unendlich entfernten Punkte $\frac{Or}{br} = \frac{d}{e}$ und folglich $1 = \lambda \frac{d}{e}$, wodurch die vorhergehende allgemeinere Form der Relation in folgende übergeht:

$$\frac{Op}{bp} = \frac{e}{d} \cdot \frac{Or}{br}.$$

Wenn die Lage des Projectionscentrums, des Objectes und der Ebene der Punkte b eine bestimmte ist, so kann die der letzteren parallele Ebene gewissermassen zwei extreme Lagen einnehmen, welche die Grenzwerthe des Coefficienten λ bestimmen werden. Befindet sich jene parallele Ebene in unendlicher Entfernung, so wird $\lambda = 1$, fällt dieselbe mit der Ebene der Punkt b zusammen, so ist $\lambda = 0$. Im ersteren Falle müssen die Punkte r mit den Punkten p, im zweiten mit den Punkten b zusammen-

fallen. Wenn nun die Punkte b gewöhnlich als perspectivische Bilder der Punkte p bezeichnet werden, ihre Ebene also als Bildfläche der Malerperspective aufzufassen ist, so folgt zugleich aus dem Vorhergehenden, dass die gewöhnliche Perspective ein besonderer Fall einer allgemeineren ist, in welcher zu den Punkten p eines Objectes die Punkte r als Bilder derselben gehören. Wird diese allgemeinere oder freiere Perspective mit dem Namen Reliefperspective bezeichnet, so kann also der Coefficient dieser Perspective unendlich viele Werthe erhalten und die Art der Darstellung daher dem Grade nach eine unendlich verschiedene sein. Die Werthe des Coefficienten $\lambda=0$ und $\lambda=1$ bestimmen alsdann die Grenzen, durch welche die reliefperspectivische Darstellung in die Zeichnung der Malerei oder in das sogenannte vollrunde Bildwerk übergeht. Für gewöhnlich werden indessen in der Reliefbildnerei, obwohl jenes λ zwischen den angegebenen Grenzen jeden beliebigen Werth annehmen kann, drei Darstellungsformen vorzugsweise festgehalten, wonach ein Relief entweder ein flaches oder ein halb- oder ein hocherhabenes ist.

Sind O, L, L' und auf EF der Punkt p als Object gegeben, so lässt sich die geometrische Bestimmung des reliefperspectivischen Bildes zu p durch Construction des parallelen Gesichtsstrahls, ferner der Verbindenden Er_{u} und des Gesichtstrahls Op leicht bewirken.

Schneiden sich mehrere Gerade eines Objectes in einem Punkte p, so haben alle Projectionsebenen dieser Geraden den nach p gehenden Projectionsstrahl gemein, woraus zugleich hervorgeht, dass alle in einen Punkt eines Objectes zusammenlaufende Linien in dem durch λ bestimmten Relief sich in derselben Weise darstellen, ferner alle den parallelen Geraden des Objectes entsprechenden Linien des Reliefs in einem Vereinigungspunkte innerhalb jener der Bildfläche parallelen Ebene zusammentreffen. Diesen Vereinigungspunkt nennt man gewöhnlich den Verschwindungspunkt und jene der Bildfläche parallele Ebene die Verschwindungsebene. Der Verschwindungspunkt aller auf der Bildfläche senkrechten Geraden ist der Hauptpunkt der Verschwindungs-Bildfläche und entspricht dem Augenpunkte in der Malerperspektive.

Da das reliefperspectivische Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist, welche mit ersterer in einem Punkte der Bildfläche zusammentrifft, zwei sich schneidende Gerade im Relief sich wieder als solche darstellen, so folgt, dass die Ebenen solcher cor-

respondirenden Linienpaare innerhalb der Bildfläche sich schneiden müssen. Betrachtet man diesen Durchschnitt als Axe eines Ebenenbüschels, dessen dritte und vierte Ebene resp. die Bildfläche und die durch das Projectionscentrum gehende Ebene sind, so gilt für jeden auf dieses Ebenenbüschel bezogenen Projectionsstrahl:

$$\frac{Op}{bp} : \frac{Or}{br} = \text{const.}$$

Die Ebenen des Objectes stellen sich daher im Relief wiederum als solche dar. Poncelet, welcher die Definition von Relief-Projection unmittelbar an die Bedingungen der Aehnlichkeit anschliesst, folgert aus dieser Voraussetzung, dass sich je zwei der erwähnten Durchschnitte correspondirender Ebenen in einem Punkte schneiden, der Ort derselben also eine Ebene sein müsse, welche er Ebene der Homologie nennt.

Die oben angegebene geometrische Construction der reliefperspectivischen Bilder von Punkten hat J. A. Breysig in seiner Schrift: „Versuch einer Erläuterung der Reliefperspective" aus dem praktischen Zwecke der Reliefdarstellung abgeleitet. Seine Schrift ist fast gänzlich unbeachtet geblieben; nur Anger hat (Archiv. Bd. IV. p. 255.) das Verdienstliche derselben einer Aeusserung Poncelet's gegenüber gebührend hervorgehoben. Das erwähnte geometrische Verfahren lässt sich übrigens auch als eine Folgerung aus der im Eingange angegebenen Relation entwickeln.

Für Gerade und Ebenen, welche als Objecte der Bildfläche parallel laufen, ist $\frac{Op}{bp}$ constant, also auch $\frac{Or}{br}$; die der Bildfläche parallelen Geraden und Ebenen erscheinen daher auch im Relief als solche und folglich parallelepipedisch begränzte Räume, deren Endflächen der Bildfläche parallel sind, als abgestumpfte, vierseitige Pyramiden, wie z. B. die regelrecht construirten Formen der Bühnen.

Die Schwierigkeiten einer Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der reliefperspectivischen Gebilde beruhen hauptsächlich darauf, dass Object und Bild im Allgemeinen sich nicht in derselben Ebene befinden und desshalb auch nicht unmittelbar eine anschauliche Zeichnung in einer Ebene zulassen. In dem Folgenden soll daher angegeben werden, welche allgemeinen Beziehungen der Lage eintreten, wenn Objecte und deren reliefperspectivische Bilder in eine Ebene, nämlich in die Ebene des Objectes versetzt werden. Um die Untersuchung möglichst zu vereinfachen, soll in dem Folgenden nur eine Gerade (eine Seite,

Sehne einer ebenen Figur oder des ebenen Durchschnittes eines Körpers) als Object benutzt werden.

Eine Ebene, als Object, und die ihr entsprechenden Ebenen aller möglichen reliefperspectivischen Bilder schneiden sich für ein und dasselbe Centrum der Projection auch in derselben Geraden der gegebenen Bildfläche. Diese Aehnlichkeitsaxe sei für die Ebenen der reliefperspectivischen Bilder die Drehungsaxe, während die Ebene des Objectes ihre Lage unverändert beibehalten soll. Jede Drehung eines (in dem erwähnten allgemeinen Sinne) perspectivischen Bildes wird dann für sich und das zugehörige Object auch eine Veränderung in der Lage des Projectionscentrums herbeiführen, deren Gesetz sich auf folgende Weise bestimmen lässt.

Wenn eine Strecke ab (Taf. II. Fig. 7.) für einen gegebenen Punkt c, als conjugirten eines zweiten gesuchten Theilpunktes d, so zu theilen ist, dass das Doppelverhältniss der erhaltenen Segmente die gegebene Grösse e erhält, so werden gewöhnlich auf einer durch c gehenden Geraden zwei Segmente cm, cn abgetragen, deren Verhältniss $\frac{mc}{nc}$ gleich e ist, und durch a, b, sowie durch deren zugeordnete Punkte m, n Strahlen eines anharmonischen Büschels gezogen; der vierte und zwar nc parallele Strahl dieses Büschels bestimmt alsdann den gesuchten Punkt d. Beachtet man in dieser Construction, dass die Richtung der Geraden cn beliebig angenommen werden kann und dass die Auflösung, mit Rücksicht auf die gegebenen Grössen, eine bestimmte sein muss, so ergiebt sich, dass alle möglichen Parallelstrahlen durch denselben Punkt d gehen müssen und dass daher auch ihre Grösse sich durch cn nach einem constanten Verhältniss $\frac{bd}{bc}$ ausdrücken lässt. Hiernach liegen also alle möglichen Durchschnittspunkte der in der Construction erwähnten Strahlenbüschel auf concentrischen Kreisen, deren Mittelpunkt d ist. Wenn daher eine um den gegebenen Punkt c bewegliche Gerade zwei feste Punkte m und n, eine andere durch denselben Punkt c gehende, aber festliegende Gerade zwei ebensolche Punkte a und b enthält, so schneiden sich alle während der Drehung der ersteren Linie durch die zugeordneten Punkte a und m, b und n gehenden Geraden in solchen Punkten, deren Ort eine bestimmbare Kreislinie ist, und wenn die Ebene der Construction sich um bd als Axe dreht, in Punkten einer Kugeloberfläche, wie auch **Chasles** und vor ihm auf Grund einer noch allgemeineren Untersuchung über die perspectivische Lage projectivischer Geraden **Steiner** nachgewiesen hat.

In Taf. II. Fig. 8. sollen nun abc und $a'b'c'$ nach der allgemeineren Auffassung perspectivische Bilder des Objectes ABC sein und $\alpha\beta\gamma$ die Aehnlichkeitsaxe derselben. Bewegen sich nun diese Bilder durch Drehung um ihre Aehnlichkeitsaxe allmählich in die Ebene ABC, so befindet sich während der Drehung des Bildes $a'b'c'$ das zugehörige Projectionscentrum gleichzeitig auf drei Kugeloberflächen, deren Mittelpunkte μ', ν', ϱ' im Durchschnitte der Ebene der vierten Parallelstrahlen mit der Ebene des Objectes, mithin in der zur Aehnlichkeitsaxe parallelen Geraden $\mu'\varrho'$ zu suchen sind. Das Projectionscentrum beschreibt also eine Kreislinie, deren Ebene auf der Aehnlichkeitsaxe senkrecht steht. Dasselbe gilt für die Bahn des Punktes O während der Drehung des Bildes abc, welches der Bildfläche angehören soll. Da nun das Projectionscentrum für e i n e Lage der Bilder ein gemeinschaftliches ist, so folgt, dass auch ihre kreisförmigen Bahnen sich innerhalb einer gemeinschaftlichen und auf der Aehnlichkeitsaxe senkrechten Ebene durchschneiden. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene des Objectes trifft offenbar die zur Aehnlichkeitsaxe parallelen Centrallinien von je drei zusammengehörigen Kugeln in den Mittelpunkten der entsprechenden kreisförmigen Bahnen; die halbe gemeinschaftliche Sehne der kreisförmigen Bahnen wird der Höhe des Projectionscentrums über der Ebene des Objectes, die zu derselben in beiden Kreisen gehörigen halben Centriwinkel den Neigungswinkeln gleich sein, welche die Ebenen der perspectivischen Bilder mit der Ebene des Objectes bilden.

W e r d e n d a h e r p e r s p e c t i v i s c h e B i l d e r e i n e s u n d d e s s e l b e n O b j e c t e s u n d P r o j e c t i o n s c e n t r u m s i n b e l i e b i g e r A n z a h l d u r c h D r e h u n g u m i h r e A e h n l i c h k e i t s a x e i n d i e E b e n e d e s O b j e c t e s v e r s e t z t, s o l i e g e n d i e a u s d e r n e u e n L a g e h e r v o r g e h e n d e n P r o j e c t i o n s c e n t r a s t e t s i n e i n e r u n d d e r s e l b e n S e n k r e c h t e n a u f d e r A e h n l i c h k e i t s a x e. Für die graphische Darstellung der perspectivischen Bilder in der Ebene des Objectes enthält diese Bestimmung das charakteristische Kennzeichen, wonach bei der Darstellung solcher Bilder zu verfahren ist, welche durch Projection aus demselben Gesichtspunkte entstanden sind; dem gemeinschaftlichen Projectionscentrum im Raume entspricht der gemeinschaftliche Ort der Projectionscentra in der Ebene.

Construction dieses Ortes und der zugehörigen Projectionscentra.

Wenn in Taf. II. Fig. 9. L' die Aehnlichkeitsaxe, L eine Linie

in der Ebene des Objectes, das Segment derselben MN Object und $(AC_{,}L')$, $(BC_{,}L')$, $(DC_{,}L')$ u. s. w. Ebenen perspectivischer Bilder, ferner OM, ON die Projectionsstrahlen, also AA', BB' u. s. w. die zugehörigen perspectivischen Bilder sind und diese letzteren Stücke in derjenigen Lage innerhalb der Objectsebenen gedacht werden, in welche sie aus ihrer ursprünglichen Lage im Raume durch eine Drehung um die Linie L gerathen würden, so bestimme man, wenn ausserdem Winkel FHc als Neigungswinkel der Ebene der Projectionsstrahlen gegen die Ebene des Objectes angesehen wird, die senkrechte Projection des Projectionscentrums O in der Ebene des Objectes, nämlich c; die von c auf die Aehnlichkeitsaxe gefällte und nach beiden Seiten verlängerte Senkrechte ist alsdann der gesuchte Ort. Die Projectionscentra innerhalb dieser Senkrechten sind die Durchschnittspunkte ihrer kreisförmigen Bahnen; man hat daher nur für jede derselben Mittelpunkt und Radius zu bestimmen. Ein Ort jedes Mittelpunktes ist die Senkrechte selbst, der andere je eine der Parallelen zur Aehnlichkeitsaxe, für welche der entsprechende Ausgangspunkt durch OK parallel CE, OJ parallel CD u. s. w. gefunden wird. Die Radien ergeben sich nach den vorausgehenden Ausführungen durch Construction der Höhe des gegebenen Projectionscentrums $cR = cF$.

Betrachtet man nun EE', welches der Bildfläche angehören mag, ebenfalls als ein reliefperspectivisches Bild von MN, so ist das zugehörige Projectionscentrum ε' das äusserste Projectionscentrum auf der einen Seite der Aehnlichkeitsaxe; ebenso lässt sich ein zweites Projectionscentrum nachweisen, dessen Entfernung von der Aehnlichkeitsaxe auf derselben Seite derselben ein Minimum ist.

Durch Umdrehung um die Aehnlichkeitsaxe können die Bilder der Strecke MN eine doppelte, um 180° der Drehung verschiedene Lage in der Ebene des Objectes erhalten. Bestimmt man die Projectionscentra für beide conjugirte Lagen, so ergiebt sich, dass sie paarweise die Endpunkte der Durchmesser derjenigen Kreise sind, deren Umfänge die Bilder während der Umdrehung durchlaufen. Wenn man daher durch α', α'', β', β'' u. s. w. die conjugirten Projectionscentra bezeichnet, so folgt mit Rücksicht auf den gemeinschaftlichen Durchgang der Kreise im Punkte R und dessen senkrechte Projection c, dass

$$\alpha_{,}c \,.\, \alpha_{,,}c = \beta_{,}c \,.\, \beta_{,,}c = \delta_{,}c \,.\, \delta_{,,}c \text{ u. s. w.}$$

Von den conjugirten Punkten $\alpha_{,}\alpha_{,,}$, $\beta_{,}\beta_{,,}$ u. s. w. befinden sich also je drei Paare in Involution und zu c, dem Centralpunkte der In-

volution, gehört als conjugirter Punkt der unendlich entfernte. Offenbar gehört das letztere Paar correspondirender Punkte den conjugirten Lagen desjenigen Projectionscentrums an, welches die andere Grenze aller möglichen Projectionscentra bildet. Da diese Grenze nun erreicht wird, wenn Object und Bild zusammenfallen, so ist das eine der zu MN, als Object und Bild, gehörigen Projectionscentra c, der Centralpunkt der Involution, und zugleich das der Aehnlichkeitsaxe am nächsten liegende Projectionscentrum, das andere der unendlich entfernte Punkt der Involution und daher auch das von der Aehnlichkeitsaxe am meisten entfernte. Jener Ort der Projectionscentra, auf welchem sich zugleich die Mittelpunkte der kreisförmigen Bahnen befinden, kann wohl mit Recht und soll daher auch in dem Folgenden Centrallinie der Projection genannt werden. Die Vertheilung der Projectionscentra innerhalb der Ebene des Objectes lässt sich in folgendem Satze zusammenfassen:

Wenn die perspectivischen Bilder desselben Projectionscentrums O und desselben Objectes MN durch Umdrehung um ihre Aehnlichkeitsaxe in ihre conjugirten Lagen innerhalb der Ebene des Objectes versetzt werden, so theilen die zusammengehörigen Projectionscentra die Centrallinie so ein, dass je drei Paare conjugirter Centra sich in Involution befinden.

Die Construction eines bestimmten reliefperspectivischen Bildes innerhalb der Ebene des Objectes lässt sich auf folgende allgemeinere Data zurückführen. Wenn in Taf. II. Fig. 8. durch das Projectionscentrum O noch eine der Ebene des Objectes parallele Ebene gelegt wird, so entstehen zwei gleiche Ebenenbüschel, deren Axen die Aehnlichkeitsaxe $\alpha\beta\gamma$ und die ihr parallele durch O gehende Gerade sind. Das erste zur Axe $\alpha\beta\gamma$ gehörige Ebenenbüschel wird durch die Ebene des Objectes, durch die Ebene des reliefperspectivischen Bildes, durch die Bildfläche und durch die Ebene des Projectionscentrums gebildet, das zweite zur Parallelen in O als Axe gehörige Ebenenbüschel enthält die zuletzt genannte Ebene des ersteren und drei den entsprechenden im ersteren Ebenenbüschel parallele Ebenen. Nun befindet sich jeder von O ausgehende Projectionsstrahl in perspectivischer Lage zu dem ersteren Ebenenbüschel und in derselben Lage die Centrallinie innerhalb des zweiten Ebenenbüschels. Daher ist Taf. II. Fig. 10.:

$$\lambda = \frac{ON}{B'N} : \frac{OA'}{B'A'} = 1 : \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}.$$

Wenn also das Projectionscentrum durch seine der Lage und

Grösse nach gegebene Entfernung von der Objectsebene bestimmt ist, ferner die Bildfläche durch die Lage der Aehnlichkeitsaxe und durch ihre Neigung gegen die Ebene des Objectes und vor Allem die letztere selbst nebst dem in ihr befindlichen Object, sowie der Projectionscoefficient λ gegeben sind, so lässt sich vermittelst der drei ersten gegebenen Grössen die Centrallinie und innerhalb derselben, wie aus der Parallelität der Ebenen in Taf. II. Fig. 8. sofort sich ergiebt, β in Taf. II. Fig. 10. bestimmen und vermittelst der letzteren Data nach der für λ zuletzt abgeleiteten Gleichung auch α. Aus der Lage von α und β geht dann nach dem schon früher angeführten Constructionsverfahren die Lage der Projectionscentra α', β' und der zugehörigen Projectionsstrahlen hervor.

Da die vorher nach Taf. II. Fig. 8. angegebenen Ebenenbüschel gleich sind, so werden ihre entsprechenden Ebenen von den Ebenen desjenigen Ebenenbüschels, dessen Axe in Taf. II. Fig. 10. der Projectionsstrahl NO ist und das sich mit dem ebenen Strahlenbüschel ($N\gamma$, $N\beta$, $N\alpha$, Ni parallel der Centrallinie) in perspectivischer Lage befindet, in parallelen Linien geschnitten. Legt man durch die zwei parallelen Durchschnitte des einen Ebenenbüschels, nämlich durch $B'k$, $A'f$ Ebenen, welche auf der Ebene des Objectes senkrecht stehen, so sind ihre Durchschnitte in der letzteren auch der Centrallinie parallel und auf der Aehnlichkeitsaxe senkrecht. Nun sind jene auf der Ebene des Objectes senkrechten und der Ebene der Centrallinie und des Projectionscentrums parallelen Ebenen zugleich diejenigen, in welchen die Punkte A' und B' ihre Drehung um die Aehnlichkeitsaxe beschreiben, jene Durchschnitte derselben also auch diejenigen Linien, in welchen die Punkte A', B' der Geraden AC und BC nach vollendeter Umdrehung um die Aehnlichkeitsaxe die entsprechenden Lagen a' und b' erhalten; sie bestimmen daher auch die Stellen der Projectionsstrahlen, in welchen die Bilder eintreten. Da nun die Perpendikel durch f und k, diese Punkte aber durch $N\alpha$ und $N\beta$ bestimmt werden, so ist die Construction der Bilder eine sehr einfache.

Es versteht sich von selbst, dass die angegebenen Constructionen nicht unmittelbar dazu dienen können, technische Arbeiten zu fördern; sie haben nur den Zweck, ein Verfahren anzudeuten, wodurch die wissenschaftliche Betrachtung der Reliefperspective erleichtert werden möchte.

Wenn die perspectivischen Figuren in der angegebenen Weise in die Ebene des Objectes versetzt werden, so tritt an die Stelle der Bildfläche oder Aehnlichkeitsebene, die Aehnlichkeitsaxe.

Bezieht man die Bilder der Geraden MN in Taf. II. Fig. 10. in der Weise auf die Aehnlichkeitsaxe, dass für alle correspondirenden Punkte:

$$\frac{\beta' b'}{Nb'} = \lambda_{\prime\prime} \frac{\beta' n}{Nn}, \quad \frac{\alpha' a'}{Na'} = \lambda_{\prime} \frac{\alpha' m}{Nm}$$

gesetzt wird, so ist:

$$\frac{\alpha' a'}{Na'} : \frac{\beta' b'}{Nb'} = \frac{\lambda_{\prime}}{\lambda_{\prime\prime}} \left\{ \frac{\alpha' m}{Nm} : \frac{\beta' n}{Nn} \right\}.$$

Nun ist:

$$\frac{\alpha' a'}{Na'} : \frac{\beta' b'}{Nb'} = \frac{\gamma f}{if} : \frac{\gamma k}{ik} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} = \frac{1}{1-\lambda},$$

und wenn man den Satz des Menelaus auf das Dreieck $N\alpha'\beta'$ anwendet:

$$\frac{\alpha' m}{Nm} : \frac{\beta' n}{Nn} = \frac{\alpha'\gamma}{\beta'\gamma}.$$

Da nun, wenn λ gegeben ist, dasselbe auch von $\frac{\alpha'\gamma}{\beta'\gamma}$ gilt, so ist

$$1-\lambda = \frac{\lambda_{\prime\prime}}{\lambda_{\prime}} \times \text{const.}$$

Setzt man endlich:

$$\frac{\alpha' N}{mN} : \frac{\alpha' a'}{m\alpha'} = \mu, \quad \frac{\beta' N}{nN} : \frac{\beta' b'}{nb'} = \nu,$$

so wird

$$\lambda_{\prime} = \frac{1}{1-\mu}, \quad \lambda_{\prime\prime} = \frac{1}{1-\nu},$$

folglich:

$$1-\lambda = \frac{1-\mu}{1-\nu} \times \text{const.}$$

oder

$$1-\mu = (1-\lambda)(1-\nu) \times \text{const.}$$

Wenn der Werth $\lambda = 0$ gegeben ist, so hat gleichzeitig die Constante den Werth 1, folglich ist μ alsdann gleich ν; erhält λ den Werth 1, so wird $\mu = 1$. Unter der ersten Voraussetzung muss, wie schon gezeigt ist, das reliefperspectivische Bild mit dem gewöhnlichen perspectivischen, im zweiten mit dem Objecte zusammenfallen.

XXVI.

Ableitung der Formeln für den Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel.

Von

Herrn Doctor *Eduard Schreder*

in Graz.

Bei der hier befolgten Methode werden zuerst die Formeln für $\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}$ und $\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}$ allgemein giltig entwickelt, dann wird gezeigt, dass dieselben Relationen auch für die ganzen Winkel $\alpha\pm\beta$, α und β bestehen. In einem Kreise (Taf. II. Fig. 11.) vom Halbmesser $=1$ werden die Bögen α und β beliebig angenommen und die dazu gehörigen Sehnen BC und AC, so wie auch AB, die Sehne des Bogens $\alpha+\beta$, gezogen. Da

$$AB=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\quad BC=2\sin\frac{\alpha}{2},\quad AC=2\sin\frac{\beta}{2}$$

und Winkel $BCA=180^0-\frac{\alpha+\beta}{2}$, so hat man unter Anwendung des nach Carnot benannten Lehrsatzes *) für das Dreieck ABC die Gleichung:

---

*) Denkt man sich von A auf BC ein Perpendikel AD gefällt, so ist bekanntlich nach den Lehren der ebenen Geometrie:

$$AB^2=BC^2+AC^2-2.BC.CD.$$

und da nun in dem rechtwinkligen Dreieck ACD bekanntlich $CD=AC.\cos BCA$ ist, so folgt das Behauptete. Ich führe dies an, weil der Name „Carnot'scher Lehrsatz" wohl nicht allgemein gewöhnlich ist, um Miss-

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (1)$$

Verwandelt man im Ausdrucke links vom Gleichheitszeichen den Sinus in den Cosinus und setzt alle Glieder, welche $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ enthalten, auf die linke Seite, so erhält man:

$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Löst man diese Gleichung nach $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ auf, so bekommt man:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Dass hier nicht die negative Wurzel genommen werden konnte, erhellet schon daraus, weil in diesem Falle für α und $\beta < 90^0$ nach der Formel $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ stets negativ sein müsste. Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen kann auch so geschrieben werden:

$1-\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-\sin^2\frac{\beta}{2})$ und reducirt sich auf $\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}$,

so dass obige Gleichung jetzt lautet:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \qquad \text{I.}$$

Um die Formel für $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ zu bekommen, setze man in der Gleichung (1) anstatt $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ den gleichgeltenden Ausdruck der Formel I. Man erhält:

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}).$$

Vollführt man im rechten Theile dieser Gleichung die ange-

---

verständnissen vorzubeugen. Der in diesem Aufsatze gegebene Beweis schliesst sich an die viel gebrauchte, ganz elementare Darstellung der ebenen Trigonometrie an, bei welcher man Sinus, Cosinus u. s. w. als die Verhältnisse gewisser Seiten des rechtwinkligen Dreiecks betrachtet, aus welchem Grunde ich ihn habe hier abdrucken lassen, weil er vielleicht manchem Leser angenehm sein möchte. Ob eine ähnliche Darstellung schon anderweitig gebraucht worden ist, weiss ich nicht. G.

zeigte Multiplication und schreibt $\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$ anstatt $2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$, so kann man der Gleichung die Form geben:

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-\sin^2\frac{\beta}{2})+\sin^2\frac{\beta}{2}(1-\sin^2\frac{\alpha}{2})$$

$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Der rechte Theil dieser Gleichung ist $(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})^2$, woraus folgt:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \qquad \text{II.}$$

Um die Formeln für $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ und $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ abzuleiten, zeichne man einem Kreise vom Halbmesser $=1$ das beliebige Dreieck ABC (Taf. II. Fig. 12.) ein, dessen Seiten AB, BC und AC der Reihe nach die Sehnen der Bögen $\alpha-\beta$, α und β bilden. Es ist daher:

$$AB=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad BC=2\sin\frac{\alpha}{2}, \quad AC=2\sin\frac{\beta}{2},$$

$$\text{Winkel } ACB=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Unter Anwendung des Carnot'schen Lehrsatzes erhält man die Gleichung:

$$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (2)$$

Verwandelt man im Ausdrucke links vom Gleichheitszeichen den Sinus in den Cosinus und setzt alle Glieder, welche $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ enthalten, auf die linke Seite, so erhält man:

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Aus dieser Gleichung findet man:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Der Ausdruck unterm Wurzelzeichen reducirt sich auf $\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}$, demzufolge man erhält:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \qquad \text{III.}$$

Dass in der vorhergehenden Gleichung die Wurzel positiv genommen werden musste, erhellet aus Folgendem:

Es seien $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ im ersten Quadranten befindlich, so sind Sinus und Cosinus von $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ positiv, und es wird mit der Abnahme von $\frac{\beta}{2}$ der $\sin\frac{\beta}{2}$ kleiner, $\cos\frac{\beta}{2}$ grösser. Wäre nun der rechte Theil der Gleichung III. eine Differenz anstatt einer Summe, so würde er mit der Abnahme von $\frac{\beta}{2}$ einen grössern Werth erlangen, während der linke Theil der Gleichung oder $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ mit dem Kleinerwerden von $\frac{\beta}{2}$ abnimmt, woraus die Unstatthaftigkeit des negativen Zeichens der Wurzel folgt.

Setzt man in der Gleichung (2) für $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ den gleichgeltenden Ausdruck der Formel III., so erhält man:

$$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Wird im rechten Theile dieser Gleichung die angezeigte Multiplication ausgeführt und dann $\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$ anstatt $2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$ geschrieben, so lässt sich der Gleichung die Form geben:

$$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\frac{\beta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Der rechte Theil dieser Gleichung reducirt sich auf

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)^2,$$

demzufolge man erhält:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \qquad \text{IV.}$$

Um nachzuweisen, dass dieselben vier Relationen auch zwischen den ganzen Winkeln $\alpha \pm \beta$, α und β bestehen, kann man folgendermassen verfahren.

Aus der Gleichung II. ergibt sich, wenn man darin $\alpha=\beta$ setzt:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{V.}$$

Aus der Gleichung I. folgt auf dieselbe Art:

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{VI.}$$

Zufolge V. besteht auch die Relation $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Setzt man in dieser Gleichung statt $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ die gleichgeltenden Ausdrücke in II. und I., so hat man:

$$\sin(\alpha+\beta)=2(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}). \qquad (5)$$

Die Ausführung der angezeigten Multiplication gibt:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad (6)$$

$$-2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Dieser Ausdruck kann die Form erhalten:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2})+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}) \qquad (7)$$

und reducirt sich unter Berücksichtigung der Relationen V. und VI. auf $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, so dass man die Formel hat:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Zufolge V. besteht auch die Gleichung $\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Setzt man in dieser Gleichung statt $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ und $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ die gleich-

geltenden Ausdrücke in IV. und III., so unterscheidet sich die ganze Ableitung von der vorhergehenden dadurch, dass in (6) das zweite Glied negativ und das dritte positiv erscheint, was zur Folge hat, dass die Summe (7) sich in eine Differenz verwandelt und somit schliesslich die Gleichung zum Vorschein kommt: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$. Zufolge der Relation VI. besteht die Gleichung $\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$. Setzt man in dieser Gleichung statt $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ aus den Relationen I. und II. die gleichgeltenden Ausdrücke, so erhält man:

$$\cos(\alpha+\beta)=(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})^2-(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})^2.$$

Die Ausführung der angezeigten Quadrirungen gibt nach einer kleinen Reduction:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\frac{\beta}{2}(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})-\sin^2\frac{\beta}{2}(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}) \quad (8)$$

$$-4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Unter Berücksichtigung von V. und VI. erhält man hieraus:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Würde man endlich in der Relation

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

statt $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ und $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ aus III. und IV. die Aequivalente setzen, so unterschieden sich die hieraus entspringenden Ausdrücke von den vorhergehenden nur im Zeichen, und zwar würde im rechten Theile der Gleichung 8) das dritte Glied positiv erscheinen, woraus erhellet, dass man jetzt die Formel bekommen müsste:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

XXVII.

Weitere Ausführung der politischen Arithmetik.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

(Fortsetzung von Nr. XVI.)

Drittes Kapitel.

Ueber Tilgungspläne.

§. 31.

Allgemeine Form der Tilgungspläne.

Grössere Kapitalien oder Anleihen werden gewöhnlich nicht wie die kleinern auf einmal oder in ganzer Summe eingezahlt, und können auch nicht wohl ohne Störung des Geldverkehrs oder ohne Belästigung und Schaden des Schuldners oder Gläubigers auf einmal in Masse ein- und ausgezahlt werden.

Der Schuldner müsste, um grosse Geldsummen auf einmal zu rechter Zeit auszahlen zu können, für Ansammlung des Geldes sorgen und könnte sie während des Ansammelns nicht benutzen. Der Gläubiger, dem auf einmal eine grosse Summe Geldes zur Verfügung gestellt würde, wäre nicht im Stande, sie alsbald wieder nutzbringend anzulegen. Mit beiden Geschäften wäre Schaden für den Schuldner und Gläubiger verbunden.

Das Ansammeln grosser Geldsummen kann aber nur dadurch bewirkt werden, dass sie dem Verkehr entzogen werden. Hiedurch würde das Geld, das sich in diesem Falle als Waare darstellt, theuerer werden und der Ansammler müsste die Baarsumme theuerer bezahlen als er sie ausgibt.

Mit dem Ausgeben grosser Geldsummen oder ihrem Rückströmen in den Verkehr verbindet sich der umgekehrte Nachtheil. Der Besitzer grosser Geldsummen wäre genöthigt, sie so rasch

als möglich nutzbringend zu verwenden; das Geld, als Waare, würde wohlfeiler, oder die Kaufgegenstände und Effecten würden theuerer werden. Beide Operationen müssen während ihrer Dauer, durch Entziehung des Geldes aus dem Verkehr und Rückkehr in denselben, nachtheilig einwirken und Schwankungen im Geldwerth verursachen.

Es liegt daher im Interesse des Schuldners, wie des Gläubigers, bei grossen Anleihen diese nachtheiligen Folgen zu umgehen, was am füglichsten durch allmäliges Entziehen und Rückgeben geschieht.

Das Letztere wird gewöhnlich durch allmälige Tilgung bewirkt, und es ist daher erforderlich, die hierauf bezüglichen Methoden näher zu betrachten.

Wird nun eine Anleihe K durch allmälige Rückzahlung getilgt, so geschieht diess, wie schon im ersten Kapitel angedeutet wurde, dadurch, dass in einer Reihe von Jahren bestimmte Summen am Kapitale bis zur völligen Tilgung abgetragen und jeweils die Zinse der vorhandenen Restschuld gezahlt werden.

Nennt man die jeweiligen Zahlungsleistungen der Reihe nach

$$L_1, L_2, L_3, L_4, \ldots L_n$$

und die ihnen zugehörigen Kapitalabtragungen:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots A_n,$$

so dass

$$1) \qquad K = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots A_n,$$

ist, so ergeben sich aus dem eben Gesagten und nach dem Vorgange der schon im ersten Kapitel gemachten Bemerkungen bei dem Zinsfuss p die Werthe der Zahlungen, welche in den einzelnen Jahren gemacht werden müssen, wenn die Verzinsung und Tilgung jährlich geschieht, die einzelnen Zahlungen in Kapitalabtragsumme und Zinse zerlegt und die Glieder in entwickelter Form dargestellt werden, in folgender Weise:

2)

$$L_1 = A_1 + K.0{,}0p,$$
$$L_2 = A_2 + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p,$$
$$L_3 = A_3 + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p - A_2.0{,}0p,$$
$$L_4 = A_4 + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p - A_2.0{,}0p - A_3.0{,}0p,$$
$$L_5 = A_5 + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p - A_2.0{,}0p - A_3.0{,}0p - A_4.0{,}0p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n = A_n + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p - A_2.0{,}0p - \ldots - A_{n-1}.0{,}0p.$$

Nicht immer findet die Voraussetzung jährlicher Tilgung und Verzinsung statt, denn häufig und bei Staats-Anleihen, wozu auch die Lotterie-Anleihen gehören, gewöhnlich geschieht die Verzinsung halbjährlich und nur die Kapitaltilgung jährlich. In diesem Falle erhält man, wenn der Kürze wegen wie früher $\frac{1}{2}p = p_1$ gesetzt wird, folgende Darstellung, da doppelt so viele Zahlungen $L_1, L_2, L_3, \ldots L_{2n}$ gemacht werden müssen:

3)

$$
\begin{aligned}
L_1 &= K.0{,}0p_1,\\
L_2 &= A_1 + K.0{,}0p_1,\\
L_3 &= K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1,\\
L_4 &= A_2 + K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1,\\
L_5 &= K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1 - A_2.0{,}0p_1,\\
L_6 &= A_2 + K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1 - A_2.0{,}0p_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L_{2n-1} &= K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1 - A_2.0{,}0p_1 - \ldots - A_{n-1}.0{,}0p_1,\\
L_{2n} &= A_n + K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1 - A_2.0{,}0p_1 - \ldots - A_{n-1}.0{,}0p_1.
\end{aligned}
$$

Weniger häufig kommt wohl der Fall vor, dass auch die Kapitalabtragungen halbjährlich vor sich gehen, obgleich diese Tilgungsart nach den Bemerkungen des §. 22. als die vortheilhafteste angedeutet wurde und als solche sich für die Praxis als die zuträglichste empfehlen dürfte. In diesem Falle sind gleichfalls $2n$ Zahlungen wie in No. 3) zu machen, und man erhält folgende Darstellung:

4)

$$
\begin{aligned}
L_1 &= A_1 + K.0{,}0p_1,\\
L_2 &= A_2 + K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1,\\
L_3 &= A_3 + K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1 - A_2.0{,}0p_1,\\
L_4 &= A_4 + K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1 - A_2.0{,}0p_1 - A_3.0{,}0p_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L_{2n-1} &= A_{2n-1} + K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1 - A_2.0{,}0p_1 - \ldots - A_{2n-2}.0{,}0p_1,\\
L_{2n} &= A_{2n} + K.0{,}0p_1 - A_1.0{,}0p_1 - A_2.0{,}0p_1 - \ldots - A_{2n-1}.0{,}0p_1.
\end{aligned}
$$

Bei einzelnen Lotterie-Anleihen, die halbjährlich oder vierteljährlich gezogen und halbjährlich ausgezahlt werden, kommt diese sehr sachgemässe Tilgungsweise vor.

Bei Anwendung der vorstehenden Darstellungen auf besondere Fälle ergibt sich daraus eine Erleichterung der Arbeit, dass

bestimmte Glieder in zwei auf einander folgenden Ausdrücken gleichzeitig vorkommen und daher nur einmal berechnet werden dürfen.

§. 32.

Tilgungsplan bei gleichen Abtragssummen.

Es können nun, wie man leicht sieht, folgende Fälle eintreten:

a) Entweder sind die jährlichen Kapitalabtragungen A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_n ganz willkührlich und stehen unter einander in keinem Zusammenhange;

b) oder sie stehen unter einander in einer bestimmten Beziehung, sind also unter sich gleich, oder wachsen, oder fallen in arithmetischem Verhältnisse;

c) oder sie stehen unter einander in einem geometrischen Verhältnisse.

Im ersten Falle bleiben die in §. 31. No. 2)—4) angegebenen Darstellungen in Kraft und die einzelnen Werthsummen oder Jahresleistungen müssen nach vorstehenden Bestimmungen ermittelt werden.

Im zweiten und dritten Falle werden bestimmte Gesetze hervortreten, welche den Ueberblick über Einrichtung der Tilgungspläne sehr erleichtern und gestatten, Tilgungszeit, Grösse der jährlichen Zahlungsleistungen und Kapital-Abtragungen bequem zu ermitteln.

Sind die jährlichen Abtragssummen einander gleich, also $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots . A_n = A$, so geht die Darstellung No. 2) §. 31. in folgende über:

$$
\begin{aligned}
1) \qquad L_1 &= A + K.0{,}0p, \\
L_2 &= A + K.0{,}0p - A.0{,}0p, \\
L_3 &= A + K.0{,}0p - 2A.0{,}0p, \\
L_4 &= A + K.0{,}0p - 3A.0{,}0p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_r &= A + K.0{,}0p - (r-1)\,A.0{,}0p, \\
L_{r+1} &= A + K.0{,}0p - rA.0{,}0p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_n &= A + K.0{,}0p - (n-1)\,A.0{,}0p.
\end{aligned}
$$

Vergleicht man nun zwei auf einander folgende Jahresleistungen L_{r+1} und L_r mit einander, so erhält man:

2) $$L_{r+1} - L_r = -A.0{,}0p.$$

Hieraus ergeben sich für das Schema No. 1) folgende Sätze:

3) Sind die jährlichen Kapitalabtragungen, wodurch eine Anleihe getilgt wird, einander gleich, so nehmen die jährlichen Zahlungsleistungen (L) um die gleiche Summe ($A.0{,}0p$), und zwar um die Zinse der gleichen Kapitalabtragung ab, und umgekehrt:

4) Nehmen die Jahresleistungen, die zur Verzinsung und Tilgung einer Anleihe dienen, jährlich um die gleiche Summe, und zwar um die Zinse der jährlichen Abtragung (also auch die des ersten Jahres), ab, so sind die jährlichen Tilgungssummen gleich.

Die Summe, um welche die jährlichen Zahlungen abnehmen sollen, kann jedoch nicht willkührlich genommen werden, denn würde sie zu hoch gegriffen, so könnte der Fall eintreten, dass die Jahresleistungen sich um so viel verminderten, dass sie nicht mehr die Zinse der vorhandenen Schuld, noch weniger die erforderlichen Tilgungssummen deckten.

Im vorliegenden Falle ist:

5) $$K = nA.$$

Der Stand der Schuld am Ende des $r$ten Jahres oder Anfange des $(r+1)$sten ist:

6) $$S_r = K - rA.$$

Die Tilgungszeit bestimmt sich durch

7) $$n = \frac{K}{A}.$$

Geschieht die Verzinsung halbjährlich und die Tilgung jährlich, so ergibt sich aus No. 3) §. 31.:

8)
$$\begin{aligned}
L_1 &= \quad K.0{,}0p_1, \\
L_2 &= A + K.0{,}0p_1, \\
L_3 &= \quad K.0{,}0p_1 - A.0{,}0p_1, \\
L_4 &= A + K.0{,}0p_1 - A.0{,}0p_1, \\
L_5 &= \quad K.0{,}0p_1 - 2A.0{,}0p_1, \\
L_6 &= A + K.0{,}0p_1 - 2A.0{,}0p_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_{2r-1} &= \quad K.0{,}0p_1 - (r-1)A.0{,}0p_1, \\
L_{2r} &= A + K.0{,}0p_1 - (r-1)A.0{,}0p_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Halbjahres-Leistungen zweier Jahre mit einander, so hat man:

$$9)\quad L_{2r+1}+L_{2r+2}-L_{2r-1}-L_{2r}=-2.A.0{,}0p_1=-A.0{,}0p,$$

und es gelten auch hier die unter No. 3) und No. 4) angeführten Sätze in Betreff der Gesammtleistungen.

Vergleicht man die Summen, welche in den ungeraden und geraden Halbjahren fällig sind, unter einander, so ist:

$$10)\quad L_{2r+1}-L_{2r-1}=-A.0{,}0p_1,$$

$$11)\quad L_{2r+2}-L_{2r}=-A.0{,}0p_1.$$

Es zeigt sich, dass auch hier die genannten Sätze jedoch mit der Modifikation gelten, dass die Halbjahreszinse die Abnahme bilden. Die Gleichungen No. 5)—7) bleiben in Kraft.

Geschieht die Verzinsung und Tilgung halbjährlich, so erhält man aus No. 4) §. 31.:

$$12)\quad \begin{aligned} L_1 &= A+K.0{,}0p_1, \\ L_2 &= A+K.0{,}0p_1-A.0{,}0p_1, \\ L_3 &= A+K.0{,}0p_1-2A.0{,}0p_1, \\ L_4 &= A+K.0{,}0p_1-3A.0{,}0p_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{2r} &= A+K.0{,}0p_1-(2r-1)A.0{,}0p_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es gelten auch hier die in No. 3) und No. 4) genannten Sätze mit der Abänderung, dass sich die Zins- und Tilgungssummen auf Halbjahresfristen beziehen. Es ist daher:

$$13)\quad L_{2r+1}-L_{2r}=-A.0{,}0p_1,$$

$$14)\quad K=2nA,$$

$$15)\quad S_r=K-rA,$$

$$16)\quad n=\frac{K}{2A}.$$

§. 33.

Anwendung.

Die Anwendung der in §. 32. aufgestellten Sätze ist sehr einfach.

1) **Ein Kapital von 2400000 soll zu 5 Procent verzinst und durch eine jährliche Kapital-Abtragung von 200000 getilgt werden. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan? In welcher Zeit ist das Kapital getilgt?**

Das Kapital ist nach §. 32. No. 7) getilgt in:

$$n = \frac{2400000}{200000} = 12 \text{ Jahren.}$$

Setzt man nun in No. 1) §. 32. $K = 2400000$, $A = 200000$, $K.0,0p = 2400000.0,05 = 120000$, $A.0,0p = 200000.0,05 = 10000$, so ergibt sich mit Rücksicht auf No. 6) §. 32. folgende Zusammenstellung für den Tilgungsplan:

2)

Jahr	Grösse der jährlichen Zahlungen	Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des nächsten	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des nächsten
1	320000	2200000	200000
2	310000	2000000	400000
3	300000	1800000	600000
4	290000	1600000	800000
5	280000	1400000	1000000
6	270000	1200000	1200000
7	260000	1000000	1400000
8	250000	800000	1600000
9	240000	600000	1800000
10	230000	400000	2000000
11	220000	200000	2200000
12	210000		2400000

3) **Die Bedingungen sind wie oben. Das Kapital soll halbjährlich verzinst und jährlich getilgt werden. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan? Wann ist das Kapital getilgt?**

Die Tilgung geschieht nach 7) §. 32. in

$$n = \frac{2400000}{200000} = 12 \text{ ganzen oder 24 Halbjahren.}$$

Setzt man nun:

$K.0{,}0p_1 = 2400000.0{,}025 = 60000$, $A.0{,}0p_1 = 200000.0{,}025 = 5000$,

so ergibt sich nach No. 8) §. 32. folgender Tilgungsplan:

4)

Halbjahr	Grösse der halbjährlichen Zahlungen	Stand d. Schuld am Ende des Halbjahrs oder Anfang des nächsten	Grösse d. heimgezahlt. Schuld am Ende des Halbj. od. Anfang d. nächst.
1	60000		
2	260000	2200000	200000
3	55000		
4	255000	2000000	400000
5	50000		
6	250000	1800000	600000
7	45000		
8	245000	1600000	800000
9	40000		
10	240000	1400000	1000000
11	35000		
12	235000	1200000	1200000
13	30000		
14	230000	1000000	1400000
15	25000		
16	225000	800000	1600000
17	20000		
18	220000	600000	1800000
19	15000		
20	215000	400000	2000000
21	10000		
22	210000	200000	2200000
23	5000		
24	205000		2400000

5) Ein Kapital von 2400000 soll zu 5 Procent halbjährlich verzinst und durch eine halbjährliche Kapitalabtragung von 100000 getilgt werden. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan? Wann ist das Kapital getilgt?

Das Kapital ist nach No. 16) §. 32. in:

$$n = \frac{2400000}{2.100000} = 12 \text{ Jahren oder 24 Halbjahren}$$

getilgt. Setzt man nun:

$$p_1 = 2{,}5, \quad K = 2400000, \quad A = 100000, \quad K.0{,}025 = 60000,$$
$$A.0{,}025 = 2500,$$

so erhält man aus No. 12) und No. 15) §. 32. folgenden Tilgungsplan:

6)

Halbjahr	Grösse der halbjährlichen Zahlungen	Stand d. Schuld am Ende des Halbjahrs oder Anfang des nächsten	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Halbj. od. Anfang d. nächst.
1	160000	2300000	100000
2	157500	2200000	200000
3	155000	2100000	300000
4	152500	2000000	400000
5	150000	1900000	500000
6	147500	1800000	600000
7	145000	1700000	700000
8	142500	1600000	800000
9	140000	1500000	900000
10	137500	1400000	1000000
11	135000	1300000	1100000
12	132500	1200000	1200000
13	130000	1100000	1300000
14	127500	1000000	1400000
15	125000	900000	1500000
16	122500	800000	1600000
17	120000	700000	1700000
18	117500	600000	1800000
19	115000	500000	1900000
20	112500	400000	2000000
21	110000	300000	2100000
22	107500	200000	2200000
23	105000	100000	2300000
24	102500		2400000

Vergleicht man nun die Summen, welche zur Tilgung der Schuld nach den verschiedenen Tilgungsplänen erfordert werden, so bestätigen sie die in §. 32. aufgestellten Sätze. Die Jahresleistungen in No. 2) nehmen um 10000, die Zinse der Tilgungssumme, ab; die Summen der ungeraden, so wie der geraden Halbjahre nehmen in No. 4) um je 5000, die Jahreszahlungen um 200000 ab; die halbjährlich zu zahlenden Summen in No. 6) nehmen um 2500, die halbjährlichen Zinse der Abtragssumme ab. Vergleicht man nun auch die Summen, welche im Ganzen auf die Tilgung derselben Anleihe in dem Zeitraum von 12 Jahren verwendet werden müssen, so erheben sie sich in den beiden ersten Fällen bei jährlicher Tilgung und jährlicher, so wie halbjährlicher Verzinsung auf 3180000, während sich die, welche bei halbjährlicher Verzinsung und Tilgung in dem gleichen Zeitraum erfordert werden, nur auf 3150000 erheben, und weisen also einen Minderaufwand von 30000 oder ein jährliches Ersparniss von 2500 nach. Gewöhnlich verzinsen die Staaten ihre Anleihen halbjährlich und tilgen jährlich. Offenbar ist mit dieser Tilgungsweise ein Nachtheil verbunden, der sich bei einem geordneten Haushalte leicht vermeiden lässt, worauf schon in §. 22. und §. 23. hingewiesen wurde.

§. 34.

Tilgungsplan für Kapital-Abtragungen, die um gleich viel zunehmen.

Nehmen die Summen, wodurch eine Anleihe K getilgt werden soll, um die gleiche Grösse zu, so dass $A_1 = A$, $A_2 = A + D$, $A_3 = A + 2D, \ldots . A_n = A + (n-1) D$ ist, und geschieht die Verzinsung und Tilgung jährlich, so stellt sich der hiezu gehörige Tilgungsplan nach 2) §. 31. in folgender Weise fest:

1)

$$L_1 = A + K.0{,}0p,$$

$$L_2 = A + D + K.0{,}0p - A.0{,}0p,$$

$$L_3 = A + 2D + K.0{,}0p - 2A.0{,}0p - D.0{,}0p,$$

$$L_4 = A + 3D + K.0{,}0p - 3A.0{,}0p - \frac{2.3}{1.2} D.0{,}0p.$$

. . . .

$$L_n = A + (n-1) D + K.0{,}0p - (n-1) A.0{,}0p - \frac{(n-2)(n-1)}{1.2} D.0{,}0p.$$

Unter der Bedingung, dass

$$2)\qquad K = \frac{(2A + (n-1)D)n}{2} = nA + \frac{n(n-1)}{1.2} D$$

ist. Die Tilgungssumme des $r$ten Jahres (T_r) bestimmt sich durch

$$T_r = A + (r-1)D.$$

Die Grösse der getilgten Schuld am Ende des $r$ten oder Anfange des $(r+1)$ten Jahres ist:

$$3)\qquad G_r = rA + \frac{r(r-1)}{1.2} D.$$

Der Stand der Schuld am Ende des $r$ten oder Anfang des $(r+1)$ten Jahres wird gefunden, wenn man sämmtliche bis dahin zurückgezahlten Beträge von der Anleihe abzieht. Es ist daher aus No. 3):

$$4)\qquad S_r = K - \frac{(2A + (r-1)D)r}{2} = K - rA - \frac{r(r-1)}{1.2} D.$$

Hieraus und aus No. 2) ergibt sich eine zweite Methode, die Summe zu bestimmen, welche im Laufe des $r$ten Jahres gezahlt werden muss. Sie besteht nämlich aus dem Zins der Restschuld des vorigen $(r-1)$ten Jahres und der Tilgungssumme des $r$ten Jahres, und es ist:

$$5)\qquad L_r = S_{r-1} . 0{,}0p + T_r.$$

Vergleicht man die Werthe zweier auf einander folgenden Jahreszahlungen, so erhält man nach den gehörigen Reductionen:

$$6)\qquad L_r - L_{r+1} = -D + A . 0{,}0p + (r-1) D . 0{,}0p.$$

Hier liegt kein so einfaches Gesetz für den Uebergang von einer Jahreszahlung zur nächst folgenden vor, wie in No. 2) §. 32. Ist $L_r - L_{r+1}$ positiv oder $L_r > L_{r+1}$, so fällt die Jahresleistung. Ist aber $L_r - L_{r+1}$ negativ oder $L_r < L_{r+1}$, so steigt die Leistung des nachfolgenden Jahres. Es kann daher ein Steigen und Fallen der Jahreszahlungen bei dem vorstehenden Tilgungsplan eintreten.

Untersucht man nun den Ausdruck

$$L_r = A + (r-1)D + K.0{,}0p - (r-1)A.0{,}0p - \frac{(r-2)(r-1)}{1.2}D.0{,}0p$$

auf ein Maximum, so ist:

$$7)\qquad \frac{\partial L_r}{\partial r} = D - A.0{,}0p - \frac{2r-3}{2}.D.0{,}0p,$$

$$\frac{\partial^2 L_r}{(\partial r)^2} = -D.0{,}0p.$$

Es ist daher unter den Jahresleistungen von No. 1) ein Maximum möglich. Setzt man nun den Werth auf der rechten Seite in No. 7) der 0 gleich und bestimmt hieraus r, so hat man zur Bestimmung dieses Zeitpunktes:

$$8)\qquad r = \frac{100}{p} + \frac{3}{2} - \frac{A}{D}.$$

Hieraus folgt:

9) Bei den Zahlungsleistungen des Tilgungsplans No. 1) entsteht ein Maximum, wenn $\frac{100}{p} + 1{,}5 > \frac{A}{D}$, also wenn A im Verhältniss zu D nicht grösser als $\frac{100}{p} + 1{,}5$ ist.

Wird dieses Verhältniss überschritten, so wird r negativ und der Zeitpunkt wird nicht mehr eintreten. Die Werthe der Zahlungen werden dann fallen.

Die Zeit, in welcher die Anleihe getilgt wird, ergibt sich durch Entwicklung von n aus der Gleichung 2) und ist:

$$10)\qquad n = \sqrt{\left(\frac{2K}{D} + \left(\frac{2A-D}{2D}\right)^2\right)} - \frac{2A-D}{2D}$$

$$= \frac{1}{2D}\sqrt{8K.D + (2A-D)^2} - \frac{2A-D}{2D}.$$

Führt n nicht auf eine ganze, sondern eine gemischte Zahl, so ist es am besten, die Zahlungs-Leistung für das letzte Jahr und dann die Grösse der Restschuld zu bestimmen und sie der letzten Zahlung zuzuschlagen oder auf das nächstfolgende Jahr überzutragen.

Geschieht unter den zu No. 1) gemachten Voraussetzungen die Verzinsung der Anleihe halbjährlich und die Tilgung jährlich, so ergibt sich aus No. 3) §. 31. folgender Tilgungsplan:

11)

$$L_1 = K.0{,}0p_1,$$
$$L_2 = A + K.0{,}0p_1,$$
$$L_3 = K.0{,}0p_1 - A.0{,}0p_1,$$
$$L_4 = A + D + K.0{,}0p_1 - A.0{,}0p_1,$$
$$L_5 = K.0{,}0p_1 - 2A.0{,}0p_1 - D.0{,}0p_1,$$
$$L_6 = A + 2D + K.0{,}0p_1 - 2A.0{,}0p_1 - D.0{,}0p_1,$$
$$L_7 = K.0{,}0p_1 - 3A.0{,}0p_1 - \frac{2.3}{1.2}D.0{,}0p_1,$$
$$L_8 = A + 3D + K.0{,}0p_1 - 3A.0{,}0p_1 - \frac{2.3}{1.2}D.0{,}0p_1,$$

. . . .

$$L_{2n-1} = K.0{,}0p_1 - (n-1)A.0{,}0p_1 - \frac{(n-2)(n-1)}{1.2}D.0{,}0p_1.$$
$$L_{2n} = A + (n-1)D + K.0{,}0p_1 - (n-1)A.0{,}0p_1 - \frac{(n-2)(n-1)}{1.2}D.0{,}0p_1.$$

Bei dieser Darstellung bleiben die in No. 2)—5) aufgestellten Gleichungen in Kraft. Dasselbe gilt von der Gleichung No. 10), welche die Tilgungszeit bestimmt.

Nimmt man die beiden Halbjahreszahlungen zweier auf einander folgenden Jahre zusammen, so unterliegen sie den gleichen Bedingungen, die in No. 6), 8) und 9) angegeben sind.

Vergleicht man aber die Werthe der Zahlungen zweier auf einander folgenden ungeraden Halbjahre, so erhält man:

12) $$L_{2r-1} - L_{2r+1} = A.0{,}0p_1 + (r-1)D.0{,}0p_1.$$

Hiernach ist $L_{2r-1} > L_{2r+1}$, d. h.

13) die Werthe der Zahlungen für die ungeraden Halbjahre nehmen beständig ab, denn der Werth jeder vorhergehenden Zahlung ist grösser als derjenige der nachfolgenden.

Vergleicht man die Werthe der Zahlungen zweier auf einander folgenden geraden Halbjahre, worin die Tilgung erfolgt, so ist

14) $$L_{2r} - L_{2r+2} = -D + A.0{,}0p_1 + (r-1)D.0{,}0p_1.$$

Hier gelten die Bemerkungen, welche zu No. 6) gemacht wurden. Auch hier kann ein Maximum eintreten. Es bestimmt sich nach dem Vorgange von No. 7) auf folgende Weise:

15) $$r = \frac{100}{p_1} + \frac{3}{2} - \frac{A}{D} = \frac{200}{p} + 1{,}5 - \frac{A}{D}.$$

Es tritt aber in einem viel spätern Zeitpunkt ein.

Für die beiden Tilgungspläne No. 1) und 11) gelten noch nach No. 2) folgende Bestimmungen:

16) $$A = \frac{K}{n} - \frac{(n-1)D}{2}$$

wenn K, D und n bekannt ist,

17) $$D = \frac{2K}{n(n-1)} - \frac{2A}{n-1}$$

wenn K, A und n bekannt ist.

Geschieht endlich Verzinsung und Tilgung halbjährlich, so ergibt sich aus No. 4. §. 31. folgender Tilgungsplan:

18)

$$L_1 = A + K.0{,}0p_1,$$
$$L_2 = A + D + K.0{,}0p_1 - A.0{,}0p_1,$$
$$L_3 = A + 2D + K.0{,}0p_1 - 2A.0{,}0p_1 - D.0{,}0p_1,$$
$$L_4 = A + 3D + K.0{,}0p_1 - 3A.0{,}0p_1 - \frac{2.3}{1.2}D.0{,}0p_1,$$

. . . .

$$L_{2n} = A + (2n-1)D + K.0{,}0p_1 - (2n-1)A.0{,}0p_1 - \frac{(2n-2)(2n-1)}{1.2}D.0{,}0p_1,$$

unter der Bedingung, dass

19) $$K = 2nA + \frac{(2n-1)2n}{1.2}D$$

ist. Die Gleichungen No. 3), 4), 5) bleiben mit der Abänderung in Kraft, dass sie auf halbe Jahre statt auf ganze zu beziehen sind. Die Werthe zweier auf einander folgenden Halbjahreszahlungen unterliegen folgender Beziehung:

20) $$L_{2r} - L_{2r+1} = -D + A.0{,}0p_1 + (2r-1)D.0{,}0p_1.$$

Auch hier ist ein Maximum möglich. Es tritt nach

21) $$2r = \frac{200}{p} + \frac{3}{2} - \frac{A}{D}$$

Halbjahren oder nach

22) $$r=\frac{100}{p}+\frac{3}{4}-\frac{A}{D}$$

Jahren ein. Die Tilgungszeit bestimmt sich aus No. 19) auf folgende Weise:

23)

$$n=\sqrt{\left(\frac{K}{2D}+\frac{(2A-D)^2}{16D^2}\right)}-\frac{2A-D}{4D}=\frac{1}{4D}\sqrt{[8K.D+(2A-D)^2]}-\frac{2A-D}{4D}.$$

Führt n nicht auf eine ganze, sondern eine gemischte Zahl, so wird es am sachgemässesten sein, die Restschuld für die gefundene ganze Zahl zu bestimmen und damit zu verfahren, wie oben zu No 10) angegeben wurde.

Ferner erhält man aus No. 19):

24) $$A=\frac{K-n(2n-1)D}{2n},$$

25) $$D=\frac{K-2nA}{n(2n-1)}.$$

§. 35.

Anwendungen.

1) **Eine Anleihe von 1950000 soll zu 5 Procent jährlich verzinst und so getilgt werden, dass im ersten Jahre 150000 zurückgezahlt und diese Summe noch um jährliche 10000 erhöht wird. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan? Wann ist die Schuld getilgt?**

Wendet man zur Beantwortung dieser Fragen No. 1) und die folgenden Gleichungen §. 34. an, so ist $K=1950000$, $A=150000$, $D=10000$, $p=5$ einzuführen.

Die Zeit bestimmt sich dann auf folgende Weise. Es ist:

$$\frac{2K}{D}=\frac{2.1950000}{10000}=390,\quad \frac{2A-D}{2D}=\frac{2.150000-10000}{200000}=\frac{29}{2},$$

folglich:

$$n=\tfrac{1}{2}\sqrt{4.390+29^2}-\frac{29}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2401}-\frac{29}{2}=\frac{49-29}{2}=10,$$

und die Anleihe wird in 10 Jahren getilgt sein.

Die Jahreszahlungen werden sich dadurch am einfachsten bestimmen, wenn man die allen Gliedern in No. 1) §. 34. gemeinschaftlichen Werthe

$$K.0{,}0p + A = 1950000.0{,}05 + 150000 = 247500$$

ermittelt und die wechselnden Werthe von $D = 10000$, $D.0{,}0p = 500$ und $A.0{,}0p = 7500$ zu- und abzählt. Der Stand der Schuld und die Grösse der getilgten Schuld ermittelt sich aus den Gleichungen No. 4) und 3). Hieraus ergibt sich folgender Tilgungsplan:

2)

Jahr	Grösse der jährlichen Zahlungen	Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Tilgungssumme.
1	247500	1800000	150000	150000
2	250000	1640000	310000	160000
3	252000	1470000	480000	170000
4	253500	1290000	660000	180000
5	254500	1100000	850000	190000
6	255000	900000	1050000	200000
7	255000	690000	1260000	210000
8	254500	470000	1480000	220000
9	253500	240000	1710000	230000
10	252000		1950000	240000

Die Richtigkeit dieser Angaben kann man durch die Gleichung No. 5) §. 34. untersuchen. Soll nämlich die Zahlungsleistung des 6ten Jahres bestimmt werden, so hat man:

$$L_6 = S_5.0{,}05 + T_6 = 1100000.0{,}05 + 150000 + 5.10000$$
$$= 255000,$$

denn die Tilgungssumme des 6ten Jahres ist nach der Gleichung No. 3):

$$T_6 = 150000 + 5.10000 = 200000,$$

wozu noch die Zinse der Schuld des vorigen Jahres kommen.

Die Zahlungsleistungen wachsen, wie man sieht, erreichen einen höchsten Werth und fallen von da an wieder. Der Zeitpunkt fällt für das Maximum nach No. 8) §. 34. auf das

$$r = \frac{100}{5} + 1{,}5 - \frac{150000}{10000} = 21{,}5 - 15 = 6{,}5$$

Jahr, also in die Mitte zwischen das 6te und 7te Jahr. Daher entstehen zwei grösste Werthe. Fiele der Werth von r näher an das eine oder andere Jahr, so würde nur ein Maximum entstehen.

Ist $A < D$, so erhält der Zeitpunkt, in welchem das Maximum eintritt, für einen bestimmten Zinsfuss einen festen Werth. Er fällt bei dem Zinsfuss 5 auf das 21ste Jahr und kann nicht später fallen. Bei dem Zinsfuss 4 fällt er auf das 26ste, bei dem Zinsfuss 3 auf das 35ste Jahr u. s. w. Nur in dem Falle, als $A > D$ ist, welcher vorliegt, kann der Zeitpunkt des Maximums früher fallen.

3) **Die Bedingungen sind wie oben unter No. 1). Die Schuld soll halbjährlich verzinst und jährlich getilgt werden. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan?**

Da in der Tilgung keine Aenderung eintritt, so bleibt auch die Tilgungszeit dieselbe. Die Anleihe wird daher in 10 Jahren getilgt sein, wozu aber 20 Zahlungen erforderlich sind. Es kommt daher die Darstellung No. 11. §. 34. zur Anwendung. Die nöthigen Werthe sind: $K = 1950000$, $A = 150000$, $D = 10000$, $K.0,0p_1 = 48750$, $A.0,0p_1 = 3750$, $D.0,0p_1 = 250$. Die in allen geraden Halbjahren vorkommende Summe ist:

$$A + K.0,0p_1 = 150000 + 48750 = 198750,$$

an welche sich die positiven und negativen Werthe der weiter nöthig werdenden Glieder schliessen. Die Gleichungen No. 3) und 4) §. 34. gelten auch hier. Der fragliche Tilgungsplan ist daher:

4)

Halbjahr.	Grösse der halbjährlichen Zahlungen.	Stand der Schuld am Ende des Halbjahres oder Anfang des nächsten	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Halbjahres oder Anfang des nächsten	Tilgungssumme
1	48750			
2	198750	1800000	150000	150000
3	45000			
4	205000	1640000	310000	160000
5	41000			
6	211000	1470000	480000	170000
7	36750			
8	216750	1290000	660000	180000
9	32250			
10	222250	1100000	850000	190000
11	27500			
12	227500	900000	1050000	200000
13	22500			
14	232500	690000	1260000	210000
15	17250			
16	237250	470000	1480000	220000
17	11750			
18	241750	240000	1710000	230000
19	6000			
20	246000		1950000	240000

Die Summen der ungeraden Halbjahre fallen nach No. 12) und 13) §. 34., diejenigen der geraden steigen, denn ein Maximum würde bei den letzten erst im

$$r = \frac{200}{5} + 1{,}5 - \frac{150000}{10000} = 26{,}5$$

Jahre eintreten. Zählt man aber die beiden Summen eines jeden Jahres zusammen, dann stimmen sie mit den in No. 2) gegebenen überein und das Maximum tritt im 6,5ten Jahre ein.

§. 36.

Fortsetzung.

1) Eine Anleihe von 2450000 soll mit 5 Procent verzinst und so getilgt werden, dass Tilgung und Verzinsung halbjährlich geschieht, im ersten Halbjahre 75000 abgetragen und diese Summe in jedem folgenden um 5000 erhöht wird. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan? In wie viel Jahren ist die Schuld getilgt?

Hier kommt das Schema No. 18) §. 34. zur Anwendung. Es ist

$$K = 2450000, \quad A = 75000, \quad D = 5000.$$

Die Zeit bestimmt sich aus No. 23) §. 34. und man hat dort:

$$\frac{K}{2D} = \frac{2450000}{2.5000} = 245, \quad \frac{2A-D}{4D} = \frac{2.75000-5000}{4.5000} = \frac{145}{20}$$

einzuführen. Es ist daher:

$$2) \quad n = \sqrt{\left(245 + \frac{145^2}{400}\right)} - \frac{145}{20} = \frac{1}{20}\sqrt{(98000 + 21025)} - \frac{145}{20}$$
$$= \frac{1}{20}\sqrt{119025} = \frac{345-145}{20} = 10.$$

Die Anleihe wird in 10 Jahren oder 20 halben Jahren getilgt sein. Zur Feststellung des Tilgungsplans hat man:

$$K.0{,}0p_1 = 2450000.0{,}025 = 61250, \quad A.0{,}0p_1 = 75000.0{,}025 = 1875,$$
$$D.0{,}0p_1 = 5000.0{,}025 = 125.$$

Die allen Gliedern gemeinschaftliche Summe ist:

$$A + K.0{,}0p_1 = 75000 + 61250 = 136250.$$

Der Stand der Schuld ergibt sich aus der Gleichung No. 4) §. 34.:

$$S_r = 2450000 - r.75000 - \frac{r(r-1)}{1.2}.5000,$$

die Grösse der getilgten Schuld aus No. 3) §. 34.:

$$G_r = r.75000 + \frac{r(r-1)}{1.2}.5000.$$

Hieraus ergibt sich der nachstehende Tilgungsplan:

3)

Halbjahr.	Grösse der halbjährlichen Zahlungen	Stand der Schuld am Ende des Halbjahres oder Anfang des nächsten	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Halbjahres oder Anfang des nächsten	Tilgungssumme
1	136250	2375000	75000	75000
2	139375	2295000	155000	80000
3	142375	2210000	240000	85000
4	145250	2120000	330000	90000
5	148000	2025000	425000	95000
6	150625	1925000	525000	100000
7	153125	1820000	630000	105000
8	155500	1710000	740000	110000
9	157750	1595000	855000	115000
10	159875	1475000	975000	120000
11	161875	1350000	1100000	125000
12	163750	1220000	1230000	130000
13	165500	1085000	1365000	135000
14	167125	945000	1505000	140000
15	168625	800000	1650000	145000
16	170000	650000	1800000	150000
17	171250	495000	1955000	155000
18	172375	335000	2115000	160000
19	173375	170000	2280000	165000
20	174250		2450000	170000

Die Richtigkeit der angegebenen Werthe lässt sich leicht durch die Gleichung No. 5) §. 34. nachweisen. So ist z. B. die im 16ten Halbjahre zu zahlende Summe:

$$L_{16} = S_{15}.0{,}025 + T_{16} = 800000.0{,}025 + 75000 + 15.5000$$
$$= 20000 + 150000 = 170000,$$

was mit No. 3) übereinstimmt. Ein Maximum findet bei dem vorstehenden Tilgungsplan nicht statt. Es fiele nach No. 11) §. 34. auf das

$$2r = \frac{200}{5} + 1{,}5 - \frac{75000}{5000} = 26{,}5$$

Halbjahr, während der Tilgungsplan sich nur auf 20 Halbjahre erstreckt. Sämmtliche Werthe der Zahlungen steigen daher. Bei Tilgungsplänen, welche eine längere Zeit erfordern, wird dieses Maximum hervortreten. Diess soll noch an folgendem Falle gezeigt werden, wobei wir der Kürze wegen nur Einzelnes aus dem Tilgungsplan herausheben.

4) Eine Anleihe im Betrage von 4380000 soll so zu 5 Procent getilgt werden, dass im ersten Jahre 1000 und in jedem folgenden 10000 mehr am Kapitale abgetragen werden. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan in den ersten 6 Jahren, im 10ten, 15ten, 19—25sten und im letzten Jahre? Wann wird die Schuld getilgt sein?

Man hat hier die Darstellung No. 1) §. 34. anzuwenden und $K = 4380000$, $A = 1000$, $D = 10000$, $p = 5$ zu setzen. Die Zeit bestimmt sich aus No. 10) §. 34., und es ist:

$$\frac{2K}{D} = \frac{2.4380000}{10000} = 876, \quad \frac{2A-D}{2D} = \frac{2000-10000}{2.10000} = -\frac{4}{10}.$$

Hieraus erhält man:

$$5) \quad n = \sqrt{(876 + \frac{4^2}{100})} + \frac{4}{10} = \frac{1}{10}\sqrt{87616} + \frac{4}{10} = \frac{296+4}{10} = 30.$$

Die Tilgungszeit umfasst also 30 Jahre. Zur Feststellung des Tilgungsplans hat man: $A.0{,}0p = 50$, $D.0{,}0p = 500$, und die allen Gliedern gemeinschaftliche Summe beträgt:

$$A + K.0{,}0p = 1000 + 4380000.0{,}05 = 1000 + 219000 = 220000.$$

Es entsteht daher:

6)

Jahr	Grösse der jährlichen Zahlungen	Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Tilgungs-summe
1	220000	4379000	1000	1000
2	229950	4368000	12000	11000
3	239400	4347000	33000	21000
4	248350	4316000	64000	31000
5	256800	4275000	105000	41000
6	264700	4224000	156000	51000
10	291550	3920000	460000	91000
15	313800	3315000	1065000	141000
19	322600	2651000	1729000	181000
20	323550	2460000	1920000	191000
21	324000	2259000	2121000	201000
22	323950	2048000	2332000	211000
23	323400	1827000	2553000	221000
24	322350	1596000	2784000	231000
25	320800	1355000	3025000	241000
30	305550		4380000	291000

Auch die hier gegebenen Resultate lassen sich leicht nach der Gleichung No. 5) §. 34. prüfen. Das Maximum der Zahlungsleistungen tritt, wie man sieht, mit dem 21sten Jahre ein, wie diess mit dem früher Gesagten übereinstimmt, und nach No. 8) §. 34.

$$r = \frac{100}{5} + 1{,}5 - \frac{1000}{10000} = 21{,}4$$

sein muss. Am Ende des 30sten Jahres ist die Schuld getilgt.

Dass auch in den vorliegenden Fällen die halbjährliche Verzinsung und Tilgung vortheilhafter ist, als die jährliche Tilgung und ganzjährige oder halbjährliche Verzinsung lässt sich leicht nachweisen.

Untersucht man zu dem Ende den in No. 1) §. 35. gegebenen Fall und bestimmt die Summe D, welche erforderlich ist, um bei halbjährlicher Tilgung in 10 Jahren das Kapital 1950000 durch steigende Summen zurückzuzahlen, so erhält man, wenn in No. 25) §. 34. $K = 1950000$, $A = \frac{1}{2}150000 = 75000$, $n = 10$ gesetzt wird:

$$7) \qquad D = \frac{1950000 - 20.75000}{10.19} = \frac{45000}{19} = 2368{,}4.$$

Setzt man hiefür der bequemeren Rechnung wegen die runde Summe 2400, so hat man die Darstellung No. 18) §. 34. anzuwenden und $K=1950000$, $A=75000$, $D=2400$, $p_1=0{,}025$, $K.0{,}025=48750$, $A.0{,}025=1875$, $D.0{,}025=60$ und die allen Gliedern gemeinschaftliche Summe $K.0{,}025+A=123750$ zu setzen. Hieraus ergibt sich der nachstehende Tilgungsplan:

8)

Halbjahr	Grösse der halbjährlichen Zahlungen	Stand der Schuld zu Ende des Halbjahrs od. Anfang des nächsten	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Halbjahrs oder Anfang des nächsten	Tilgungssumme
1	123750	1875000	75000	75000
2	124275	1797600	152400	77400
3	124740	1717800	232200	79800
4	125145	1635600	314400	82200
5	125490	1551000	399000	84600
6	125775	1464000	486000	87000
7	126000	1374600	575400	89400
8	126165	1282800	667200	91800
9	126270	1188600	761400	94200
10	126315	1092000	858000	96600
11	126300	993000	957000	99000
12	126225	891600	1058400	101400
13	126090	787800	1162200	103800
14	125895	681600	1268400	106200
15	125640	573000	1377000	108600
16	125325	462000	1488000	111000
17	124950	348600	1601400	113400
18	124515	232800	1717200	115800
19	124020	114600	1835400	118200
20	117465		1950000	114600

Vergleicht man nun die Summen, welche im Ganzen auf die Tilgung und Verzinsung einer Schuld von 1950000 nach No. 2) §. 35. verwendet werden müssen, wenn die Tilgung und Verzinsung jährlich geschieht, mit derjenigen, welche auf Tilgung und Verzinsung derselben Schuld verwendet werden müssen, wenn die Tilgung und Verzinsung halbjährlich geschieht, so sind im ersten Falle im Ganzen 2527500 und im zweiten Falle nur 2500350, also 27150 weniger erforderlich, was durchschnittlich jährlich eine Summe von 2715 erspart. Diess zeigt sich auch, wenn man die einzelnen Jahresleistungen von No. 2) §. 35. mit den hier in No. 8) gegebenen vergleicht. Nur die zwei Halbjahres-Leistungen des

ersten Jahres machen hievon eine Ausnahme und werden von den spätern bedeutend überwogen. Man sieht also hiedurch das früher Gesagte bestätigt.

Die Summen, welche am Ende der Halbjahre fällig sind, wachsen, erreichen im 10ten Halbjahre den höchsten Werth und fallen dann wieder, wie diess nach No. 21) §. 34.:

$$2r = \frac{200}{5} + 1{,}5 - \frac{75000}{2400} = 41{,}5 - 31{,}25 = 10{,}25$$

sein muss.

Die Schuldigkeit des letzten Halbjahrs ergibt sich, wenn man nach No. 4) §. 34. die Restschuld des 19ten Halbjahres berechnet und hiezu die halbjährigen Zinsen zählt. Es ist:

$$L_{20} = 114600 + 114600 . 0{,}025 = 114600 + 2865 = 117465.$$

Die in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen behandelten besondern Fälle wurden der einfachern Rechnung wegen so gewählt, dass die Tilgungszeit auf ganze Jahre oder Halbjahre führte. Kommen Fälle vor, worin n nicht auf ganze Zeitabschnitte führt, wie bei dem zuletzt unter No. 8) betrachteten Tilgungsplan, so hat man die zu No. 10) und 23) §. 34. gemachten Bemerkungen anzuwenden, die Restschuld zu bestimmen und in Rechnung zu bringen, wie diess geschah. Bestimmt man nämlich aus den hiezu gehörigen Elementen nach No. 23) §. 34. die Tilgungszeit, so hat man:

$$\frac{K}{2D} = \frac{1950000}{2.2400} = \frac{3250}{8}, \quad \frac{2A - D}{4D} = \frac{150000 - 2400}{4.2400} = \frac{123}{8},$$

und es ist:

$$n = \frac{1}{8}\sqrt{(8.3250 - 123^2)} - \frac{123}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{41129} - \frac{123}{8} = \frac{202{,}8 - 123}{8} = 9{,}9$$

Jahre oder 19,4 Halbjahre. Die Restschuld wurde im Tilgungsplan auf den Schluss des 20sten Halbjahres zurückgeführt.

§. 37.

Tilgungsplan bei Kapitalabtragungen, die um gleich viel abnehmen.

Nehmen die Tilgungssummen, wodurch eine Anleihe K abgetragen werden soll, um den gleichen Betrag D ab, so dass

$A_1 = A, \quad A_2 = A - D, \quad A_3 = A - 2D, \ldots \quad A_n = A - (n-1)D$

ist, so geht die Darstellung No. 2) §. 31., wenn die Verzinsung und Tilgung jährlich geschieht, in folgende über:

1)

$$L_1 = A + K.0{,}0p,$$
$$L_2 = A + K.0{,}0p - D - A.0{,}0p,$$
$$L_3 = A + K.0{,}0p - 2D - 2A.0{,}0p + D.0{,}0p,$$
$$L_4 = A + K.0{,}0p - 3D - 3A.0{,}0p + \frac{2.3}{1.2}D.0{,}0p,$$
$$L_5 = A + K.0{,}0p - 4D - 4A.0{,}0p + \frac{3.4}{1.2}D.0{,}0p,$$

. . . .

$$L_n = A + K.0{,}0p - (n-1)D - (n-1)A.0{,}0p + \frac{(n-2)(n-1)}{1.2}D.0{,}0p.$$

Diese Darstellung stimmt mit der in No. 1) §. 34. gegebenen überein, wenn dort $-D$ statt $+D$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung gelten die dort gefundenen Gesetze auch hier. Der vorstehende Tilgungsplan bietet aber doch besondere Eigenthümlichkeiten, die im Folgenden hervorgehoben werden sollen.

Zählt man sämmtliche Tilgungssummen zusammen, so ergibt sich die Grösse des Kapitals, welches nach dem vorstehenden Plane in der Zeit n getilgt werden kann, und man erhält:

2) $$K = nA - \frac{n(n-1)D}{1.2}.$$

Es zeigt sich hieraus, dass K nicht 0 oder negativ werden kann. Die Werthe von K, A, D und n stehen daher unter einander in einem bestimmten Zusammenhange. Ihre Annahme unterliegt nicht unbeschränkter Willkühr, sondern ist an bestimmte Gesetze geknüpft. In keinem Falle kann D so gross oder grösser als A sein.

Wählt man unter der Voraussetzung, dass $A > D$ ist, für bestimmte Werthe von A und D beliebige Werthe für n und leitet daraus die entsprechenden Werthe für K ab, so werden sich für verschiedene n verschiedene Kapitalwerthe ergeben. Es entsteht daher die Frage: Welchen Gesetzen werden diese Kapitalwerthe unterliegen?

Untersucht man nun zu dem Ende die Gleichung No. 2) auf ein Maximum oder Minimum, so hat man:

$$3) \qquad \frac{\partial K}{\partial n} = A - nD + \frac{D}{2},$$

$$\frac{\partial^2 K}{(\partial n)^2} = -D.$$

Unter den möglichen Kapitalwerthen bei einem bestimmten A und D ergibt sich hiernach ein Maximum. Dieses Maximum bestimmt sich aus No. 3) durch die Gleichung:

$$4) \qquad n = \frac{A}{D} + 0{,}5.$$

Berechnet man nun aus diesem Werth für n nach der Gleichung No. 2) den entsprechenden Werth von K, so gibt dieser Werth die Grenze an, die nicht überstiegen werden darf, wenn ein Kapital nach dem vorstehenden Tilgungsplan getilgt werden soll. Nur die innerhalb dieser Grenze liegenden Kapitalwerthe werden nach dem Tilgungsplan No. 1) tilgbar sein, denn nicht jedes beliebige Kapital K wird durch bestimmte A und D getilgt werden können. Die Tilgungssumme des $r$ten Jahres beträgt:

$$5) \qquad T_r = A - (r-1)D.$$

Zählt man hiezu die Tilgungssummen der vorhergehenden Jahre, so bestimmt sich hiedurch die Grösse der am Ende des $r$ten oder Anfang des $(r+1)$ten Jahres noch vorhandenen Schuld, und es ist:

$$6) \qquad G_r = rA - \frac{r(r-1)}{1.2} D.$$

Der Stand der Schuld zu demselben Zeitpunkt ist hiernach:

$$7) \qquad S_r = K - rA + \frac{r(r-1)}{1.2} D.$$

Aus No. 5) entnimmt sich, dass die Tilgungssumme nicht negativ werden kann, dass also $A > D$ sein muss. Wird $T = 0$, so hört die Tilgung auf und man erhält dann:

$$8) \qquad r = \frac{A}{D} + 1.$$

Diess ist die Grenze, innerhalb welcher die Tilgung einer Anleihe unter den oben genannten Bedingungen vor sich geht. Ist $\frac{A}{D}$ eine ganze Zahl, so fällt die letzte Tilgung auf die hiedurch bestimmte Zeit, also auf das vorhergehende Jahr. Führt aber $\frac{A}{D}$ auf eine gemischte Zahl, dann wird für diesen Zeitpunkt noch

eine entsprechende Restschuld bleiben, die sogleich oder im folgenden Jahre getilgt werden kann.

In beiden Fällen hat das zu tilgende Kapital seine höchste Höhe erreicht, denn der Tilgungsfonds erhält keinen Zuwachs mehr. Diese Aussage stimmt mit dem Inhalt der Gleichung Nr. 4) überein, welche den Zeitpunkt bezeichnet, für welchen das Maximum unter den möglichen Kapitalwerthen eintritt. Das zu tilgende Kapital hat auf die Bestimmung der Zeitgrenze keinen Einfluss, wie sich aus No. 8) ergibt.

Vergleicht man zwei auf einander folgende Jahreszahlungen, so erhält man für ihre Beziehung unter einander:

$$9) \qquad L_r - L_{r+1} = D + A.0{,}0p - (r-1)\,D.0{,}0p.$$

Ist dieser Werth positiv, so nehmen die Jahres-Leistungen zu; im umgekehrten Falle nehmen sie ab. Da $A-(r-1)\,D$ nach No. 5) immer positiv sein muss, so nehmen dieselben ab. Untersucht man daher den Ausdruck:

$$L_r = A - (r-1)\,D + K.0{,}0p - (r-1)\,A.0{,}0p + \frac{(r-2)(r-1)}{1.2}\,D.0{,}0p$$

auf ein Minimum, so zeigt es sich, dass ein solches eintritt und sich durch die Gleichung

$$10) \qquad r = \frac{100}{p} + 1{,}5 + \frac{A}{D}$$

bestimmt. Dieses Resultat deutet auf einen grössern Zeitraum, als derjenige ist, welcher in No. 4) oder 7) angegeben wurde und überschreitet die äusserste Grenze der Tilgungszeit. Er wird daher niemals eintreten und die Zahlungsleistungen werden beständig abnehmen. Die letzte wird immer die kleinste sein.

Die Zahlungsleistung eines bestimmten Jahres kann auch durch die Gleichung

$$11) \qquad L_r = S_{r-1}.0{,}0p + T_r$$

ermittelt werden.

Da sich aus No. 2) verschiedene Werthe von K bei bestimmten A und D und darunter ein höchster ergeben, wenn für n verschiedene Werthe eingesetzt werden, so fragt es sich: wie viele Werthe werden sich für n und dadurch für K ableiten lassen? Setzt man zu dem Ende $K=0$, so erhält man aus

$$0 = nA - \frac{n(n-1)}{1.2}\,D$$

folgende Bestimmung:

$$12) \qquad n = \frac{2A}{D} + 1.$$

Es sind hiernach doppelt so viele Werthe für K bei bestimmtem A und D möglich, unter denen sich ein grösster vorfinden wird, wie in No. 4) angegeben wurde. Diese Gleichung steht durchaus nicht mit No. 4) und 8) im Widerspruch, denn sie bezieht sich auf mögliche Zahlenwerthe, während die beiden letzten für Zeitbestimmung und Tilgungszeiten gelten.

Ist K, A und D gegeben, wobei K den oben angegebenen Beschränkungen unterliegt, so leitet sich aus der Gleichung No. 2) die Tilgungszeit auf folgende Weise ab:

$$13) \qquad n = \pm \sqrt{[-\frac{2K}{D} + \frac{(2A+D)^2}{4D^2}]} + \frac{2A+D}{2D}$$

$$= \pm \frac{1}{2D}\sqrt{[-8KD + (2A+D)^2]} + \frac{2A+D}{2D}.$$

Die Abhängigkeit des Werthes von K gegenüber den Werthen von A und D zeigt sich auch hier und es muss $K < \frac{(2A+D)^2}{8D}$ sein oder kann höchstens diesem Werthe gleichkommen.

Geschieht die Verzinsung halbjährlich und die Tilgung jährlich oder beide halbjährlich, so gelten die in §. 34. unter diesen Voraussetzungen aufgestellten Tilgungspläne No. 11) und 18), wenn man dort $-D$ statt $+D$ setzt, mit den erforderlichen Abänderungen, welche sich aus den hier gemachten Bemerkungen leicht ergeben, weswegen wir sie nicht besonders hier hervorheben.

§. 38.

Anwendung.

Wir machen eine kurze Anwendung der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate, um die Eigenthümlichkeiten derselben zu verdeutlichen.

1) **Eine Anleihe von 3775000 soll zu 5 Procent verzinst und durch jährliche Verzinsung und Tilgung so abgetragen werden, dass im ersten Jahre 100000 und in jedem folgenden 1000 weniger abgezahlt werden. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan? Wann ist die Anleihe getilgt?**

Werden die in §. 37. aufgestellten Gleichungen angewendet, so ist $K = 3775000$, $A = 100000$, $D = 1000$. Die Zeit, in welcher das Kapital getilgt wird, bestimmt sich aus No. 13), §. 37. Es ist:

$$\frac{2K}{D} = \frac{2.3775000}{1000} = 7550, \quad \frac{2A+D}{2D} = \frac{200000+1000}{2000} = \frac{201}{2},$$

und hieraus:

$$n = \pm\sqrt{(-7550 + \frac{201^2}{4})} + \frac{201}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(-30200+40401)} + \frac{201}{2}$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{10201} + \frac{201}{2},$$

2) $$n = -\frac{101}{2} + \frac{201}{2} = 50;$$

die Anleihe wird in 50 Jahren getilgt sein.

Zur Feststellung des Tilgungsplans sind die erforderlichen Werthe $K.0{,}0p = 3775000.0{,}05 = 188750$, $A.0{,}05 = 100000.0{,}05 = 5000$, $D.0{,}0p = 1000.0{,}05 = 50$. Die allen Gliedern gemeinschaftliche Summe ist:

$$K.0{,}0p + A = 288750.$$

Wir theilen nun der Kürze wegen die Jahreszahlungen, Stand der Schuld, Grösse der getilgten Schuld und Tilgungssumme für die 5 ersten und 5 letzten Jahre und für das 10te, 15te, 20ste Jahr u. s. w. mit, woraus man den Gang der Tilgung überblicken kann.

3)

Jahr	Grösse der jährlichen Zahlungen	Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Tilgungssumme
1	288750	3675000	100000	100000
2	282750	3576000	199000	99000
3	276800	3478000	297000	98000
4	270900	3381000	394000	97000
5	265050	3285000	490000	96000
10	236550	2820000	955000	91000
15	209300	2280000	1495000	86000
20	183300	1965000	1810000	81000
25	158550	1575000	2200000	76000
30	135050	1210000	2565000	71000
35	112800	875000	2905000	66000
40	91800	555000	3220000	61000
45	72050	265000	3510000	56000
46	68250	210000	3565000	55000
47	64500	156000	3619000	54000
48	60800	103000	3672000	53000
49	57150	51000	3724000	52000
50	53550		3775000	51000

Sämmtliche Jahreszahlungen nehmen ab, wie man sieht. Die letzte ist die kleinste und mit ihr ist das Kapital getilgt. Untersucht man die Richtigkeit des vorstehenden Tilgungsplans nach der Gleichung No. 11) §. 37., so ist für das 46ste Jahr:

$$4)\qquad L_{46} = S_{45}.0{,}05 + T_{46} = 265000.0{,}05 + 55000$$
$$= 13250 + 55000 = 68250,$$

wie in No. 3) angegeben ist, denn $T_{46} = 100000 - 45.1000 = 55000$.

Nicht alle Kapitalien können durch die Werthe $A = 100000$ und $D = 1000$ nach dem vorstehenden Tilgungsplan getilgt werden. Der grösst mögliche Werth für K ergibt sich, wenn man nach No. 4) §. 37. den Werth für n und hieraus den fraglichen Werth für K nach No. 2) §. 37. bestimmt. Hiernach ist:

$$n = \frac{100000}{1000} + 0{,}05 = 100{,}5.$$

Setzt man nun $n = 100$, so wird:

$$K = 100.100000 - \frac{100.99}{1.2}.1000 = 5050000.$$

Dieselbe Summe findet man für $n = 101$. Setzt man aber $n = 100{,}5$, so ist:

$$K = \frac{201.100000}{2} - \frac{201.199}{4.1.2}.1000 = 5050125.$$

Alle Kapitalwerthe, welche in dieser Grenze eingeschlossen sind, werden nach dem Tilgungsplan No. 1) §. 37. behandelt werden können, während höhere Summen eine Restschuld am Ende der Tilgungszeit geben werden, die sich dem Plane nicht unterordnen wird. Den gleichen Werth erhält man auch aus dem zu No. 13) §. 37. mitgetheilten Ausdruck:

$$K = \frac{(2A + D)^2}{8.D} = \frac{201000^2}{8000} = \frac{40401000}{8} = 5050125.$$

Untersucht man endlich die Fälle, welche sich aus No. 12) §. 37. für ganze n ableiten, so gibt es deren 201. Führt man diese in No. 2) §. 37. ein, so erhält man eben so viele Zahlenwerthe für K, unter denen der eben angegebene höchste Werth entsteht. So auch bei jedem andern Werthe für A, D und n.

§. 39.

Tilgungsplan bei Kapitalabtragungen, die in einer geometrischen Progression zunehmen.

Steigen die Kapitalabtragungen A_1, A_2, A_3, ... A_n, wodurch

eine Anleihe K getilgt wird, in einem stetigen Verhältniss, das gewöhnlich durch einen Procentsatz w ausgedrückt wird, so dass die Abtragssummen nach dem Maassstabe $1{,}0w$ wachsen, so ergibt sich für dieselbe bei jährlicher Tilgung folgende Zusammenstellung:

$$1)\quad A_1 = A,\quad A_2 = A.1{,}0w,\quad A_3 = A.1{,}0w^2,\quad A_4 = A.1{,}0w^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = A.1{,}0w^{n-1}.$$

Die Tilgungssumme des $r$ten Jahres, die durch T_r wie bisher bezeichnet werden soll, beträgt daher:

$$2)\qquad T_r = A.1{,}0w^{r-1}.$$

Zählt man hiezu die Tilgungssummen der vorhergehenden Jahre, so erhält man die Grösse der am Ende des $r$ten oder Anfang des folgenden $(r+1)$ten Jahres getilgten Schuld:

$$3)\qquad G_r = A + A.1{,}0w + A.1{,}0w^2 + \ldots.\ A.1{,}0w^{r-1}$$
$$= A.\frac{1{,}0w^r - 1}{0{,}0w}.$$

Das zu tilgende Kapital unterliegt dann folgender Bedingung:

$$4)\qquad K = A + A.1{,}0w + A.1{,}0w^2 + \ldots.\ A.1{,}0w^{n-1}$$
$$= A.\frac{1{,}0w^n - 1}{0{,}0w}.$$

Geschieht nun die Verzinsung und Tilgung jährlich und wird die Anleihe zu p Procent verzinst, so ergibt sich aus No. 2) §. 31. folgender Tilgungsplan, wenn die entsprechenden Werthe für $A_1, A_2, A_3, \ldots. A_n$ eingeführt und die zugehörigen Werthe aus No. 3) berücksichtigt werden, indem man statt r allmälig die Werthe $0, 1, 2, \ldots. n$ schreibt:

$$5)\qquad L_1 = A + K.0{,}0p,$$

$$L_2 = A.1{,}0w + K.0{,}0p - A.\frac{1{,}0w - 1}{0{,}0w}.0{,}0p,$$

$$L_3 = A.1{,}0w^2 + K.0{,}0p - A.\frac{1{,}0w^2 - 1}{0{,}0w}.0{,}0p,$$

$$L_4 = A.1{,}0w^3 + K.0{,}0p - A.\frac{1{,}0w^3 - 1}{0{,}0w}.0{,}0p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L_r = A.1{,}0w^{r-1} + K.0{,}0p - A.\frac{1{,}0w^{r-1} - 1}{0{,}0w}.0{,}0p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L_n = A.1{,}0w^{n-1} + K.0{,}0p - A.\frac{1{,}0w^{n-1} - 1}{0{,}0w}.0{,}0p.$$

Der Stand der Schuld bestimmt sich aus der Gleichung No. 3) für das Ende des $r$ten oder den Anfang des $(r+1)$ten Jahres durch:

6) $$S_r = K - A.\frac{1,0w^r - 1}{0,0w};$$

das Kapital ist getilgt, wenn $S_r = 0$ wird. Nennt man die Zahl der Jahre, nach deren Umlauf diess geschieht, n, so hat man:

7) $$K = A.\frac{1,0w^n - 1}{0,0w},$$

was mit No. 4) zusammenfällt. Die Zeit, wann diess geschieht, bestimmt sich durch die Gleichung

8) $$\frac{1,0w^n - 1}{0,0w} = \frac{K}{A}$$

direct aus den Tafeln, wie diess S. 298 u. ff. meiner Anleitung angegeben ist, oder man kann n aus No. 8) entwickeln, dann ist:

9) $$n = \frac{\log(K.0,0w + A) - \log A}{\log 1,0w}.$$

Da die Zahlungs-Leistung eines jeden Jahres aus der Tilgungssumme (T_r) dieses Jahres und den Zinsen der vorhandenen Schuld besteht, so lassen sich die Jahresleistungen oder der Tilgungsplan aus folgender Gleichung ableiten:

10) $$L_r = S_{r-1}.0,0p + A.1,0w^{r-1}.$$

Vergleicht man die Zahlungssummen zweier auf einander folgenden Jahre, des $r$ten und $(r+1)$ten, mit einander, so erhält man:

$$L_r - L_{r+1} = A.1,0w^{r-1} + K.0,0p - A.\frac{0,0p}{0,0w}1,0w^{r-1} + \frac{A.0,0p}{0,0w}$$

$$- A.1,0w^r - K.0,0p + A.\frac{0,0p}{0,0w}1,0w^r - \frac{A.0,0p}{0,0w}$$

$$= A.1,0w^{r-1}(1-1,0w) - \frac{A.0,0p}{0,0w}1,0w^{r-1}(1-1,0w),$$

und hieraus, da $1 - 1,0w = -0,0w$ im zweiten Gliede wegfällt,

11) $$L_r - L_{r+1} = A.1,0w^{r-1}(0,0p - 0,0w).$$

Hierin kann $0,0p$ kleiner, grösser oder so gross als $0,0w$ sein. Im ersten Falle ist $L_{r+1} > L_r$, im zweiten ist $L_{r+1} < L_r$, im dritten Falle ist $L_r = L_{r+1}$. Diess führt zu folgenden Sätzen:

12) **Wachsen die jährlichen Kapitalabtragungen, wodurch eine Anleihe getilgt wird, in grösserm Verhältnisse, als der Zinsfuss, worin dieselbe verzinst wird, angibt ($w > p$), so nehmen die Jahresleistungen von Jahr zu Jahr zu.**

13) **Wachsen die jährlichen Kapitalabtragungen in kleinerm Verhältniss, als der Zinsfuss angibt ($w < p$), so nehmen die Jahresleistungen, die zur Tilgung und Verzinsung erforderlich sind, von Jahr zu Jahr ab.**

14) **Wachsen die jährlichen Kapitalabtragungen in demselben Verhältnisse, wie der Zinsfuss angibt ($w = p$), so sind die sämmtlichen Jahresleistungen einander gleich und die Tilgung sammt Verzinsung wird durch gleiche jährliche Summen bewirkt.**

In allen drei Fällen bilden die Tilgungssummen die Glieder einer geometrischen Reihe und nehmen zu, die Verzinsungssummen nehmen ab. In den beiden ersten Fällen ist die Zahlungsleistung des letzten Jahres, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, die grösste oder kleinste von allen. Ein Maximum oder Minimum findet nicht statt.

Geschieht die Verzinsung halbjährlich und die Tilgung jährlich, so bleiben die in No. 1) — 4), 6) — 9) aufgestellten Gleichungen unmittelbar in Kraft, der Tilgungsplan stellt sich aber nach No. 3) §. 31. in folgender Weise fest:

$$
15) \quad \begin{aligned}
L_1 &= K.0,0p_1, \\
L_2 &= K.0,0p_1 + A, \\
L_3 &= K.0,0p_1 \qquad\qquad\quad - A.\frac{1,0w-1}{0,0w}.0,0p_1, \\
L_4 &= K.0,0p_1 + A.1,0w \quad - A.\frac{1,0w-1}{0,0w}.0,0p_1, \\
L_5 &= K.0,0p_1 \qquad\qquad\quad - A.\frac{1,0w^2-1}{0,0w}.0,0p_1, \\
L_6 &= K.0,0p_1 + A.1,0w^2 \quad - A.\frac{1,0w^2-1}{0,0w}.0,0p_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_{2r-1} &= K.0,0p_1 \qquad\qquad\quad - A.\frac{1,0w^{r-1}-1}{0,0w}.0,0p_1, \\
L_{2r} &= K.0,0p_1 + A.1,0w^{r-1} - A.\frac{1,0w^{r-1}-1}{0,0w}.0,0p_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Dieser Tilgungsplan wird später weitere Anwendung finden. Um ihn zur Benutzung bequemer zu machen, ist es sachgemäss, die Glieder auf der rechten Seite zu vervollständigen. Dadurch kommt eine bessere Harmonie in die Reihen. Zählt man zu dem Ende $\frac{A.0,0p_1}{0,0w}$ in den zwei ersten Gliedern ab und zu, so entsteht:

16)

$$
\begin{aligned}
L_1 &= K.0,0p_1 - \frac{A.0,0p_1}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
L_2 &= K.0,0p_1 + A - \frac{A.0,0p_1}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
L_3 &= K.0,0p_1 - \frac{A.0,0p_1.1,0w}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
L_4 &= K.0,0p_1 + A.1,0w - \frac{A.0,0p_1.1,0w}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
L_5 &= K.0,0p_1 - \frac{A.0,0p_1.1,0w^2}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
L_6 &= K.0,0p_1 + A.1,0w^2 - \frac{A.0,0p_1.1,0w^2}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
L_7 &= K.0,0p_1 - \frac{A.0,0p_1.1,0w^3}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
L_8 &= K.0,0p_1 + A.1,0w^3 - \frac{A.0,0p_1.1,0w^3}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L_{2n-1} &= K.0,0p_1 - \frac{A.0,0p_1.1,0w^{n-1}}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w},\\
L_{2n} &= K.0,0p_1 + A.1,0w^{n-1} - \frac{A.0,0p_1.1,0w^{n-1}}{0,0w} + \frac{A.0,0p_1}{0,0w}.
\end{aligned}
$$

Die Zahlungssummen der ungeraden Halbjahre sind von denen der geraden verschieden und unterliegen einem andern Gesetze.

Vergleicht man die Summen, welche in je zwei auf einander folgenden ungeraden Halbjahren zu zahlen sind, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
L_{2r-1} - L_{2r+1} = K.0,0p_1 &- \frac{A.1,0w^{r-1}}{0,0w}.0,0p_1 + \frac{A.0,0p_1}{0,0w}\\
&- K.0,0p_1 + \frac{A.1,0w^r}{0,0w}.0,0p_1 - \frac{A.0,0p_1}{0,0w},
\end{aligned}
$$

und hieraus:

$$
17)\quad L_{2r-1} - L_{2r+1} = \frac{A.0,0p_1}{0,0w}(1,0w^r - 1,0w^{r-1}) = A.1,0w^{r-1}.0,0p_1.
$$

Die Zahlungssummen je zweier auf einander folgenden ungeraden Halbjahre nehmen ab und zwar um den Halbjahreszins von der Summe des vorhergehenden Jahres. Sämmtliche Summen der ungeraden Halbjahre sind daher im Abnehmen begriffen.

Vergleicht man die Summen je zweier auf einander folgenden geraden Halbjahre mit einander, so ist:

$$L_{2r} - L_{2r+2} = K.0{,}0p_1 + A.1{,}0w^{r-1} - \frac{A.1{,}0w^{r-1}.0{,}0p_1}{0{,}0w} + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}$$

$$- K.0{,}0p_1 - A.1{,}0w^r + \frac{A.1{,}0w^r.0{,}0p_1}{0{,}0w} - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}$$

$$= A.1{,}0w^{r-1}(1-1{,}0w) - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}.1{,}0w^{r-1}(1-1{,}0w),$$

und hieraus:

$$18)\qquad L_{2r} - L_{2r+2} = A.1{,}0w^{r-1}(0{,}0p_1 - 0{,}0w).$$

Die Zahlungssummen aller auf einander folgenden geraden Halbjahre wachsen oder fallen stetig, je nachdem w grösser oder kleiner als p_1 (der halbjährliche Zinsfuss) ist, nach dem Gesetze, welches in No. 12) und 13) angegeben ist.

Nach diesem Tilgungsplan zahlt der Empfänger im Laufe der Zeit bei halbjährlicher Verzinsung und jährlicher Tilgung in Summe gerade so viel, als er nach No. 5) bei jährlicher Verzinsung und Tilgung zu zahlen hat.

Die Zahlungsleistungen der verschiedenen Halbjahre lassen sich auch auf folgende Weise bestimmen:

$$19)\qquad L_{2r-1} = S_{2r-2}.0{,}0p_1,$$

$$L_{2r} = S_{2r-2}.0{,}0p_1 + T_r = S_{2r-2}.0{,}0p_1 + A.1{,}0w^{r-1},$$

$$20)\qquad S_{2r-2} = K - A.\frac{1{,}0w^{r-1}-1}{0{,}0w}.$$

Geschieht die Verzinsung und Tilgung halbjährlich und behält man den Procentsatz w, um welchen die halbjährlichen Tilgungssummen steigen, bei, so bleiben, da w jeden Werth bedeuten kann, die Gleichungen, welche oben bei jährlicher Tilgung und Verzinsung aufgestellt wurden, mit der Beschränkung in Kraft, dass sie sich auf halbe Jahre statt auf ganze Jahre beziehen, und dass dann die Tilgungszeit $2n$ Halbjahre umfasst.

Der Tilgungsplan ist dann folgender:

21)

$$L_1 = K.0{,}0p_1 + A,$$

$$L_2 = K.0{,}0p_1 + A.1{,}0w - A.\frac{1{,}0w-1}{0{,}0w}.0{,}0p_1,$$

$$L_3 = K.0{,}0p_1 + A.1{,}0w^2 - A.\frac{1{,}0w^2-1}{0{,}0w}.0{,}0p_1,$$

$$L_4 = K.0{,}0p_1 + A.1{,}0w^3 - A.\frac{1{,}0w^3-1}{0{,}0w}.0{,}0p_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$L_{2n-1} = K.0{,}0p_1 + A.1{,}0w^{2n-2} - A.\frac{1{,}0w^{2n-2}-1}{0{,}0w}.0{,}0p_1,$$

$$L_{2n} = K.0{,}0p_1 + A.1{,}0w^{2n-1} - A.\frac{1{,}0w^{2n-1}-1}{0{,}0w}.0{,}0p_1.$$

Die Grösse des Kapitals unterliegt folgender Bestimmung:

22) $$K = A.\frac{1{,}0w^{2n}-1}{0{,}0w}.$$

Der Stand der Schuld am Ende des $r$ten Halbjahres ist:

23) $$S_r = K - A.\frac{1{,}0w^r-1}{0{,}0w}$$

u. s. w. Die Tilgungszeit bestimmt sich dann aus den Tafeln durch

24) $$\frac{1{,}0w^{2n}-1}{0{,}0w} = \frac{K}{A}$$

oder durch

25) $$n = \frac{\log(K.0{,}0w + A) - \log A}{2.\log 1{,}0w}.$$

Die Zahlungsleistung des $r$ten Halbjahres lässt sich auch auf folgende Weise finden:

26) $$L_r = S_{r-1}.0{,}0p_1 + A.1{,}0w^{r-1}.$$

Führt die Tilgungszeit nicht auf ein ganzes Jahr, was in der Regel der Fall sein wird, so ist es am Besten, die Restschuld für das letzte Jahr oder Halbjahr zu bestimmen und hieraus die Zahlungsleistung für das folgende Jahr oder Halbjahr zu berechnen.

§. 40.

Anwendungen.

Die im vorigen Paragraphen aufgefundenen Sätze sollen nun

an einzelnen Fällen verdeutlicht werden, besonders auch aus dem Grunde, weil sie im praktischen Leben, wie man später sehen wird, viele Anwendung finden.

1) Eine Anleihe von 4000000 soll mit 4 Procent jährlich verzinst und so getilgt werden, dass die Tilgungssumme des ersten Jahres 200000 beträgt und jährlich um 6 Procent steigt. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan? In wie viel Jahren ist die Schuld getilgt?

Bei Beantwortung des vorliegenden Falles kommt No. 5) §. 39. zur Anwendung und man hat hier $K = 4000000$, $A = 200000$, $w = 6$, $p = 4$, $K.0{,}0p = 4000000 . 0{,}04 = 160000$ zu setzen.

Die Zeit, innerhalb welcher die Anleihe getilgt wird, ergibt sich nach No. 8) §. 39.:

$$\frac{1{,}06^n - 1}{0{,}06} = \frac{4000000}{200000} = 20$$

aus den Tafeln. Sie fällt ungefähr in die Mitte zwischen das 13te und 14te Jahr. Aus No. 9) §. 39. findet man, da $K.0{,}06 = 240000$ ist:

$$2)\quad n = \frac{\log 440000 - \log 200000}{\log 1{,}06} = \frac{5{,}6434527 - 5{,}3010300}{0{,}0253059}$$

$$= \frac{0{,}3424227}{0{,}0253059} = 13{,}534 \ldots .$$

Die Tilgungszeit umfasst also 13 ganze Jahre. Für das Ende dieses Jahres wird dann die Restschuld zu bestimmen und am zweckmässigsten am Ende des 14ten Jahres zu zahlen sein. Zur Feststellung des Tilgungsplans sind folgende Elemente erforderlich. Die Tilgungssummen der einzelnen Jahre folgen aus No. 2) §. 39.:

$$3)\quad T_r = 200000 . 1{,}06^{r-1};$$

die Grösse der getilgten Schuld aus No. 3):

$$4)\quad G_r = 200000 . \frac{1{,}06^r - 1}{0{,}06};$$

der Stand der Schuld aus No. 6):

$$5)\quad S_r = 4000000 - 200000 . \frac{1{,}06^r - 1}{0{,}06};$$

die Zahlungssummen berechnen sich dann entweder aus No. 5) oder aus der Gleichung No. 10):

6) $$L_r = S_{r-1}.0{,}04 + T_r = S_{r-1}.0{,}04 + 200000.1{,}06^{r-1}.$$

Hieraus leitet sich folgender Tilgungsplan ab:

7)

Jahr	Grösse der jährlichen Zahlungen	Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Jährliche Tilgungssumme	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden
1	360000	3800000	200000	200000
2	364000	3588000	212000	412000
3	368240	3363280	224720	636720
4	372734,4	3125076,8	238203,2	874923,2
5	377498,46	2872581,41	252495,39	1127418,59
6	382548,37	2604936,29	267645,12	1395063,70
7	387901,27	2321232,47	283703,82	1678767,53
8	393575,35	2020506,42	300726,05	1979493,58
9	399589,87	1701736,80	318769,62	2298263,19
10	405965,26	1363841,01	337895,79	2636158,98
11	412723,18	1005671,47	358169,54	2994328,52
12	419886,57	626011,76	379659,71	3373988,23
13	427479,76	223572,47	402439,29	3776427,53
14	232515,36		223572,47	4000000

Die Jahresleistungen wachsen stetig, wie diess sein muss, da $w > p$. Die letzte Summe macht hievon eine Ausnahme, da sie nur die Restschuld sammt Zinsen enthält. Die Richtigkeit der gegebenen Werthe lässt sich leicht aus der Gleichung 6) nachweisen. So ist die Summe, welche am Ende des 9ten Jahres gezahlt werden muss:

$$S_9 = S_8.0{,}04 + T_9 = 2020506{,}42.0{,}04 + 318769{,}62$$
$$= 80820{,}25\ldots + 318769{,}62 = 399589{,}87.$$

Geschieht in dem oben unter No. 1) gegebenen Falle die Verzinsung halbjährlich und die Tilgung jährlich, so hat man die halbjährlichen Zahlungssummen festzustellen. Die übrigen Elemente im Tilgungsplan ändern sich nicht. Man hat dann entweder nach No. 15) oder No. 16) §. 39. zu verfahren oder die Gleichungen

8) $$L_{2r-1} = S_{2r-2}.0{,}0p_1\,,$$
$$L_{2r} = S_{2r-2}.0{,}0p_1 + 200000.1{,}06^{r-1}$$

zu benutzen. Es ergibt sich dann folgender Tilgungsplan, der sich auf 28 Halbjahre erstreckt:

9)

Halbjahr.	Grösse der halbjährlichen Zahlungen.	Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Jährliche Tilgungssumme	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden
1	80000			
2	280000	3800000	200000	200000
3	76000			
4	288000	3588000	212000	412000
5	71760			
6	296480	3363280	224720	636720
7	67265,6			
8	305468,8	3125076,8	238203,2	874923,2
9	62501,54			
10	314996,93	2872581,41	252495,39	1127418,59
11	57451,63			
12	325096,74	2604936,29	267645,12	1395063,70
13	52098,73			
14	335802,55	2321232,47	283703,82	1678767,53
15	46424,65			
16	347150,70	2020506,42	300726,05	1979493,58
17	40410,13			
18	359179,74	1701736,80	318769,62	2298263,19
19	34034,74			
20	371930,53	1363841,01	337895,79	2636158,98
21	27276,82			
22	385446,36	1005671,47	358169,54	2994328,52
23	20113,43			
24	399773,14	626011,76	379659,71	3373988,23
25	12520,24			
26	414959,52	223572,47	402439,29	3776427,53
27	4471,45			
28	228043,92		223572,47	4000000

Die Zahlungssummen der ungeraden Halbjahre fallen, die der geraden steigen stetig, mit Ausnahme der letzten, wie diess nach No. 17) und No. 18) §. 39. sein muss. Im Ganzen wird nach diesem Tilgungsplane dieselbe Summe gezahlt, welche nach dem in No. 7) bei jährlicher Verzinsung zu entrichten ist, denn die beiden Halbjahreszahlungen eines bestimmten Jahres sind so gross, als die Jahreszahlung desselben Jahres in No. 7).

§. 41.

Fortsetzung.

1) Eine Anleihe von 4000000 soll zu 4 Procent verzinst und halbjährlich so getilgt werden, dass im ersten

Halbjahre 100000 zurückgezahlt werden und diese Summe halbjährlich um 3 Procent steigt. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan? Wann ist die Anleihe getilgt?

Bei Beantwortung dieser Frage kommen die Gleichungen No. 21) u. ff. §. 39. zur Anwendung. Man hat dann $K = 4000000$, $p_1 = 2$, $w = 3$, $A = 100000$ zu setzen.

Die Tilgungszeit bestimmt sich aus der Gleichung No. 24):

$$\frac{1,03^{2n'}-1}{0,03} = \frac{4000000}{100000} = 40$$

und fällt nach den Tafeln zwischen das 26ste und 27ste Halbjahr oder zwischen das 13te und 14te Jahr. Nach No. 25) bestimmt sie sich zu

$$2)\qquad n = \frac{\log 220000 - \log 100000}{2.\log 1,03} = \frac{0,3424227}{2.0,0128372} = 13,344$$

Jahre, was übereinstimmt.

Die Tilgungssummen berechnen sich nach No. 2) §. 39.:

$$3)\qquad T_r = 100000.1,03^{r-1};$$

der Stand der Schuld aus No. 23):

$$4)\qquad S_r = 4000000 - 100000.\frac{1,03^r-1}{0,03};$$

die Grösse der getilgten Schuld nach No. 3):

$$5)\qquad G_r = 100000.\frac{1,03^r-1}{0,03};$$

die Zahlungssummen der Halbjahre aus No. 21) oder aus No. 26):

$$6)\qquad L_r = S_{r-1}.0,02 + 100000.1,03^{r-1}.$$

Hieraus ergibt sich folgender Tilgungsplan:

7)

Halbjahr	Grösse der halbjährlichen Zahlungen	Stand der Schuld zu Ende des Halbjahrs od. Anfang des folgenden	Halbjährl. Tilgungssumme	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Halbjahrs oder Anfang des folgenden
1	180000	3900000	100000	100000
2	181000	3797000	103000	203000
3	182030	3690910	106090	309090
4	183090,9	3581637,3	109272,7	418362,7
5	184183,63	3469086,42	112550,88	530913,58
6	185309,14	3353159,01	115927,41	646840,99
7	186468,41	3233753,78	119405,23	766246,22
8	187662,46	3110766,40	122987,39	889233,60
9	188892,34	2984089,39	126677,01	1015910,61
10	190159,11	2853612,07	130477,32	1146387,93
11	191463,88	2719220,43	134391,64	1280779,57
12	192807,80	2580797,04	138423,39	1419202,96
13	194192,03	2438220,96	142576,09	1561779,04
14	195617,79	2291367,58	146853,37	1708632,42
15	197086,32	2140108,61	151258,97	1859891,39
16	198598,91	1984311,70	155796,74	2015688,13
17	200156,88	1823841,23	160470,64	2176158,77
18	201761,53	1658556,46	165284,76	2341443,54
19	203414,44	1488313,16	170243,31	2511686,84
20	205116,87	1312962,55	175350,60	2687037,45
21	206870,37	1132351,43	180611,12	2867648,57
22	208676,49	946321,97	186029,46	3053678,03
23	210536,78	754711,63	191610,34	3245288,37
24	212452,88	557352,98	197358,65	3442647,02
25	214426,47	354073,57	203279,41	3645926,43
26	216459,26	144695,77	209377,79	3855304,23
27	147589,69		144695,77	4000000

Vergleicht man nun die Summen, welche die Tilgung und Verzinsung eines Kapitals von 4000000 erfordert, wenn die Verzinsung und Tilgung jährlich geschieht, mit denen, welche erfordert werden, wenn die Verzinsung und Tilgung halbjährlich (also mit dem halben Zinsfusse und der halben Tilgungssumme im ersten Halbjahre) vor sich geht, so ist im ersten Falle im Ganzen die Summe 5304658,56 und im zweiten Falle für die Tilgung der gleichen Schuld nur 5245024,37 nöthig, und es stellt sich ein Minderbedarf von 59634,19 heraus. Diese Bemerkung bestätigt das schon früher Gesagte. Die halbjährliche Tilgung und Verzinsung empfiehlt sich daher vor der ganzjährigen Verzinsung und Tilgung,

denn sie ist vortheilhafter als jene. Dasselbe ist der Fall bei halbjährlicher Verzinsung und jährlicher Tilgung, denn sie erfordert die gleichen Summen wie die ganzjährige Verzinsung und Tilgung.

8) **Eine Anleihe von 4000000 soll mit 4 Procent verzinst und so getilgt werden, dass im ersten Jahre 200000 zurückgezahlt werden und diese Tilgungssumme jährlich um 4 Procent steigt. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan für die 5 ersten und letzten Jahre und für die zwischenliegenden Zeiträume von 5 zu 5 Jahren? Wann ist das Kapital getilgt?**

Da hier No. 5) §. 39. sammt den zugehörigen Gleichungen in Anwendung kommt, so hat man dort $K = 4000000$, $A = 200000$, $w = 4$, $p = 4$ zu setzen. Bei Bestimmung der Zeit genügt es, wie man sieht, sie den Tafeln zu entnehmen, denn eine ganz genaue Feststellung derselben hat keinen besondern Zweck. Sollte sie aber dennoch im speciellen Falle nöthig werden, so kann man sie auf die angegebene Weise durch Logarithmen bestimmen. Die Tilgungszeit fällt nach No. 8) §. 39.,

$$9)\quad \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} = \frac{4000000}{200000} = 20,$$

zwischen das 14te und 15te Jahr, ganz nahe an letzteres. Hiernach ergibt sich folgender Tilgungsplan:

10)

Jahr	Grösse der jährlichen Zahlungen	Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden	Jährliche Tilgungssumme.	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden
1	360000	3800000	200000	200000
2	360000	3592000	208000	408000
3	360000	3375000	216320	624320
4	360000	3150707,2	224972,8	849292,8
5	360000	2916735,49	233971,71	1083264,51
10	360000	1598778,58	284662,36	2401221,42
11	360000	1302729,72	296048,85	2697270,28
12	360000	994838,91	307890,81	3005161,09
13	360000	674632,47	320206,44	3325367,53
14	360000	341617,77	333014,70	3658382,23
15	355282,48		341617,77	4000000

Die Richtigkeit dieser Resultate zeigt sich, wenn man aus den Elementen des Tilgungsplanes die Zahlung eines bestimmten Jahres berechnet, so ist die des fünften Jahres:

$$L_5 = S_4 . 0{,}04 + T_5 = 3150707{,}2 . 0{,}04 + 233971{,}71$$
$$= 126028{,}28 + 233971{,}71 = 359999{,}99 \ldots.$$

11) Eine Anleihe von 4000000 soll zu 4 Procent halbjährlich verzinst und so getilgt werden, dass im ersten Halbjahre 100000 zurückgezahlt und diese Tilgungssumme halbjährlich um 2 Procent steigt. Welches ist der bezügliche Tilgungsplan in den fünf ersten und letzten Jahren und in den zwischenliegenden Zeiträumen von je fünf Jahren? Wann ist die Anleihe getilgt?

Hier kommt No. 21) §. 39. mit den zugehörigen Gleichungen zur Anwendung und man hat sofort $K = 4000000$, $A = 100000$, $w = 2$, $p_1 = 2$ zu setzen. Die Tilgungszeit fällt nach No. 24) §. 39.:

$$12) \qquad \frac{1{,}02^n - 1}{0{,}02} = \frac{4000000}{100000} = 40$$

zwischen das 29ste und 30ste Halbjahr. Der Tilgungsplan stellt sich in folgender Weise fest:

13)

Halbjahr.	Grösse der halbjährlichen Zahlungen	Stand der Schuld am Ende des Halbjahres oder Anfang des folgenden	Halbjährl. Tilgungssumme	Grösse der getilgten Schuld am Ende des Halbjahres oder Anfang des folgenden
1	180000	3900000	100000	100000
2	180000	3798000	102000	202000
3	180000	3693960	104040	306040
4	180000	3587839,2	106120,8	412160,8
5	180000	3479595,99	108243,22	520404,01
10	180000	2908027,90	119509,26	1091972,10
15	180000	2270658,31	131947,88	1729341,69
20	180000	1570263,02	145681,12	2429736,98
25	180000	796970,03	160843,73	3203029,97
26	180000	632909,43	164060,60	3367090,57
27	180000	465567,62	167341,81	3534432,38
28	180000	294878,97	170688,65	3705121,03
29	180000	120776,55	174102,42	3879223,45
30	123192,08		120776,55	4000000

Die Richtigkeit dieser Angaben weist sich leicht nach. So ist die im 5ten Halbjahre zu zahlende Summe:

$$L_5 = S_4 . 0{,}02 + T_5 = 3587839{,}2 . 0{,}02 + 108243{,}22$$
$$= 71756{,}78 + 108243{,}22 = 180000.$$

Nach den in No. 10) und No. 13) aufgestellten Tilgungsplänen wird die Anleihe durch gleiche Zahlungssummen getilgt. Diess muss nach dem in No. 14) §. 39. aufgestellten Gesetze eintreten, da die Tilgungssummen in demselben Maassstabe wachsen, in dem die Anleihe verzinst wird. Die letzte Summe macht hievon eine Ausnahme, weil sie nur die Restschuld sammt Zinsen angibt.

Vergleicht man die Gesammtsummen, welche nach beiden Tilgungsplänen zur Tilgung und Verzinsung aufgewendet werden müssen, so ist im ersten Falle die Summe von 5395282,48, im zweiten Falle nur 5343192,08 erforderlich, und es erweist sich, wie in frühern Fällen, die letzte Tilgungsweise um 52090,4 vortheilhafter. Dieser Vortheil wird durch die letzte Zahlungssumme bedingt und fällt daher in eine spätere Zeit. Bringt man den Werth dieses Vortheils auf die Gegenwart zurück, so ist der baare Werth hiefür:

$$V = \frac{52090{,}4}{1{,}02^{30}} = 52090{,}4 . 0{,}5520709 = 28757{,}59$$

also nicht unerheblich. Bei Staats-Anleihen von viel höhern Beträgen dürfte wohl ein solcher Vortheil nicht zu übersehen sein.

§. 42.

Ermittelung des Kapitalwerthes, wenn ein bestimmter Tilgungsplan gegeben ist.

In den bisherigen Untersuchungen wurde das zu tilgende Kapital, die Tilgungssumme und der Zinsfuss, als bekannt vorausgesetzt und daraus der zugehörige Tilgungsplan abgeleitet. Ist aber das zu tilgende Kapital nicht gegeben, sondern die einzelnen Zahlungsleistungen, Zinsfuss und Zeit, so stellt sich die Frage umgekehrt und man hat hieraus das Kapital und die Tilgungssummen zu entwickeln. Sie ergeben sich aus den im ersten Kapitel aufgestellten Grundsätzen.

Die Fälle, welche sofort eintreten können, sind jedoch einfach. Die Jahresleistungen stehen nämlich unter einander in kei-

nem Zusammenhange, oder sie nehmen nach bestimmtem Gesetze zu oder ab, oder bleiben sich gleich, wie diess aus §. 31—41. hervorgeht.

Bezeichnet man nun im ersten Falle die Jahresleistungen wie bisher durch L_1, L_2, L_3, ... L_n, so hat man zur Bestimmung des zu tilgenden Kapitals bei dem Zinsfuss p:

$$1)\quad K=\frac{L_1}{1,0p}+\frac{L_2}{1,0p^2}+\frac{L_3}{1,0p^3}+\ldots\frac{L_n}{1,0p^n}.$$

Ist der Werth für K gefunden, so ergeben sich aus No. 2) §. 31. die Werthe für A_1, A_2, A_3, ... A_n durch einfache Umstellung, und man erhält dann:

$$2)\quad A_1=L_1-K.0,0p,$$

$$A_2=L_2-K.0,0p+A_1.0,0p,$$

$$A_3=L_3-K.0,0p+A_1.0,0p+A_2.0,0p,$$

$$A_4=L_4-K.0,0p+A_1.0,0p+A_2.0,0p+A_3.0,0p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n=L_n-K.0,0p+A_1.0,0p+A_2.0,0p+\ldots A_{n-1}.0,0p.$$

Diese Auflösungsmethode bestimmt die Werthe der A successive, indem jede folgende Tilgungssumme erst gefunden werden kann, wenn die vorhergehenden bekannt sind, und ist zurücklaufend. Sie führt, wie man sieht, zu dem gewünschten Ziele.

Dieselben Bemerkungen gelten, wenn die Verzinsung halbjährlich und die Tilgung jährlich, oder wenn beides halbjährlich geschieht, No. 3) und No. 4) §. 31., was leicht durchzuführen ist. Aus der in No. 2) gegebenen zurücklaufenden Auflösungsweise lässt sich eine directe ableiten, wenn man die Werthe der frühern A in die spätern Glieder einführt und ordnet. Hiedurch erhält man:

$$3)\quad A_2=L_2-K.0,0p+L_1.0,0p-K.0,0p.0,0p$$
$$=L_2+L_1.0,0p-K.1,0p.0,0p,$$

$$A_3=L_3+L_1.0,0p+L_2.0,0p+L_1.0,0p.0,0p-K.0,0p-K.0,0p.0,0p$$
$$-K.1,0p.0,0p-0,0p$$
$$=L_3+L_2.0,0p+L_1.1,0p.0,0p-K.1,0p.0,0p-K.1,0p.0,0p.0,0p,$$

und hieraus durch Vereinigung der zwei letzten Glieder:

$$4)\quad A_3=L_3+L_2.0,0p+L_1.1,0p.0,0p-K.1,0p^2.0,0p.$$

Ferner erhält man, wenn die Glieder nach den Stellenzahlen geordnet werden:

$$
\begin{aligned}
A_4 = L_4 \\
+L_3.0{,}0p+L_2.0{,}0p.0{,}0p+L_1.1{,}0p.0{,}0p.0{,}0p-K.1{,}0p^2.0{,}0p.0{,}0p \\
L_2.0{,}0p \quad +L_1.0{,}0p.0{,}0p \quad -K.1{,}0p.0{,}0p.0{,}0p \\
+L_1.0{,}0p \quad -K.0{,}0p.0{,}0p \\
-K.0{,}0p.
\end{aligned}
$$

Nun ist:

$$L_2.0{,}0p(1+0{,}0p)=L_2.1{,}0p.0{,}0p,$$

$$L_1.0{,}0p.0{,}0p(1+1{,}0p)+L_1.0{,}0p=L_1.0{,}0p.0{,}0p.\frac{1{,}0p^2-1}{0{,}0p}+L_1.0{,}0p$$
$$=L_1.0{,}0p.1{,}0p^2$$

$$-K.0{,}0p.0{,}0p(1+1{,}0p+1{,}0p^2)-K.0{,}0p$$

$$=-K.0{,}0p.\frac{1{,}0p^3-1}{0{,}0p}.0{,}0p-K.0{,}0p=K.1{,}0p^3.0{,}0p,$$

daher entsteht:

$$5)\quad A_4=L_4+L_3.0{,}0p+L_2.1{,}0p.0{,}0p+L_1.1{,}0p^2.0{,}0p$$
$$-K.1{,}0p^3.0{,}0p.$$

Führt man den Calcul auf diese Weise fort, so ergibt sich folgendes Gesetz:

6)

$$A_n=L_n+L_{n-1}.0{,}0p+L_{n-2}.1{,}0p.0{,}0p+L_{n-3}.1{,}0p^2.0{,}0p\ldots$$
$$\ldots.+L_2.1{,}0p^{n-3}.0{,}0p+L_1.1{,}0p^{n-2}.0{,}0p-K.1{,}0p^{n-1}.0{,}0p,$$

wornach die Werthe der A direct aus den L gefunden werden können, wenn K nach No. 1) bestimmt ist.

Benutzt man diese Darstellungen, so lassen sich hieraus noch weitere Folgerungen ziehen: da nämlich:

$$K=A_1+A_2+A_3\ldots.A_n$$

ist, denn sämmtliche Tilgungssummen kommen dem dargeliehenen Kapitale gleich, so hat man aus No. 2)—6):

7)

$$
\begin{aligned}
K=A_1&=L_1-K.0{,}0p \\
A_2&=L_2+L_1.0{,}0p-K.1{,}0p.0{,}0p \\
A_3&=L_3+L_2.0{,}0p+L_1.1{,}0p.0{,}0p-K.1{,}0p^2.0{,}0p \\
A_4&=L_4+L_3.0{,}0p+L_2.1{,}0p.0{,}0p+L_1.1{,}0p^2.0{,}0p \\
&\quad -K.1{,}0p^3.0{,}0p \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n&=L_n+L_{n-1}.0{,}0p+L_{n-2}.1{,}0p.0{,}0p\ldots.L_1.1{,}0p^{n-2}.0{,}0p \\
&\quad -K.1{,}0p^{n-1}.0{,}0p.
\end{aligned}
$$

Ordnet man diese Darstellung gleichfalls nach den Stellenzahlen der L, so erhält man:

$$8)\quad K = L_1 + L_1.0{,}0p(1 + 1{,}0p + 1{,}0p^2 + \ldots.\ 1{,}0p^{n-2})$$
$$L_2 + L_2.0{,}0p(1 + 1{,}0p + 1{,}0p^2 + \ldots.\ 1{,}0p^{n-3})$$
$$L_3 + L_3.0{,}0p(1 + 1{,}0p + 1{,}0p^2 + \ldots.\ 1{,}0p^{n-4})$$
$$L_4 + L_4.0{,}0p(1 + 1{,}0p + 1{,}0p^2 + \ldots.\ 1{,}0p^{n-5})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_{n-2} + L_{n-2}.0{,}0p(1 + 1{,}0p)$$
$$L_{n-1} + L_{n-1}.0{,}0p + L_n$$
$$- K.0{,}0p.(1 + 1{,}0p + 1{,}0p^2 + \ldots.\ 1{,}0p^{n-1}).$$

Sämmtliche Reihen lassen sich in folgender Weise behandeln:

$$9)\quad L_r + L_r.0{,}0p(1 + 1{,}0p + 1{,}0p^2 + \ldots.\ 1{,}0p^{n-r-1})$$
$$= L_r + L_r.0{,}0p\,\frac{1{,}0p^{n-r} - 1}{0{,}0p} = L_r.1{,}0p^{n-r}.$$

Durch Einführung dieser Werthe geht die Darstellung No. 8) in folgende über:

$$K = L_1.1{,}0p^{n-1} + L_2.1{,}0p^{n-2} + L_3.1{,}0p^{n-3} + \ldots.\ L_{n-1}.1{,}0p + L_n$$
$$- K.1{,}0p^n + K$$

oder

$$10)\quad K.1{,}0p^n = L_1.1{,}0p^{n-1} + L_2.1{,}0p^{n-2} + \ldots.L_{n-1}.1{,}0p + L_n,$$

und hieraus:

$$11)\quad K = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \ldots.\ \frac{L_n}{1{,}0p^n}.$$

Die in No. 10) und No. 11) erhaltenen Gleichungen sind ein dritter Beweis für die in §. 3. und §. 6. aufgestellten Lehrsätze.

Das Gesagte lässt sich leicht auf halbjährliche Verzinsung und jährliche Tilgung, so wie auf halbjährliche Verzinsung und Tilgung anwenden und gilt auch von diesen.

§. 43.

Ermittelung des Kapitalwerthes, wenn die Summen des Tilgungsplanes um gleichviel zu- oder abnehmen und wenn sie gleich sind.

Nehmen die Zahlungsleistungen des Tilgungsplanes um eine

bestimmte Summe D zu oder ab, so dass $L_1 = L$, $L_2 = L \pm D$, $L_3 = L \pm 2D, \ldots\ldots L_n = L \pm (n-1)D$, so ergibt sich zur Ermittelung des Kapitalwerthes K bei dem Zinsfuss p, der Tilgungszeit n und bei jährlicher Verzinsung und Tilgung nach No. 1) §. 42.:

$$1)\qquad K = \frac{L}{1{,}0p} + \frac{L+D}{1{,}0p^2} + \frac{L+2D}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{L+(n-1)D}{1{,}0p^n},$$

wenn man vorerst das positive Zeichen berücksichtigt. Diese Darstellung zerlegt sich in folgende zwei Reihen:

$$2)\qquad K = \frac{L}{1{,}0p} + \frac{L}{1{,}0p^2} + \frac{L}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{L_n}{1{,}0p}$$

$$+ \frac{D}{1{,}0p^2} + \frac{2D}{1{,}0p^3} + \frac{3D}{1{,}0p^4} + \ldots\ldots \frac{(n-1)D}{1{,}0p^n}.$$

Zerlegt man die zweite Reihe nach den Vorzahlen von D in besondere Reihen, so zerfällt sie in folgende, für sich summirbare:

$$\frac{D}{1{,}0p^2} + \frac{D}{1{,}0p^3} + \frac{D}{1{,}0p^4} + \ldots\ldots \frac{D}{1{,}0p^n} = D.\frac{1{,}0p^{-1} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

$$\frac{D}{1{,}0p^3} + \frac{D}{1{,}0p^4} + \frac{D}{1{,}0p^5} + \ldots\ldots \frac{D}{1{,}0p^n} = D.\frac{1{,}0p^{-2} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

$$\frac{D}{1{,}0p^4} + \frac{D}{1{,}0p^5} + \frac{D}{1{,}0p^6} + \ldots\ldots \frac{D}{1{,}0p^n} = D.\frac{1{,}0p^{-3} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

. . . .

$$\frac{D}{1{,}0p^{n-1}} + \frac{D}{1{,}0p^n} = D.\frac{1{,}0p^{-(n-2)} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

$$+ \frac{D}{1{,}0p} = D.\frac{1{,}0p^{-(n-1)} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

$$+ 0 \quad = D.\frac{1{,}0p^{-n} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

Hier ist das letzte Glied zugefügt, um die Reihen zu vervollständigen. Aus dieser Darstellung erhält man nun:

$$3)\qquad \frac{D}{1{,}0p^2} + \frac{2D}{1{,}0p^3} + \frac{3D}{1{,}0p^4} + \ldots\ldots \frac{(n-1)D}{1{,}0p^n}$$

$$= \frac{D}{0{,}0p}\left(\frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \frac{1}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{1}{1{,}0p^n}\right) - \frac{nD}{0{,}0p.1{,}0p^n}$$

$$= \frac{D}{0{,}0p}.\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} - \frac{nD}{0{,}0p.1{,}0p^n},$$

und hieraus durch Einführung in No. 2), nachdem die erste Reihe selbst summirt ist,

$$K = L.\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} + \frac{D}{0{,}0p}.\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} - \frac{nD}{0{,}0p.1{,}0p^n}$$

oder

$$4)\qquad K=(L+\frac{D}{0,0p})\frac{1-1,0p^{-n}}{0,0p}-\frac{nD}{0,0p\,.\,1,0p^{n}}.$$

Nehmen die Zahlungsleistungen ab, so ist hieraus:

$$5)\qquad K=(L-\frac{D}{0,0p})\frac{1-1,0p^{-n}}{0,0p}+\frac{nD}{0,0p\,.\,1,0p^{n}}.$$

Werden die Zahlungen halbjährlich gemacht, so bleiben die vorstehenden Entwicklungen in Kraft und erstrecken sich auf $2n$ Halbjahre. Die vorstehenden Gleichungen gehen dann in folgende über:

$$6)\qquad K=(L+\frac{D}{0,0p_1})\frac{1-1,0p_1{}^{-2n}}{0,0p_1}-\frac{2nD}{0,0p_1\,.\,1,0p_1{}^{2n}},$$

$$7)\qquad K=(L-\frac{D}{0,0p_1})\frac{1-1,0p_1{}^{-2n}}{0,0p_1}+\frac{2nD}{0,0p_1\,.\,1,0p_1{}^{2n}}.$$

Ist K gefunden, so entwickeln sich dann die bezüglichen Tilgungssummen A_1, A_2, A_3, ... A_n nach No. 2) oder No. 7) §. 42., wenn die erforderlichen Werthe eingeführt werden.

Sind aber die fälligen Summen einander gleich, so bestimmt sich das zu tilgende Kapital bei jährlicher und halbjährlicher Verzinsung und Tilgung wie bekannt durch:

$$8)\qquad K=L.\frac{1-1,0p^{-n}}{0,0p},$$

$$9)\qquad K=L.\frac{1-1,0p_1{}^{-2n}}{0,0p_1}.$$

Die Tilgungssummen ergeben sich aus No. 2) §. 42. auf folgende Weise:

$$A_1=L-K.0,0p,$$

$$A_2=L-K.0,0p+A.0,0p=A_1+A_1.1,0p=A_1.1,0p,$$

$$A_3=L-K.0,0p+A_1.0,0p+A_2.0,0p=A_1+A_1.0,0p+A_1.1,0p.0,0p$$

$$=A_1+A_1.0,0p(1+1,0p)=A_1+A_1.0,0p.\frac{1,0p^2-1}{0,0p}=A_1.1,0p^2,$$

$$A_4=L-K.0,0p+A_1.0,0p+A_2.0,0p+A_3.0,0p$$

$$=A_1+A_1.0,0p+A_1.1,0p.0,0p+A_1.1,0p^2.0,0p$$

$$=A_1+A_1.0,0p(1+1,0p+1,0p^2)=A_1+A_1.\frac{1,0p^3-1}{0,0p}=A_1.1,0p^3,$$

u. s. w. Die Fortsetzung dieser Schlüsse führt auf folgendes Gesetz:

$$10)\qquad A_r=A_1.1,0p^{r-1}.$$

A_1 aber bestimmt sich direct nach 8) auf folgende Weise:

$$A_1 = L - K.0{,}0p = L - L\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.0{,}0p,$$

11) $$A_1 = \frac{L}{1{,}0p^n},$$

folglich auch in Rücksicht auf No. 10):

12) $$A_r = \frac{L}{1{,}0p^{n-r+1}}.$$

Diese Gleichungen gelten auch für halbjährliche Verzinsung und Tilgung, wenn man Halbjahre statt Jahre setzt.

Hieraus rechtfertigt sich folgender Satz:

13) Wird eine Anleihe durch gleiche Summen (Zins und Tilgungssumme einbegriffen) zurückgezahlt, so wachsen die Tilgungssummen nach den Gesetzen einer geometrischen Progression, deren Exponent mit dem Verzinsungs-Maassstab zusammenfällt. Die Tilgungssumme des ersten Jahres kann man direct aus No. 11) bestimmen und den Tilgungsplan aus zwei Elementen ableiten.

Dieser Satz ist die Kehrseite des in §. 39. No. 14) aufgestellten.

§. 44.

Anwendungen.

1) Eine Anleihe wird in 40 Jahren bei 5 Procent so getilgt, dass im ersten Jahre 600000 und in jedem folgenden 10000 weniger gezahlt werden. Welches ist der Werth dieser Anleihe? Welches ist der bezügliche Tilgungsplan?

Hier kommen die in §. 43. aufgefundenen Gleichungen zur Anwendung. Aus No. 5) ermittelt sich die Grösse der Anleihe: Setzt man dort $L = 600000$, $D = 10000$, $p = 5$, $n = 40$, so erhält man:

2) $$K = \left(600000 - \frac{10000}{0{,}05}\right)\frac{1-1{,}05^{-40}}{0{,}05} + \frac{40.10000}{0{,}05.1{,}05^{40}}$$
$$= (600000 - 200000)\,17{,}1590864 + 8000000.0{,}1420457$$
$$= 6863634{,}54 + 1136365{,}45 = 7999999{,}99 = 8000000.$$

Die Tilgungssummen erhält man aus No. 2) §. 42.:

3) $$A_1 = L_1 - K.0{,}0p = 600000 - 8000000.0{,}05$$
$$= 600000 - 400000 = 200000,$$

$$A_2 = L_2 - K.0{,}0p + A_1.0{,}0p = 590000 - 8000000.0{,}05 + 200000.0{,}05$$
$$= 590000 - 400000 + 10000 = 200000 \quad \text{u. s. w.}$$

Man bemerkt, dass der Satz No. 3) §. 32. eintritt, wornach die Summe, um welche die jährlichen Zahlungen abnehmen, dem Zinsbetrage von der Tilgungssumme des ersten Jahres gleichkommt, denn es ist:

4) $$D = 200000 . 0{,}05 = 10000.$$

Die Tilgung der Schuld wird daher durch gleiche Summen bewirkt und der Tilgungsplan lässt sich nun leicht feststellen.

5) Eine Anleihe wird bei 5 Procent durch die jährliche Summe von 432194,237 in 30 Jahren getilgt. Wie gross ist die Anleihe? Welches ist der bezügliche Tilgungsplan?

Der Werth der Anleihe bestimmt sich nach No. 8) §. 43. und ist:

$$K = 432194{,}23 . \frac{1 - 1{,}05^{-30}}{0{,}05} = 432194{,}23 . 15{,}3724510$$

$$\begin{aligned} \lg 432194{,}2 &= 5{,}6356789 \\ \lg 15{,}374251 &= \underline{1{,}1867431} \\ & 6{,}8224220 \end{aligned}$$

6) $$K = \mathrm{N}. 6{,}8224220 = 6643884.$$

Die Grösse der Tilgungssumme des ersten Jahres ist nach No. 11) §. 43:

7) $$A_1 = \frac{432194{,}23}{1{,}05^{30}} = \frac{432194{,}23}{4{,}3219423} = 100000.$$

Die Richtigkeit dieses Werths erweist sich aus No. 2) §. 42. Hiernach ist:

$$\begin{aligned} A_1 &= L_1 - K . 0{,}0p = 432194{,}23 - 6643884 . 0{,}05 \\ &= 432194{,}23 - 332194{,}2 = 100000. \end{aligned}$$

Da nun nach No. 13) §. 43. die Tilgungssummen dieser Anleihe nach dem Gesetze einer geometrischen Progression steigen, so ist:

8) $$A_r = 100000 . 1{,}05^{r-1}.$$

Man kann nun hieraus den bezüglichen Tilgungsplan leicht nach den Gleichungen des §. 39. feststellen. So ist z. B. die Zahlungsleistung des fünften Jahres:

$$L_5 = S_4 . 0{,}05 + A_5 = S_4 . 0{,}05 + 100000 . 1{,}05^4,$$

$$\begin{aligned} S_4 &= K - A . \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} = 6643884 - 100000 . 5{,}52563125 \\ &= 6643884 - 552563{,}125 = 6091321{,}875, \end{aligned}$$

also

$$L_5 = 6091321{,}8 . 0{,}05 + 127628{,}1 = 304566{,}09 + 127628{,}1 = 432194{,}2,$$

wie diess sein muss.

XXVIII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Grösse des den Grundflächen einer abgestumpften Pyramide parallelen Schnitts, welcher die Pyramide nach einem gegebenen Verhältnisse in zwei Theile theilt.

Die kleinere und grössere Grundfläche der abgestumpften Pyramide seien respective f und F, die Höhe der Pyramide sei h; das Verhältniss, nach welchem die Pyramide zu theilen ist, sei $n:N$; die Fläche des zu bestimmenden Schnittes sei G.

Bezeichnen wir die Entfernung der Grundfläche f von der Spitze der ganzen Pyramide durch x, so ist bekanntlich:

$$f:F=x^2:(h+x)^2,\quad \sqrt{f}:\sqrt{F}=x:h+x;$$

also:

$$\sqrt{f}:\sqrt{F}-\sqrt{f}=x:h,\quad x=\frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}.$$

Die Höhe der abgestumpften Pyramide mit den Grundflächen f und G sei u, so ist ganz eben so:

$$f:G=x^2:(u+x)^2,\quad \sqrt{f}:\sqrt{G}=x:u+x;$$

also:

$$\sqrt{f}:\sqrt{G}-\sqrt{f}=x:u,\quad u=x\frac{\sqrt{G}-\sqrt{f}}{\sqrt{f}};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$u=h\frac{\sqrt{G}-\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}.$$

Der Inhalt der gegebenen abgestumpften Pyramide mit den Grundflächen f und F und der Höhe h ist:

$$\tfrac{1}{3}h(f+\sqrt{fF}+F);$$

der Inhalt der abgestumpften Pyramide mit den Grundflächen f und G und der Höhe u ist:

$$\tfrac{1}{3}u(f+\sqrt{fG}+G);$$

also ist nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$u(f+\sqrt{fG}+G):h(f+\sqrt{fF}+F)=n:n+N,$$

und folglich, wenn man den obigen Ausdruck von u einführt:

$$(\sqrt{G}-\sqrt{f})(f+\sqrt{fG}+G):(\sqrt{F}-\sqrt{f})(f+\sqrt{fF}+F)$$
$$=(\sqrt{G}-\sqrt{f})(G+\sqrt{Gf}+f):(\sqrt{F}-\sqrt{f})(F+\sqrt{Ff}+f)$$
$$=n:n+N;$$

also, wenn man die Multiplicationen in den beiden ersten Gliedern dieser Proportion ausführt:

$$G\sqrt{G}-f\sqrt{f}:F\sqrt{F}-f\sqrt{f}=n:n+N,$$

woraus leicht $G\sqrt{G}=\frac{nF\sqrt{F}+Nf\sqrt{f}}{n+N}$ erhalten wird, oder

$$G^{\frac{3}{2}}=\frac{nF^{\frac{3}{2}}+Nf^{\frac{3}{2}}}{n+N},\quad G=\left(\frac{nF^{\frac{3}{2}}+Nf^{\frac{3}{2}}}{n+N}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ich theile diese Formel, die wahrscheinlich längst bekannt ist, aber doch in der ihr hier gegebenen Form wenigstens nicht so allgemein bekannt zu sein scheint, als sie verdient, in ganz anspruchsloser Weise zu häufigerer Benutzung bei dem stereometrischen Elementar-Unterrichte mit. Es ist ja mit eine Aufgabe des Archivs, auch nur weniger Bekanntes im Interesse des Elementar-Unterrichts von Neuem in Erinnerung zu bringen.

Will man die gegebene abgestumpfte Pyramide durch ihren Grundflächen parallele Ebenen in n gleiche Theile theilen, und bezeichnet die Flächen der Theilungsebenen oder Theilungsschnitte durch G_1, G_2, G_3, ... G_{n-1}; so muss man zu deren Bestimmung in der obigen Formel nach der Reihe

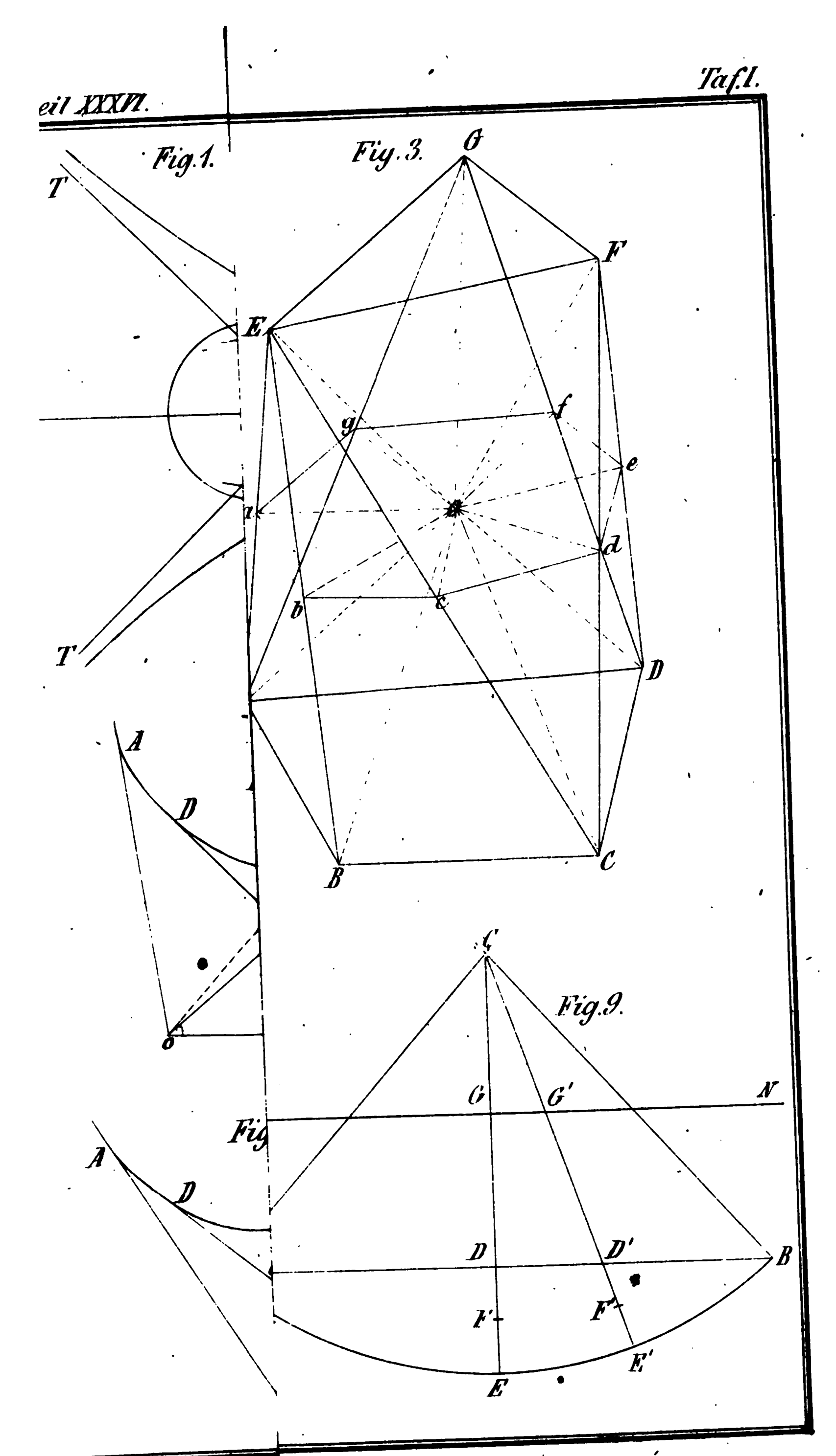
$$n=1,\ N=n-1;\quad n=2,\ N=n-2;\quad n=3,\ N=n-3;$$
u. s. w.
$$n=n-1,\ N=1$$

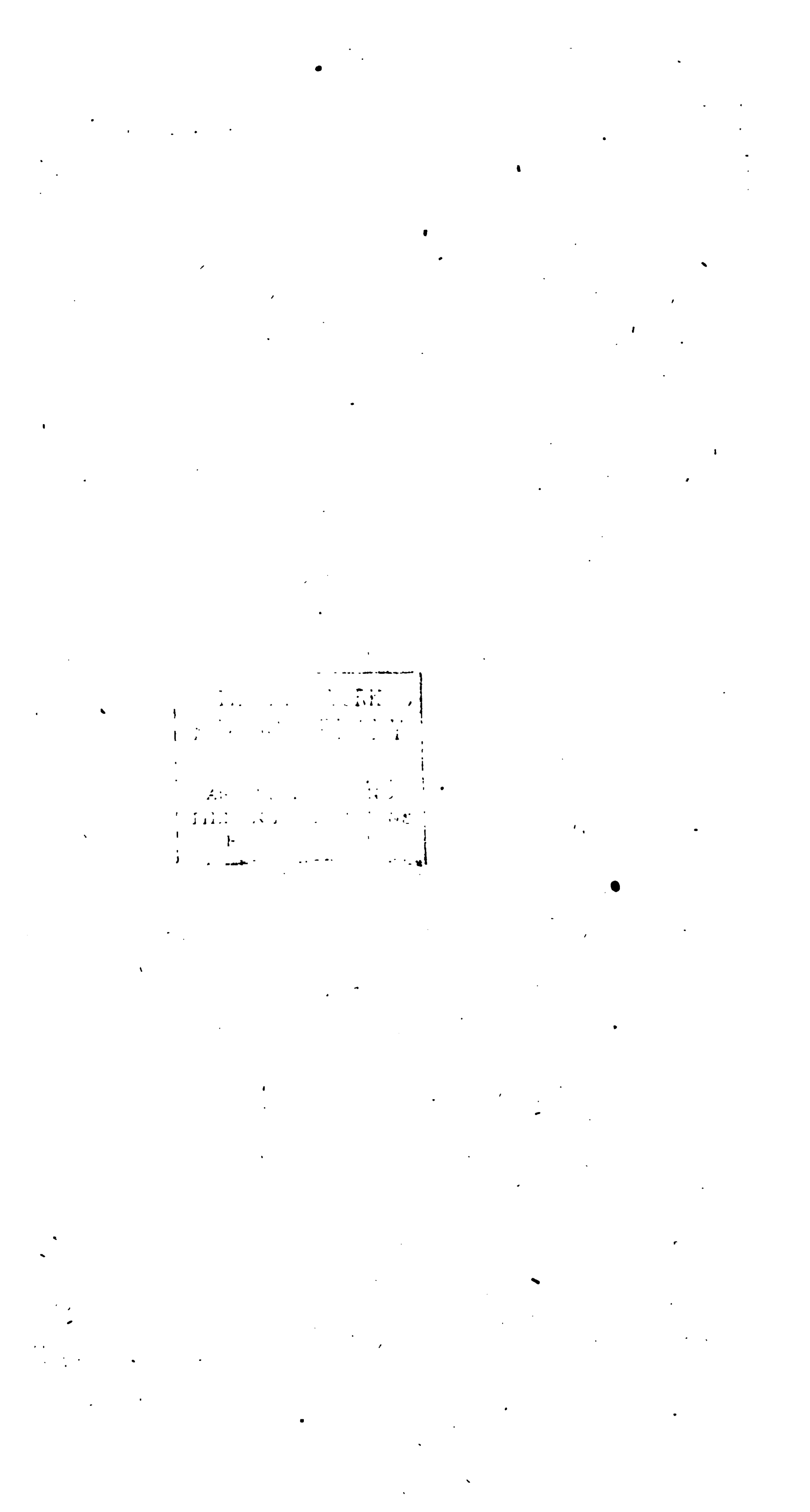
setzen, und erhält auf diese Weise:

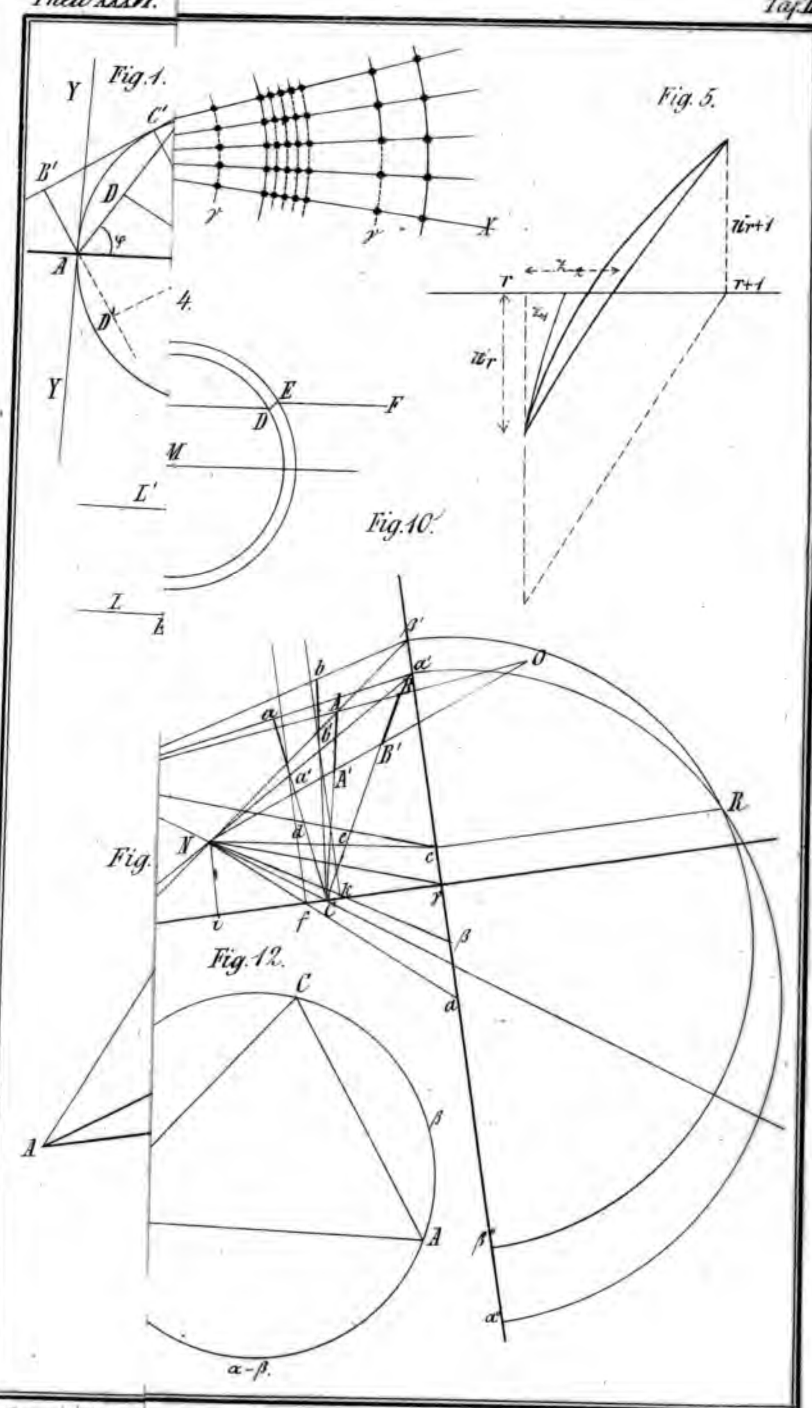
$$G_1=\left\{\frac{1.F^{\frac{3}{2}}+(n-1).f^{\frac{3}{2}}}{n}\right\}^{\frac{2}{3}},\quad G_2=\left\{\frac{2.F^{\frac{3}{2}}+(n-2).f^{\frac{3}{2}}}{n}\right\}^{\frac{2}{3}},$$

$$G_3=\left\{\frac{3.F^{\frac{3}{2}}+(n-3).f^{\frac{3}{2}}}{n}\right\}^{\frac{2}{3}},\ \text{u. s. w.},\ G_{n-1}=\left\{\frac{(n-1).F^{\frac{3}{2}}+1.f^{\frac{3}{2}}}{n}\right\}^{\frac{2}{3}}.$$

Ich bemerke hier gelegentlich, dass, wenigstens dem Wesentlichen nach, Begriff, Benennung und Berechnung des „Obelisken" sich schon in der „Niederen und höheren Stereometrie u. s. w., besonders für Forstmänner, Baukünstler und Techniker bearbeitet von Wilhelm Hossfeld, Herzogl. Sächs. Mein. Forstkommissar, Lehrer an der Forstakademie und Sekretair der Forstsocietät zu Dreyssigacker. Leipzig. 1812. 4°. §. 54. S. 95. u. s. w." finden. G.


Fig.1.
T
E
T'
A
D
o
A
D
Fig
Fig.3.
G
F
E
f
g
e
a
d
b
c
D
B
C
C
Fig.9.
G
G'
N
D
D'
B
F
F'
E
E'




Fig. 1.
Y
C'
B'
D
φ
A
D'
4.
Y
y
y
X
Fig. 5.
u_{r+1}
r
x
r+1
z_1
u_r
E
F
D
M
L'
L
Fig. 10.
O
R
N
Fig.
c
r
β
a
Fig. 12.
C
β
A
A
α-β.

Literarischer Bericht
CXLI.

Anzeige.

Die Unterzeichneten sind in dem Besitz einiger Exemplare von **Abel, N.,** Oeuvres complètes avec de notes et développements rédigées par B. Holmboe. 2 tomes. Christiania. 1839. 4. die sie zu 10 Thlr. Pr. Cour. ablassen.

Berlin, December 1860.

S. Calvary & Comp.
Mittel-Strasse 61.

Es wird gewiss Jeder, der noch nicht im Besitz der Werke des grossen norwegischen Mathematikers ist, die ihm hier gebotene Gelegenheit, dieselben sich zu einem mässigen Preise zu verschaffen, unbenutzt lassen. Grunert.

Unterrichtswesen.

Gütigst mitgetheilt worden ist uns das:

Adressbuch der Grossherzoglich Badischen Polytechnischen Schule in Karlsruhe. Studienjahr 1860—61.

an welches wir, für die Mittheilung verbindlichst dankend, absichtlich einige Betrachtungen knüpfen, wenn auch solche Adressbücher jetzt nichts Ungewöhnliches sind, und von den meisten grösseren Lehranstalten in Deutschland, namentlich auch von allen Universitäten, ausgegeben werden.

Die polytechnische Schule in Karlsruhe zählt in dem oben genannten Studienjahre 840 Schüler, unter denen sich 484, also

weit über die Hälfte, Nichtbadener befinden, nämlich 128 Nichtbadener mehr als Badener. Sehen wir von Deutschland ab, so befinden sich unter diesen Nichtbadenern 145 aus Amerika, Brasilien, den Donaufürstenthümern, England, Frankreich, Holland, Java, Italien, Norwegen, Polen, Russland, der Schweiz, Ungarn. Liegt in diesen Zahlen nicht der klarste Beweis für die nicht mehr abzuweisende Nothwendigkeit solcher Lehranstalten für unsere Zeit? und muss nicht Deutschland der Badischen Regierung den wärmsten Dank zollen, dass sie eine, eines solchen Rufes bis weit über den Ocean hinaus sich erfreuende Lehranstalt dieser Art errichtet hat und unablässig ihrer Vollkommenheit näher zu führen und immer noch grossartiger, als schon jetzt, auszustatten bemüht ist!

Die grösste Anzahl der Nichtbadener überhaupt bilden die Preussen, nämlich 103, folglich wahrlich einen sehr grossen Bruchtheil der Ausländer überhaupt; weil

$$103 \times 4,7 = 484,1$$

ist, weit mehr als ein Viertheil. Liegt hierin nicht eine lebhafte Aufforderung für das engere Vaterland des Unterzeichneten, mit der Errichtung einer ähnlichen Lehranstalt nicht länger zu zögern? Muss der Vaterlandsfreund nicht den Städten Cöln und Aachen sich zu dem lebhaftesten Danke verpflichtet fühlen, dass dieselben schon längere Zeit wegen der Errichtung einer polytechnischen Schule petitioniren? Möchte es wahr sein, dass, wie wenigstens die Zeitungen berichten, die Errichtung in Aachen beschlossen sein soll! Möge man dann nur aber auch die Mittel nicht sparen!

Zu besonderem Danke würden wir uns verpflichtet fühlen, wenn andere grössere polytechnische Lehranstalten, wie z. B. das polytechnische Institut in Wien, welches wir aus eigener Anschauung kennen, und andere, unsere schon im Literar. Ber. Nr. CXXXIX. S. 2. ausgesprochene Bitte um ähnliche Mittheilungen, wie die obige, erfüllen wollten. Grunert.

Arithmetik.

Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel des Qudranten von 10 zu 10 Secunden, nebst einer Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile von Dr. Ludwig Schrön, Director der Sternwarte und Professor zu Jena. Ste-

reotyp-Ausgabe. Braunschweig. F. Vieweg und Sohn. 1860. gr. 8.

Zu der Herausgabe der vorliegenden Tafeln bewogen, — nach der Vorrede, — verschiedene Rücksichten. Sie sollen nämlich:

1) die schriftlichen Hülfsrechnungen bei der Interpolation entbehrlich machen;

2) dabei eine grössere Genauigkeit gewähren, als andere Tafeln von ähnlichem Umfange;

3) zugleich einen verschiedenen Gebrauch nach Gewohnheit und Bedürfniss zulassen;

4) auch für Rechnungen mit sechsstelligen Logarithmen ein bequemeres und schärferes Hülfsmittel darbieten als dies die gewöhnlichen sechsstelligen Logarithmen vermögen;

5) durch ihre Ausstattung dem Auge angenehm und wohlthuend sich erweisen und

6) durch die vier verschiedenen Ausgaben einfachere Zwecke mit geringerem Aufwande befriedigen.

Der Kundige erkennt auf den ersten Blick, wie sehr durch die Erfüllung der vorhergehenden Bedingungen allen den Anforderungen genügt und entsprochen wird, welche man in jetziger Zeit an Logarithmentafeln zu stellen gewohnt ist. Welche Einrichtungen der einsichtsvolle Herr Herausgeber aber getroffen hat, um allen diesen Erfordernissen zu genügen, kann natürlich an diesem Orte nicht ausführlich dargethan, und muss in dem Werke selbst weiter nachgesehen werden. Frägt man uns aber nach unserem Urtheil, ob den in Rede stehenden Anforderungen in diesen Tafeln auch wirklich entsprochen worden sei, so beantworten wir diese Frage mit Ja! und fügen hinzu, dass diese Einrichtungen keineswegs in Weitläufigkeiten führen, sondern uns überall im Ganzen einfach und zweckmässig erschienen sind, wobei ausserdem noch hervorgehoben werden mag, dass die Interpolationstafel Nr. III. diesen Tafeln vorzugsweise eigenthümlich ist.

Was nun die äussere Ausstattung betrifft, so übertreffen nach unserer Meinung in Bezug auf Papier, Druck und Zweckmässigkeit des Formats diese Tafeln die meisten bisher in Deutschland erschienenen Tafeln, so verdienstlich auch viele derselben — namentlich die in allen Beziehungen trefflichen Arbeiten von Bremiker —sind, wie wir bei unseren früheren Anzeigen solcher Tafeln überall, wo es uns das Verdienst zu fordern schien, gebührend und mit wärmster Anerkennung hervorzuheben uns bemühet haben. Ganz besonders dem Auge wohlthuend erscheinen uns in diesen

neuen Tafeln die äusserst schön und scharf geschnittenen Ziffern, welche sich in ihrer Form am meisten den Ziffern in den berühmten und höchst seltenen, eben deshalb viel gesuchten, auf ganz unverwüstlichem Papier gedruckten Tables of Logarithms. By William Gardiner. London. 1742. 4°., die wir bei dieser Anzeige zur Vergleichung vor uns liegen haben, nähern dürften. Ueberhaupt können sich diese neuen Tafeln rücksichtlich ihrer äusseren Ausstattung den besten Productionen der englischen und französischen Presse dieser Art nicht bloss unbedingt an die Seite stellen, sondern übertreffen dieselben selbst noch in vielen Beziehungen, so dass die Officin der Herren F. Vieweg und Sohn jedenfalls für dieses dem deutschen Vaterlande, dem Auslande gegenüber, so viel Ehre machende typographische Werk den wärmsten Dank jedes Vaterlandsfreundes verdient.

Der Preis von 1 Thaler 22½ Groschen für ein solches Werk ist so ausserordentlich niedrig gestellt, dass es uns in der That unbegreiflich ist, wie dafür die Herstellung möglich gewesen sein kann, namentlich gegenüber den hohen Preisen der englischen und französischen Tafeln von gleichem Umfange. Ausserdem kann auch Tafel I., Tafel I. und II., Tafel III. separat zu dem Preise von beziehungsweise 20 Groschen, 1 Thaler 7½ Groschen, 15 Groschen bezogen werden, was auch eine überaus zweckmässige, mit besonderem Danke aufzunehmende Einrichtung ist.

Endlich sind diese Tafeln auch auf meergrünem Papier gedruckt ganz zu den nämlichen Preisen zu erhalten. Da wir ein solches Exemplar nicht zu sehen Gelegenheit gehabt haben, so können wir ein Urtheil darüber nicht abgeben, zweifeln aber nicht an der Zweckmässigkeit eines solchen Papiers namentlich für schwache Augen. Sollte sich uns Gelegenheit darbieten, ein solches Exemplar zu Gesicht zu bekommen, so werden wir nicht unterlassen, darüber nachträglich zu berichten, da uns selbst viel daran liegt, diesen schönen Tafeln möglichst allgemeinen Eingang zu verschaffen. Die ziemlich theuren englischen Tafeln von Shortrede sind auch auf solches meergrüne Papier gedruckt, uns aber bis jetzt auch nicht aus eigener Ansicht genauer bekannt geworden.

Herausgeber und Verleger haben hier allen billigen Wünschen in ausgezeichneter Weise entsprochen, und ein Werk geliefert, welches der deutschen mathematischen Literatur wahrhaft Ehre macht; möge dasselbe daher die Anerkennung, welche es so sehr verdient, in vollstem Maasse finden, und sich recht bald namentlich auch den Weg in die Lehranstalten bahnen. Tragen die vor-

stehenden Worte dazu Einiges bei, so haben sie ihren Zweck erfüllt. Wir haben freilich jetzt schon eine ziemlich grosse Anzahl sehr schöner Logarithmen-Tafeln; indess sind die eigenthümlichen Vorzüge der vorliegenden wohl geeignet, denselben eine glückliche Zukunft zu versprechen.

Geometrie.

Das Prismatoid. Eine Erweiterung der elementaren Stereometrie von Theodor Wittstein, Professor an der k. Generalstabs-Akademie u. s. w. in Hannover. Hannover. Hahn. 1860. 4.

Durch die Einführung des Prismatoids, einer viele andere unter sich fassenden neuen Körperform, hat Herr Professor Wittstein sich jedenfalls ein Verdienst um die Stereometrie, namentlich auch um den Unterricht in derselben erworben, welches von Niemand lebhafter als von dem Unterzeichneten erkannt werden kann. Jedenfalls würden wir uns bemühen, auch durch Vermittelung des Archivs diesen neuen Körper in die Wissenschaft einzuführen, und schon hier die Leser näher mit demselben bekannt zu machen, wenn wir nicht so glücklich wären, einen von Herrn Professor Bretschneider in Gotha uns gütigst mitgetheilten Aufsatz über diesen Körper in dem vorliegenden Hefte (S. 18.) zur Kenntniss unserer Leser bringen zu können, welcher, bei eigenthümlicher Behandlung des Gegenstandes, allen vorher von uns näher bezeichneten Zwecken vollständig entspricht. Dabei bemerken wir aber ausdrücklich, dass die obige Schrift an sich keineswegs unbeachtet gelassen werden darf, wäre es auch nur wegen der interessanten Behandlung einer ziemlich grossen Anzahl anderer, auch krummflächiger Körper mittelst des Prismatoids. Wir wünschen sehr, dass dieser neue Körper recht bald die allgemeinste Aufnahme in die Lehrbücher der Stereometrie finden möge.

Abhandlung über die verschiedenen Projectionsarten im Allgemeinen und die axonometrischen und parallelperspectivischen im Besondern von Professor G. Delabar, Conrector der Kantonsschule in St. Gallen. Mit 4 Figurentafeln. St. Gallen. Scheitler und Zollikofer. 1860. 4.

Der Herr Verfassser hat in dieser namentlich von Lehrern

an Realschulen und ähnlichen Lehranstalten zu beachtenden Schrift, nach einer Charakterisirung der verschiedenen Projectionsarten im Allgemeinen, eine ausführliche und eingehende Theorie der Parallelperspective geliefert, und hat sich dabei weder einer rein geometrischen, noch rein analytischen, sondern im vorliegenden Falle ganz zweckmässig einer gemischten, algebraisch-geometrischen Methode bedient. Er erläutert zuerst wieder die Parallelperspective im Allgemeinen in Verbindung mit den allgemeinen wissenschaftlichen Grundlagen der zu entwickelnden ferneren Theorie, und theilt diese letztere dann in zwei Hauptabschnitte, nämlich:

A. Die orthographisch axonometrischen und parallelperspectivischen Projectionen im Allgemeinen;

B. Die klinographische Parallelperspective.

In A. werden abgesondert betrachtet:

α) Die orthographisch anisometrische Projection.

β) Die orthographisch monodimetrische Projection.

γ) Die orthographisch isometrische Projection.

Für diese drei Projectionsarten werden sowohl die allgemeinen Grundlagen sehr deutlich entwickelt, und dann wird ferner die Aufgabe noch mehr zu vereinfachen und dem Geiste der darstellenden Geometrie noch mehr anzupassen versucht, wobei hervorzuheben ist, dass die Verbindung, in welche die Theorie der Projectionen mit der descriptiven Geometrie in dieser Schrift gebracht wird, zu den besonderen Eigenthümlichkeiten derselben gehört.

Unter B. finden wir wieder:

α) Die klinographisch anisometrische Projectionsart.

β) Die klinographisch monodimetrische Projectionsart.

γ) Die klinographisch isometrische Projectionsart.

Der letzte Abschnitt C. hat die Erörterung der Frage zum Gegenstande, ob es nicht noch einen einfacheren Weg als die im Vorhergehenden betrachteten axonometrischen Projectionsarten zur Lösung der Aufgabe der Parallelperspective giebt.

Wir bedauern, dass die Beschränktheit des Raums uns gebietet, uns mit dieser Angabe des Hauptinhalts der vorliegenden, jedenfalls recht sehr beachtenswerthen Schrift zu begnügen. Die Entwickelung ist eine völlig methodische und die Schrift hat wenigstens uns auch dadurch besonders angesprochen, dass sie überall die Hauptgesichtspunkte, auf die es ankommt, deutlich

und bestimmt hervorhebt, so dass man nicht in Gefahr kommt, den Faden zu verlieren, wie dies bei einer weniger methodischen Behandlung, wie man sie in anderen Schriften von ähnlicher Tendenz nicht selten antrifft, bei diesen Dingen nur zu leicht möglich ist.

Wir empfehlen also diese Schrift den Lehrern an allen den Lehranstalten, wo die Schüler in den verschiedenen Methoden der graphischen Darstellung körperlicher Gegenstände auf einer Ebene unterrichtet und geübt werden, nochmals recht sehr zur Beachtung.

Die Stereotomie (Lehre vom Körperschnitte) enthaltend: Die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf die Schattenlehre, Linearperspective, Gnomonik, den Steinschnitt und die Holzverbindungen, mit einem Atlas von 74 Tafeln in gr. Folio, von Leroy, Professor an der polytechnischen Schule in Paris etc. Uebersetzt von Kauffmann, Professor am Gymnasium in Stuttgart. Neue Ausgabe, unter der Presse. In 6 Lieferungen. à $22^1/_2$ Sgr. Ad. Becher in Stuttgart.

Dieses Werk, von welchem in neuester Zeit eine zweite Ausgabe erschienen ist, wurde von dem Verfasser ausgearbeitet als eine praktische Fortsetzung seiner darstellenden Geometrie. Wenn die Anwendungen dieser Wissenschaft auf die Schattenlehre und Linearperspektive für höhere technische Schulanstalten beim Unterricht im technischen und Linearzeichnen vorzugsweise Werth haben, so eignet sich dagegen die Lehre vom Steinschnitt und von den Holzverbindungen mehr für diejenigen, welchen im Bau- oder Ingenieurfach die praktische Ausführung solcher Constructionen obliegt. Es ist in der That allgemein anerkannt und durch die Erfahrung bestätigt, dass auf die theoretischen Lehren, wie sie in einem Cursus über descriptive Geometrie gegeben werden, nicht leicht eine vortheilhaftere und mehr nutzbringende Anwendung folgen kann, als die Construktionen der Schattenlehre und Linearperspektive. Obiges Werk enthält in ersterer Beziehung als Beispiele mehrere Rotationskörper in Form von Vasen, einen jonischen Säulenfuss, ein dorisches Capitäl und verschiedene Schrauben. Die perspektivischen Zeichnungen umfassen die Kreisprojektionen, an welche sich wichtige Lehren der neueren Geometrie anknüpfen lassen, Zeichnungen von Gewölben, Säulengängen; hierauf folgt die mehr der Theorie angehörige perspektivische Zeichnung des Wulsts (tore); den Beschluss dieser Abtheilung

machen verschiedene Aufnahmen von Gegenständen, bei welchen die Schlagschatten angegeben sind: Vasen, Säulen und Säulengänge.

Einen grossen Reichthum von Beispielen zur Lehre vom Steinschnitt bietet die Stereotomie von Leroy dar, wie sie wohl nicht leicht ein ähnliches Werk von gleichem Umfang enthalten dürfte. Man findet darin eine Anzahl von Darstellungen schräger Ein- und Durchgänge bei cylindrischen, kugelförmigen, Tonnen-Gewölben, den Marseiller Bogen, elliptische, ellipsoidische Tonnen-, Kreuz- und Klostergewölbe, Kugel-, und Trompen-Gewölbe; kreisförmige Treppen, Spindeltreppen, Treppen mit Schraubengewölbe. Bei den Holzverbindungen sind viele Construktionen von Dachstühlen und hölzernen Treppen gegeben.

Wenn wir die Aufmerksamkeit von Lehrern und Schülern an polytechnischen Instituten, von Architekten, Ingenieuren auf dieses gediegene Werk lenken, so geschieht diess hauptsächlich darum, weil dasselbe sich noch keineswegs derjenigen Verbreitung in Deutschland erfreut, welche es verdient, und weil uns kein zweites deutsches Werk bekannt ist, welches wir als einen Ersatz dafür anführen könnten, und das bei gleichem Umfang und Preis denselben Gehalt und praktischen Werth hätte. Dr. Böklen.

Astronomie.

Grosse Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860. (M. s. Literar. Ber. Nr. CXL. S. 4.).

Die kaiserlich-russische Akademie der Wissenschaften in Petersburg, stets bemüht, die exacten Wissenschaften nach allen möglichen Seiten und Richtungen hin zu fördern, hatte zur Beobachtung der grossen Sonnfinsterniss vom 18. Juli 1860 eine Expedition nach Spanien gesandt, und konnte diese Mission in keine besseren Hände legen, als in die der beiden trefflichen Astronomen der Pulkowa'er Haupt-Sternwarte, der Herren Otto Struve und Dr. Winnecke. Der von dem Ersteren der kaiserlichen Akademie erstattete

> „Bericht über die Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom 6. (18.) Juli, von Otto Struve."

wenn derselbe auch für jetzt nur als ein vorläufiger zu betrachten ist, ist dessungeachtet so interessant und nach unserer Ueber-

zeugung so wichtig, dass er in diesen literarischen Berichten ausführlicher besprochen zu werden verdient.

Herr Otto Struve hatte mit dem Director der Sternwarte in Greenwich, Herrn Airy, die Uebereinkunft getroffen, die Finsterniss gemeinschaftlich zu beobachten, und täuscht sich gewiss nicht, wenn er der Meinung ist, dass dieses Uebereinkommen, wesentlich dazu beigetragen hat, das Interesse für diese Beobachtung zu beleben und die Mittel zur erfolgreichen Lösung der Aufgabe zu vermehren. Auf Airy's Antrag stellte demzufolge die brittische Admiralität mit grösster Liberalität einen der schönsten und grössten Dampfer, den Himalaya, zur Disposition der Sonnenfinsterniss-Expedition und autorisirte Herrn Airy, so vielen Astronomen und Liebhabern der Astronomie, als das Schiff bequem beherbergen könnte, Plätze auf demselben anzuweisen. Der 7. Juli war zum Abgang des Himalaya angesetzt und Abends zuvor hatten sich alle Theilnehmer mit ihren Instrumenten in Plymouth einzufinden. So bald die Anker gelichtet und Ruhe auf dem Schiffe eingetreten war, wurde unter Airy's Vorsitz in aller Form Astronomisches Conseil gehalten. Der Namensaufruf ergab **51 Beobachter** an Bord. Unter den Engländern befanden sich die allgemein bekannten und hochgeachteten Namen: Airy, Lassel, De la Rue, Grant, Capt. Jacob u. s. w. Von Ausländern waren an Bord: die beiden trefflichen russischen Astronomen O. Struve und Dr. Winnecke mit dem in Pulkowa sich ausbildenden portugiesischen Astronomen Oom und Professor Dr. Lindeloef aus Helsingfors; ferner die trefflichen schwedischen und norwegischen Astronomen: Lindhagen aus Stockholm, Möller aus Lund und Fearnley aus Christiania. Nach dem in diesem astronomischen Conseil entworfenen Plane theilte sich die auf dem Himalaya befindliche Gesellschaft in zwei Hauptsectionen, von denen die eine in Bilbao, die andere in Santander zu landen hatte. Die Pulkowaer Astronomen gehörten der ersten Section an. Am 9. Juli früh Morgens kam das Schiff nach einer angenehmen Fahrt auf der Rhede von Portugalete, dem Hafenorte von Bilbao, an, wo der Himalaya nur auf wenige Stunden Anker warf, um noch an demselben Tage die andere Section nach Santander zu führen, indem ein kleineres Dampfboot die erste Section rasch nach Bilbao brachte. Wesentlich unterstützt ward die Expedition in ihren Arbeiten durch den Ingenieur Herrn Vignoles; durch Herrn Don Cipriano Montesino, einen Neffen Espartero's, gegenwärtig einen der Hauptunternehmer der Eisenbahnen in Spanien; ferner durch den deutschen Ingenieur Herrn C. Weiler, ehemaligen Schüler der polytechnischen Schule in Carlsruhe und daher mit tüchtigen

Kenntnissen in Mathematik und Geodäsie ausgerüstet; und durch mehrere Andere, so dass in dieser Beziehung nichts zu wünschen übrig blieb. Ihren Standpunkt wählte die russische Expedition bei Pobes, einem armseligen, nur aus wenigen Häusern bestehenden Dörfchen zwischen den Städten Ordunna und Miranda, das aber durch seine Lage sehr günstige Bedingungen für die Beobachtungen darbot.

Der Morgen des 18. Juli brach unter sehr ungünstigen Auspicien an; aber um Mittag klärte sich der Himmel auf und gegen 2 Uhr wurde die erste äussere Berührung der Ränder der beiden Himmelskörper mit grösster Schärfe beobachtet. Von da an blieb es ununterbrochen klar bis zum Ende der Verfinsterung überhaupt; kaum aber war das Austreten des Mondes aus der Sonnenscheibe beobachtet, so bezog sich der Himmel wieder mit Wolken, und am Abende war es so dunkel, dass kein Stern gesehen werden konnte. Ganz ähnliche meteorologische Vorgänge hat Herr O. Struve merkwürdigerweise auch 1842 in Lipezk und 1851 in Lomza beobachtet. Der Erfolg war ein in allen Beziehungen überaus günstiger und zufriedenstellender.

Das Detail der Beobachtungen behält Herr O. Struve seinem späteren ausführlichen Berichte vor, und stellt hier nur die wesentlichsten Resultate, so weit sie sich aus den gegenwärtig nur unvollständig vorliegenden Beobachtungen ziehen lassen, zusammen.

Es ist bekannt, dass die bei Weitem von den meisten Astronomen getheilte Ansicht, dass die während totaler Sonnenfinsternisse beobachteten rothen Vorsprünge integrirende Theile der Photosphäre der Sonne sind, ihren kräftigsten Stützpunkt in Herrn O. Struve's 1851 in Lomza angestellten Messungen hat. Bekanntlich hat sich hiergegen eine andere Ansicht einige Geltung zu verschaffen gesucht, die wir in unseren beiden früheren Berichten (Literar. Ber. Nr. CXXXIX. und CXL.) hinreichend besprochen und als von den gewichtigsten Autoritäten jetzt allgemein verworfen nachgewiesen haben. Hiezu kommt nun jetzt noch die neue sehr viel wiegende Autorität in den von Herrn O. Struve aus seinen Beobachtungen gezogenen Resultaten, worüber dieser treffliche Astronom sich auf folgende Art ausspricht:

„Es lag uns besonders daran, über diesen Punkt*) **vollkommene Gewissheit** zu erlangen, und ich freue mich, der Akademie melden zu können, dass die von

*) Dass nämlich die Protuberanzen lediglich der Sonne angehören und integrirende Theile ihrer Photosphäre sind.

mir vertretene Ansicht durch die jetzt angestellten Beobachtungen über alle Zweifel erhoben ist, und von jetzt an

„ALS ASTRONOMISCHER LEHRSATZ“

dasteht.“

So wäre denn auch durch diesen ausgezeichneten Beobachter und trefflichen Astronomen, der schon früher zwei Mal ähnlichen Beobachtungen sich mit dem grössten Eifer und schönsten Erfolg gewidmet hat, die obige Ansicht zu völliger Gewissheit erhoben und damit die völlige Nichtigkeit jeder anderen nachgewiesen. Einerseits nämlich, — sagt Herr O. Struve, — haben Dr. Winnecke's Beobachtungen die stetige Abnahme in der Höhe der Protuberanzen auf der Ostseite des Mondes und die meinigen ihr Anwachsen auf der Westseite dargethan, andererseits haben Airy's Beobachtungen nachgewiesen, dass die Vorsprünge, welche sich in den um 90° von der Richtung der Mondbewegung abstehenden Punkten des Mondrandes besonders glänzend zeigten, bei unveränderter Höhe solchen Winkelveränderungen in Bezug auf das Mondcentrum unterworfen waren, wie sie sich erzeugen mussten, wenn dieselben der Sonne angehörten. Diese Beobachtungen haben ferner eine glänzende oder vielmehr augenscheinliche Bestätigung erhalten durch zwei Photographieen, die Herrn De la Rue am Anfang und Ende der totalen Verfinsterung zu nehmen gelungen ist. Da diese interessanten Photographieen sehr bald durch den Druck vervielfältigt werden sollen, so wird dadurch jeder Astronom in den Stand gesetzt werden, sich von der Richtigkeit der gewonnenen Resultate selbst zu überzeugen.

Auch die besonders von russischen Astronomen vertretene Ansicht, dass ein inniger Zusammenhang zwischen den Protuberanzen und den Sonnenflecken besteht, hat durch diese Sonnenfinsterniss wesentlich an Consistenz gewonnen, wie dies Herr O. Struve in seinem Berichte für Jeden, der Augen hat zu sehen und Ohren um zu hören, in der deutlichsten und anschaulichsten Weise darlegt.

Ueber die Natur der Corona wird hoffentlich aus der Vereinigung und Vergleichung der auf den verschiedenen Stationen angestellten Beobachtungen mehr Licht verbreitet werden. Bis jetzt scheint Herrn O. Struve das Eine festzustehen, dass dieselbe wesentlich durch terrestrische Bedingungen, speciell durch den Zustand unserer Atmosphäre modificirt wird, welchem Himmelskörper auch die Corona angehören mag.

Des Weiteren wegen müssen wir auf den höchst interessanten Bericht selbst verweisen, indem wir Herrn Otto Struve für denselben im Namen der Wissenschaft unseren wärmsten Dank abstatten.

Es gehören also ein für alle Mal die Protuberanzen unbedingt der Sonne an, und die völlige Nichtigkeit der in allen ihren Theilen an sich schon überaus schwachen sogenannten optischen Theorie ist auch durch diese Beobachtungen eines der ausgezeichnetsten Astronomen mit völliger Evidenz nachgewiesen. Dass auch der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften der grösste Dank gebührt, dass sie zu diesen trefflichen Beobachtungen die nächste und unmittelbarste Veranlassung gegeben hat, versteht sich von selbst. Grunert

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apost. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte. Dritter Folge neunter Band. Jahrgang 1859. Wien 1860. 8.

Der achte Band der dritten Folge dieser Annalen, deren so sehr regelmässiges Erscheinen zugleich ein sehr rühmliches Zeugniss von dem regelmässigen und ununterbrochenen, planmässig geordneten Fortgange der Arbeiten auf der Wiener Sternwarte liefert, wie wir schon öfters hervorzuheben uns erlaubt haben, ist im Literar. Ber. Nr. CXXVIII. S. 3. von uns angezeigt worden. Der vorliegende neunte Band der dritten Folge enthält zuerst die Beobachtungen am Meridiankreise aus den Jahren 1857 und 1858, angestellt von Herrn Allé. Diese Beobachtungen fielen noch in eine Periode von Versuchen, zu welchen die in den beiden vorhergehenden Jahrgängen besprochene Einrichtung lichter Linien im dunklen Felde veranlasste. und bedurften hauptsächlich deshalb einer umständlicheren Erläuterung der Veränderungen, welche nach und nach in den Correctionen der Instrumente nöthig wurden. Diese Erläuterungen sind in der Einleitung vollständig und in lehrreicher Weise gegeben. Hieran schliessen sich die Planeten- und Cometen-Beobachtungen am Refractor in den Jahren 1856 bis 1859 (Juli), angestellt von Herrn Dr. Hornstein. Unter den Cometen spielt natürlich der Donati'sche Comet (1858. V.) eine besondere Rolle, und wir machen die Leser hauptsächlich aufmerksam auf die interessanten Bemerkungen über die physische Beschaffenheit dieses Weltkörpers S. 177 — S. 182. Nun folgen die Zonenbeobachtungen am Mittagsrohre, welche wie früher

Herrn **Oeltzen** anvertraut waren. Den Schluss machen, nebst einigen Reductionstafeln, die **Meteorologischen Beobachtungen** vom Jahre 1858.

Ganz besonders erfreulich ist es uns gewesen, dass die überaus verdienstliche Publication der älteren meteorologischen Beobachtungen, auf welche wir schon im Literar. Ber. Nr. CXXVIII. S. 4. als ein besonders wichtiges Unternehmen uns hinzuweisen erlaubt haben, nun wirklich begonnen hat, indem mit dem vorstehenden Bande der Annalen zugleich der erste Band dieser älteren meteorologischen Beobachtungen unter folgendem Titel ausgegeben worden ist:

Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte in Wien von 1775 bis 1855. Auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director, und Carl Hornstein, Adjunct der Sternwarte. Erster Band. 1775—1796.

Wie wichtig diese Veröffentlichung älterer meteorologischer Beobachtungen, welche den langen Zeitraum von 81 Jahren umfassen, ist, und wie dankbar dafür die Wissenschaft den Herren Herausgebern sein muss, brauchen wir nicht weitläufiger aus einander zu setzen, und müssen, der Beschränktheit des Raums wegen, auch rücksichtlich aller Punkte, welche in Betreff dieser Beobachtungen eine besondere Erörterung bedürfen möchten, auf die ausführliche, vielfach interessante und lehrreiche Einleitung zu denselben verweisen.

Physik.

Variationen der Declination der Magnetnadel, beobachtet in Krakau. Von Dr. Max Weisse, Director der k. k. Sternwarte in Krakau. Wien. 1859. 4.

Diese sehr verdienstlichen, mit dem grössten Fleisse und, so weit es irgend die Verhältnisse gestatteten, ohne Unterbrechung angestellten, in der vorliegenden Schrift mit grosser Vollständigkeit und Umsicht mitgetheilten Beobachtungen der Variationen der Declination der Magnetnadel umfassen den langen Zeitraum von 1839—1856, und lassen die Beharrlichkeit, mit welcher dabei verfahren worden ist, lebhaft bewundern. Auf S. 3—S. 7. ist eine kurze Geschichte der Beobachtungen in Verbindung mit mehreren sehr verdienstlichen allgemeinen Zusammenstellungen gegeben.

Diese allgemeinen Zusammenstellungen betreffen eine Uebersicht der Schwankungen der Declination in verschiedenen Monaten, wie sie die Beobachtungen im Mittel ergeben; ferner die mittleren Krakauer Zeiten, zu welchen das Maximum und Minimum der Declination in den verschiedenen Monaten eintrat; die jährliche Abnahme der Declination; die Constanten zur Ermittelung der absoluten Declination; den merkwürdigen Gang der Declination in den Monaten October, November, December 1843, 1844, 1845; Beobachtungen der Declination während der Zeit des Nordlichts am 6. Februar 1840; einige Beobachtungen der Inclination u. s. w. Möge der verdienstvolle Herr Verfasser in seinem rühmlichen Eifer für alle derartige Beobachtungen, für welche die Wissenschaft nur dankbar sein kann, nicht ermüden!

Vermischte Schriften.

Die Königliche Societät der Wissenschaften in Upsala*), gestiftet im Jahre 1720, hat sich bekanntlich durch die Herausgabe ihrer „Acta“ und „Nova Acta“, welche eine grosse Anzahl der wichtigsten Untersuchungen enthalten, die höchsten wissenschaftlichen Verdienste erworben, und erwirbt sich die-

*) Schweden besitzt, ausser einer nicht geringen Anzahl anderer höchst achtbarer wissenschaftlicher Vereine, bekanntlich zwei grosse, weltberühmte gelehrte Gesellschaften: die Königliche Akademie der Wissenschaften in Stockholm, und die Königliche Societät der Wissenschaften in Upsala, wobei, was wenigstens in Deutschland nicht allgemein bekannt zu sein oder wenigstens nicht immer gehörig beachtet zu werden scheint, die Namen Akademie (Kongl. Vetenskaps-Akademien) und Societät oder Gesellschaft (Kongl. Vetenskaps-Societeten) wohl von einander zu unterscheiden und als amtliche Benennungen dieser hohen gelehrten Körperschaften zu betrachten sind. Der Herausgeber hat es für angemessen gehalten, dies hier einmal zu bemerken, und hat dazu selbst eine gewisse Verpflichtung und Berechtigung, weil es ihm vergönnt ist, es sich als eine ganz besondere Ehre anrechnen zu dürfen, — vielleicht in Folge einer Ueberschätzung seiner geringen wissenschaftlichen Verdienste, — sowohl der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Stockholm, als auch der Königlichen Societät der Wissenschaften in Upsala als Mitglied anzugehören; und welcher Mathematiker sollte dies nicht, da in Schweden die Mathematik eine so grosse Anzahl ihrer würdigsten und trefflichsten Vertreter zählt und von jeher gezählt hat, zugleich auch als allgemeines Bildungsmittel der Jugend ganz unbedingt und unangefochten eine der ersten Stellen einnimmt!

selben fortwährend. Die darin erscheinenden Arbeiten werden in lateinischer oder französischer Sprache publicirt. Es gereicht uns zu ganz besonderer Freude, anzeigen zu können, dass neben diesen „Nova Acta" die Königliche Societät von dem Jahre 1860 an jetzt noch ein zweites periodisch erscheinendes Werk unter dem Titel „Årsskrift" herauszugeben angefangen hat, in welchem alle Arbeiten in schwedischer Sprache verfasst sein werden, jedenfalls ein echt nationaler Gedanke, den man seine höchste Achtung zollen muss. Von diesem neuen Werke, welches gleichfalls für die Wissenschaft sehr wichtig zu werden verspricht, liegt uns der erste Jahrgang vor unter dem folgenden Titel:

Årsskrift utgifven af Kongl. Vetenskaps-Societeten i Upsala. Första Årgången. Upsala. C. A. Leffler. 1860. 8°.

Ausser sechs anderen Abhandlungen historischen und naturhistorischen Inhalts von Hammarstrand, Bonsdorff, Lilljeborg, Th. M. Fries (ein sehr interessanter Bericht über eine im Jahre 1857 unternommene Reise nach Finnmarken) und einigen literarischen Anzeigen von Werken aus dem Gebiete der Zoologie, enthält der vorliegende Jahrgang auch eine sehr beachtenswerthe mathematische Abhandlung unter dem Titel:

Omarbetning af Duhamels bevis för „Principe des vitesses virtuelles", af Akad. Docenten H. Th. Daug (Prisbelönt af K. Vet.-Societeten). p. 149—p. 236.

welche wir der Aufmerksamkeit unserer Leser sehr empfehlen, einmal wegen der darin gegebenen neuen Darstellung des Duhamel'schen Beweises an sich, dann aber, und zwar ganz vorzüglich, wegen der grossen Anzahl sehr lehrreicher Beispiele für die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bei der Lösung mechanischer Probleme. Je weniger solche Beispiele in den Lehrbüchern der Mechanik gewöhnlich vorkommen, und je wichtiger dieselben für den Lernenden sind: desto verdienstlicher ist jedenfalls die vorliegende Abhandlung, und wir würden aus dem angegebenen Grunde selbst eine Uebersetzung in's Deutsche oder in's Französische für sehr wünschenswerth und verdienstlich halten. Jedenfalls machen wir auf selbige besonders aufmerksam.

Zugleich liegt uns ein neuer Theil der „Nova Acta" vor unter dem Titel:

Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. II. Fasciculus posterior. 1858. Upsaliae. C. A. Leffler. 1858. 4°.

Seriei tertiae Vol. II. Fasc. prior ist von uns im Literar. Ber. Nr. CXXVII. S. 5. angezeigt worden. Der vorliegende neue Band enthält, ausser mehreren anderen namentlich naturhistorischen Abhandlungen, nur eine in den Kreis des Archiv's gehörende Abhandlung, nämlich:

Analysis aequationum aliquot functionalium, quae partim in theoria ellipticarum partimque dilogarithmicarum magni sunt usus, auctore Car. Joh. D: Son Hill. p. 391—p. 405.

welche auch separat unter dem etwas veränderten Titel:

Analysis aequationum aliquot functionalium, quae partim in theoria ellipticarum partimque dilogarithmicarum magni sunt usus; adjecta est varia summatio seriei

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots.$$

Auctore Car. Joh. D: Son Hill. Upsaliae. 1859. 4°.

erschienen ist.

Herr Professor Hill hat sich bekanntlich schon durch andere Untersuchungen über die Auflösung gewisser allgemeiner Functionengleichungen sehr verdient gemacht, und beschäftigt sich in dieser Abhandlung, wie schon deren Titel besagt, vorzugsweise mit solchen Functionengleichungen, welche für die Theorie der elliptischen und der sogenannten dilogarithmischen (s. weiter unten) Functionen von Wichtigkeit sind. So sehr beachtenswerth uns auch diese Abhandlung erscheint, so können wir doch auf eine noch nähere Angabe ihres Inhalts nicht eingehen, theils der Beschränktheit des Raums dieser literarischen Berichte wegen, theils aber auch deshalb, weil dazu eine ziemlich grosse Anzahl besonderer Zeichen, deren sich Herr Professor Hill bedient, nöthig sein würde, die uns für den Druck nicht zu Gebote stehen. Beachtenswerth sind aber insbesondere auch die nach verschiedenen Methoden angestellten Untersuchungen über die Summe der Reihe

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\ldots,$$

welche als eine besondere Constante betrachtet und durch $\frac{1}{2}I$ oder $K\frac{1}{4}\pi$ bezeichnet wird, Nach verschiedenen Methoden, die sich zum Theil an Legendre Exercices anschliessen, ergiebt sich übereinstimmend:

$$l = 2K_4^1\pi = 1{,}83193118835443803 0.$$

In Verbindung mit diesen Untersuchungen stehen auch die, einen ähnlichen Zweck wie z. B. die bekannten Arbeiten über den sogenannten Integral-Logarithmus verfolgenden Untersuchungen über verschiedene aus der Integration hervorgehende transcendente Functionen, durch welche Herr Professor Hill sich schon früher vielfach verdient gemacht hat; dahin gehört namentlich die von ihm Lamma genannte und mit $\varLambda x$ bezeichnete Function, worunter die durch das bestimmte Integral

$$\varLambda x = \int_0^x \frac{dx}{x} l(1+x)$$

gegebene transcendente Function zu verstehen ist, welche er, in Verbindung mit den durch die bestimmten Integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{x} l(1+2xC\alpha+x^2),\quad \int_0^x dxl(Sx)^{-2}$$

gegebenen Functionen, Functiones elementarie Dilogarithmicae*) genannt hat. Für die Function Lamma liegt uns eine von demselben ausgezeichneten Mathematiker berechnete, sehr verdienstliche Tafel unter dem Titel:

Tabula functionis Lamma ejusque Derivatae, itemque Logarithmi naturalis cum differentiis. Lundae. 1859. 4°.

vor, auf die wir noch besonders aufmerksam machen.

Sitzungsberichte der königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München.

Die königl. bayerische Akademie der Wissenschaften in München hat mit dem Jahre 1860 auch die Herausgabe von Sitzungsberichten über ihre Verhandlungen begonnen, was uns zu ganz besonderer Freude gereicht, und wofür wir dieser hohen gelehrten Körperschaft im Namen der Wissenschaft den wärmsten Dank sagen. Wir werden uns angelegen sein lassen, auch von diesen Sitzungsberichten jederzeit unmittelbar nach dem Erscheinen derselben Anzeigen in unseren literarischen Berichten zu liefern, wobei es sich von selbst versteht, dass wir uns dabei lediglich auf den in den Kreis des Archivs gehörenden Inhalt beschrän-

*) M. s. Specimen exercitii analytici etc. Part. I. Londini Gothorum. 1830. 4°. p. 1.

ken müssen, wodurch natürlich die Wichtigkeit des übrigen Inhalts nicht im Geringsten von uns verkannt wird; der uns knapp zugemessene Raum und der Zweck unserer Zeitschrift legen uns aber von selbst eine solche Beschränkung auf. G.

1860. Heft I. Dieses erste Heft, mit welchem die Reihe der vorliegenden Sitzungsberichte, denen wir eine Dauer bis auf die spätesten Zeiten aufrichtigst wünschen, beginnt, enthält zuerst zwei interessante Abhandlungen meteorologischen Inhalts von Herrn C. Kuhn.

a) Beitrag zur Kenntniss des Temperaturganges zu Jerusalem. S. 1—S. 20.

b) Ueber die Vertheilung der Gewitter. S. 20—S. 36.

Die erste Abhandlung liefert einen sehr dankenswerthen Beitrag zur Meteorologie des Orients, wobei die bei näherer Untersuchung zu Vertrauen berechtigenden Temperatur-Beobachtungen zur Grundlage dienten, welche von einem deutschen Lehrer, Herrn Palmer, in den Jahren 1847 bis 1855, in Jerusalem angestellt worden sind; diese Beobachtungen waren von dem verstorbenen Geheim-Rathe v. Schubert bei dem Conservatorium der k. Sternwarte deponirt, und von Herrn Conservator Lamont mit bekannter Bereitwilligkeit und dem wärmsten Interesse für die Fortschritte der ihm selbst so viel verdankenden meteorologischen Wissenschaft zur Benutzung überlassen worden. Rücksichtlich der Resultate dieser mit grossem Fleisse und grosser Umsicht angestellten Untersuchung müssen wir auf die Abhandlung selbst verweisen.

Ganz besonders machen wir unsere Leser auf die zweite, auch in allgemein physikalischer Rücksicht wichtige und interessante Abhandlung über die Vertheilung der Gewitter aufmerksam. Für 21 Orte hat Herr Kuhn die mittlere Jahressumme der Gewitter, so weit die vorliegenden Beobachtungen reichten, bestimmt, und dann die Abweichungen einzelner Jahre für die Jahre 1844—1859 von diesen Mittelzahlen tabellarisch zusammengestellt. Daraus hat sich ergeben, dass nur selten die Abweichungen mehrerer auf einander folgender Jahre ungleiche Zeichen haben, sondern gewöhnlich mehrere auf einander folgende Jahre einen Ueberschuss, andere ein Zurückbleiben unter dem Mittel anzeigen, so dass es also fast den Anschein hat, als ob eine gewisse Periodicität im Auftreten der Gewitter während einer gewissen Anzahl von Jahren stattfinde, eine Ansicht, die Herr Kuhn noch weiter zu begründen sucht. Findet nun aber eine langjährige Periode im

Auftreten der Gewitter wirklich Statt, so kann eine derartige gesetzmässige Vertheilungsweise, wie sie die Gewitter zeigen, wenn man grössere Landesstrecken unter einander vergleicht, nicht hervortreten, wenn nicht eine und dieselbe Ursache, die ausschliesslich an der Erde und nicht in der Atmosphäre wirkt, angenommen werden kann, eine Annahme, für welche auch andere Thatsachen sprechen. Da nun bekanntlich, abgesehen von der Schönbeinschen Hypothese, hauptsächlich zwei Anschauungsweisen über die Entstehung der Gewitter sich bis jetzt geltend gemacht haben, von denen die erste die Quelle für die Gewitterbildung lediglich in der Atmosphäre sucht, die zweite die eigentliche Entstehungsquelle an oder in der Erde zu suchen sich für berechtigt hält, indem beide darin übereinkommen, dass die Bildung eines Gewitters ohne die Anwesenheit von Wolken in der Atmosphäre nicht möglich ist: so würde also in den Untersuchungen des Herrn Verfassers die zweite Ansicht einen neuen wichtigen Stützpunkt finden. Wegen des weiteren Inhalts müssen wir auf die vielfach interessante Abhandlung selbst verweisen, welche Niemand, der sich mit Untersuchungen über das Gewitter beschäftigt, unbeachtet lassen darf.

Ferner enthält das vorliegende Heft die Denkrede des Herrn v. Martius auf den Mineralogen J. F. L. Hausmann, mit einem vollständigen Verzeichnisse der Schriften dieses verdienten Gelehrten. S. 57 — S. 75.

Endlich setzt Herr Schönbein seine verdienstlichen Beiträge zur näheren Kenntniss des Sauerstoffes fort. S. 75 — S. 91.

1860. Heft II. Ausser mehreren interessanten naturhistorischen Abhandlungen enthält dieses Heft S. 160 — S. 163. eine sehr interessante Mittheilung über ein Fernrohr mit Objectiv nach der Construction von Gauss, welches Herr Steinheil in seiner schon jetzt sehr berühmten Werkstätte hat construiren lassen. Gauss hat bekanntlich gezeigt, dass es möglich ist, ein Objectiv zu construiren, welches Strahlen von zweierlei Brechbarkeit, und zwar solche, die der Axe unendlich nahe und solche, die am Rande einfallen, in aller Strenge in einem Punkte vereinigt. Die eigenthümliche Gestalt der Bestandlinsen dieses Objectivs, welches jedenfalls in theoretischer Rücksicht vor allen übrigen den Vorzug verdient*), setzte aber bisher der Ausführung desselben für un-

---

*) Der Herausgeber erlaubt sich auf seine ausführliche theoretische Untersuchung und numerische Berechnung dieses Objectivs in seinen Optischen Untersuchungen Thl. II. S. 225 — S. 256. zu verweisen.

übersteigbar gehaltene Hindernisse entgegen, und auch noch manche andere, — selbst theoretische, — Bedenken machten sich geltend. Sehr erfreulich und wichtig ist es daher, zu erfahren, dass Herr Steinheil durch sehr sinnreiche Hülfsmittel alle diese Hindernisse jetzt überwunden zu haben glaubt, und sich der sicheren Hoffnung hingiebt, bessere grossartige Refractoren herstellen zu können als bis jetzt möglich war. Mögen die Bemühungen des um die Optik schon so hoch verdienten Mannes mit dem schönsten Erfolge gekrönt werden! Weiteren Mittheilungen sehen wir mit grossem Verlangen entgegen.

1860. Heft III. In den Kreis unsers „Archivs" gehörende Abhandlungen enthält, streng genommen, dieses Heft nicht. Hinweisen wollen wir jedoch in der Kürze auf Schönbein's Fortsetzung seiner Beiträge zur näheren Kenntniss des Sauerstoffs S. 272—S. 289.; auf Pettenkofer's Aufsätze über die Bestimmung der freien Kohlensäure im Trinkwasser, und über einen Respirations- und Perspirations-Apparat im physiologischen Institute zu München; endlich auf einige Berichtigungen zu Kuhn's obiger Abhandlung über die Vertheilung der Gewitter.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati di Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXXXIX. S. 14.)

Nr. 3. (Maggio e Giugno 1860). La Teorica delle funzioni ellittiche, e sue applicazioni. Monografia del Prof. Enrico Betti (Continuazione). p. 129. — La Teorica dei Covarianti, e degli Invarianti. Monografia del Prof. F. Brioschi (Continuazione). p. 160. — Sopra un problema generale di Geometria. Nota del Prof. L. Cremona. p. 169. — Sur quelques fonctions symmetriques des racines des équations algébriques. Par Michael Roberts. p. 172. — Ricerche geometriche sulle funzioni ellittiche. Nota del Prof. B. Tortolini. p. 178. — Sulla riduzione di un' integrale alle funzioni ellittiche. Nota del Prof. Tortolini. p. 183.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Pt. Merian, Die Mathematiker Bernoulli. Basel. 4⁰. 18 Ngr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

L. Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch. 13. Lief. gr. 8⁰. geh. Berlin. 20 Ngr.

Arithmetik.

F. Bredow, Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik. 1. Hft. 2. Aufl. 8⁰. Oels. 10 Ngr.

C. de Freycinet, De l'analyse infinitésimale, étude sur la métaphysique du haut calcul, avec figures intercallées dans le texte. Paris. 8⁰. 2 Thlr.

A. F. und H. Hauck, Lehrbuch der Arithmetik für Handels-, Gewerb- und Realschulen, so wie für Geschäftsmänner überhaupt. I. Thl. gr. 8⁰. geh. Nürnberg. 1 Thlr. 6 Ngr.

F. Lukas, Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen und Antilogarithmen. Mit einer Sammlung von Tabellen u. Formeln für wissenschaftl., technische und Schulzwecke. gr. 16⁰. geh. Wien. 1 Thlr

F. Močnik, Lehrbuch der Algebra für die Ober-Gymnasien. 7. Aufl. gr. 8⁰. Wien. geh. 24 Ngr.

J. H. T. Müller, Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunctionen nebst den Additions- und Subtractions-Logarithmen. 2. Aufl. hoch 4⁰. geh. Halle a. d. S. 10 Ngr.

E. Niess, Zahlenrechnung. Repetitionsheft für Schüler. 3. Hft. Lex.-8⁰. Dresden. $7\frac{1}{2}$ Ngr.

A. von der Schulenburg, Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. gr. 8⁰. geh. Halle. 12 Ngr.

S. Spitzer, Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen. 1. Fortsetz. gr. 8⁰. Wien. geh. 20 Ngr.

S. Stampfer, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst verschiedenen anderen nützlichen Tafeln und Formeln u. eine An-

weisung mit Hülfe derselben logarithmische Rechnungen auszuführen. 6. Aufl. gr. 8⁰. geh. Wien. 20 Ngr.

K. Thomas, Das System der absoluten Primzahlen. Nebst nothgedrungen. Abwehr. Lex.-8⁰. Rudolstadt u. Leipz. geh. 10 Ngr.

J. Weisbach, Die ersten Grundlehren der höheren Analysis oder der Differential- und Integralrechnung. gr. 8⁰. geh. Braunschweig. 10 Ngr.

A. Zillmer, Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen, systematisch entwickelt. 4⁰. Berlin. 2 Thlr.

Geometrie.

J. Adhémar, Traité de perspective linéaire. 3e édition, revue et augmentée. Paris. 8⁰. Mit Atlas von 81 Taf. in Fol. 10 Thlr. 20 Ngr.

F. G. Kapff, Kreis und Ellipse nach der Theorie der Schiefe geometrisch, algebraisch und trigonometrisch dargestellt. gr. 8⁰. geh. Leipzig. 18 Ngr.

Jul. de la Gournerie, Traité de géométrie descriptive. 1re partie. Texte et atlas. Paris. 4⁰. Mit 52 Taf. 3 Thlr. 10 Ngr.

Lenthéric, Transformation newtonienne des figures planes. 2e partie. Montpellier. 4⁰. Mit 3 Taf.

C. Meyer, Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und andere Lehranstalten. 1r Thl. Planimetrie. 9. Aufl. gr. 8⁰. geh. Mühlheim. $17\frac{1}{2}$ Ngr.

E. Niess, Geometrie. Repetitionshefte für Schüler. 1. Hft. Lex.-8⁰. Dresden. 6 Ngr.

G. Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Unter Mitwirkung des Verfassers deutsch bearbeitet von W. Fiedler. gr. 8⁰. geh. Leipzig. 4 Thlr.

O. Schlömilch, Beginselen der meetkunde. (Nar het Hoogduitsch.) Door J. C. Eger. 1. Deel: Planimetrie. Met 183 houtsneêfiguren. Post 8. Groningen. 1 f. 60 c.

K. G. Ch. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. 3. Hft. 8⁰. (Schluss.) Nürnberg. 27 Ngr.

C. H. Stövesandt, Praktischer Theil der zeichnenden Geometrie; enth. hauptsächlich solche Aufgaben, welche bei den verschiedenen Handwerkern am häufigsten vorkommen. 2. Aufl. gr. 8⁰. Mit Atlas in gr. Fol. geh. Berlin. 20 Ngr.

Mechanik.

Edw. J. Routh, An Elementary Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies, with numerous examples. London 1860. 8⁰. 4 Thlr. 6 Ngr.

Praktische Mechanik.

J. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. 3. Thl. 13.—15. Lief. gr. 8⁰. geh. Braunschweig. 1½ Ngr.

Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Herausgeg. v. C. von Littrow. 3. Flg. 9. Bd. Jahrg. 1859. gr. 8⁰. geh. Wien. 3⅓ Thlr.

Bach, Calcul des éclipses de soleil par la méthode des projections. Paris. 8⁰. Mit 3 Taf. 20 Ngr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1863. Herausgegeb. von J. F. Encke unter Mitwirkung von Wolfers. gr. 8⁰. Berlin. 3 Thlr.

F. Braun, Le monde céleste en tableaux transparents. gr. 4⁰. Mit Text in gr. 8⁰. In Mappe. Brüssel. 5 Thlr. 24 Ngr.

Brunnow's Spherical-Astronomy. Translated by Robert Main. Part I. Including the Chapters on Parallax, Refraction, Aberration, Precession and Nutation. 8⁰. London. Cloth. 8 s. 6 d.

Handatlas der Erde und des Himmels. Neu red. Ausg. 54. Lief. Imp.-Fol. Weimar. 10 Ngr.

— — Derselbe, neu red. Volksausgabe in 50 Karten. 4. bis 12. Lief. Imp.-Fol. Weimar. à 8 Ngr.

J. H. Mädler, Der Wunderbau des Weltalls oder populäre Astronomie. 5. Aufl. 8. Lief. gr. 8⁰. geh. Berlin. 8 Ngr.

L. Posch, Geschichte und System der Breitengradmessungen. Inaugural-Dissertation. gr. 8⁰. geh. Freising. 1 Thlr.

Translation of the Sûrya-Siddhânta, a Text Book of Hindu Astronomy; with Notes and an Appendix, containing additional notes and tables, calculations of eclipses, a Stellar Map, and indexes. By Ebenezer Burges, assisted by the Committee of Publication of the American Oriental Society. From the Society's Journal. Vol. VI. 1860. New Haven. 8⁰. 4 Thlr. 10 Ngr.

A. Weber, Die vedischen Nachrichten von den naxatra (Mondstationen). 1. Thl.: Historische Einleit. gr. 4⁰. geh. Berlin. 15 Ngr.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Neue Folge. 4. Jahrg. 1861. Red. v. Heis. No. 1. gr. 8⁰. Halle. Preis für den Jahrg. 3 Thlr.

Physik.

Annales de l'observatoire physique central de Russie, publiées par A. T. Kupffer. Année 1857. 2 Nrs. St. Pétersbourg. (Leipzig.) 4⁰. Mit 3 Taf. 7 Thlr. Inhalt: Nr. 1. Observations météorologiques et magnétiques. — Nr. 2. Correspondance météorologique. Publication annuelle de l'administration des mines de Russie, redigée par A. T. Kupffer.

P. Desains, Leçons de physique. Tome IIᵉ, 1ʳᵉ section. Paris. 8⁰. 1 Thlr. 5 Ngr.

Jul. Dub, Der Elektromagnetismus. Mit 120 in den Text gedruckten Holzschn. Berlin. 8°. 3 Thlr. 10 Ngr.

Du Moncel, Études des lois des courants électriques au point de vue des applications électriques. Paris. 8°. 1 Thlr. 10 Ngr.

Allgemeine Encyklopädie der Physik. Bearbeitet von Brix, Decher u. s. w. 8. Lief. Lex.-8°. Mit Atlas qu. Fol. geh. Leipzig. 5 Thlr. 20 Ngr.

K. Koppe, Anfangsgründe der Physik für den Unterricht in den oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen, sowie zur Selbstbelehrung. 7. Aufl. gr. 8°. Essen. geh. 1 Thlr. 5 Ngr.

A. T. Kupffer, Recherches expérimentales sur l'élasticité des métaux, faites à l'observatoire physique central de Russie. Tome Ier. St.-Pétersbourg. (Leipzig.) 4°. Mit 9 lithogr. Taf. 5 Thlr.

M. F. Maury, The Physical Geography of the Sea, and its Meteorology: being a reconstruction and elargement of the Eighth. Edition of „The Physical Geogr. of the Sea." 8°. Lond. Cloth. 12 s.

Vct. Meurein, Observations météorologiques faites à Lille pendant l'année 1858—1859. Lille. 8°. Mit Tabelle.

Alb. Mousson, Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 2. Abth.: Physik des Aethers. Die Lehren von der Wärme und vom Lichte. 1. u. 2. Heft. Mit vielen gravirten Abbildungen. Zürich. 8°. 1 Thlr. 26 Ngr.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. III. A. u. d. T.: Lehrbuch der kosmischen Physik. Von J. Müller. 2. Aufl. gr. 8°. Mit Atlas in 4°. geh. Braunschweig. 4 Thlr.

J. Nicklès, Les Électro-aimants et l'adhérence magnétique. Paris 1860. 8°. Mit 5 Taf. 1 Thlr. 20 Ngr.

Observations météorologiques faites à Nijné-Taguilsk. (Monts Ourals, gouvernement de Perm.) Année 1857. Paris 1860. 8°.

V. Pierre, Ueber das Bourdonsche Metallbarometer. gr. 4°. geh. Prag. 8 Ngr.

F. J. Pisko, Lehrbuch der Physik für Obergymnasien. gr. 8°. geh. Brünn. 2 Thlr. 8 Ngr.

C. Prediger, Ueber die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen. Clausthal. 8°. 12 Ngr.

K. Robida, Grundzüge einer naturgemässen Atomistik mit den daraus abgeleiteten Schwingungsgleichungen. 1s Hft. gr. 8°. Klagenfurt. 6 Ngr.

E. E. Schmid, Lehrbuch der Meteorologie. Lex.-8°. Mit einem Atlas in qu. Fol. Leipzig. 13 Thlr.

Vermischte Schriften.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben von Schlömilch, Kahl und Cantor. 1861. 6. Jahrg. 1s Hft. Lex.-8°. Leipzig. Vollständig 5 Thlr.

Literarischer Bericht
CXLII.

Wichtiges wissenschaftliches Unternehmen.

Des regierenden Königs von Bayern Majestät haben den Wissenschaften wieder einen neuen Beweis Allerhöchster Aufmerksamkeit gegeben. Der bei der Akademie der Wissenschaften in München von dem Könige Maximilian gegründeten historischen Commission sind so eben mit grösster Munificenz die Geldmittel gewährt worden, welche zur ungesäumten Ausführung der schon früher beschlossenen Bearbeitung einer Geschichte der Wissenschaften in Deutschland erforderlich sind. In den Kreis dieses Unternehmens ist nun natürlich auch die Geschichte der Mathematik, der Astronomie und der Physik in Deutschland gezogen worden. Die Geschichte der Mathematik wird Herr Professor Gerhardt in Eisleben übernehmen, der sich durch die Herausgabe der Werke von Leibniz, durch seine sorgfältigen Untersuchungen über die Geschichte der Differentialrechnung und andere ausgezeichnete historische Arbeiten *) schon so vielfach verdient gemacht hat. Die Bearbeitung der Geschichte der Astronomie wird Herr Professor v. Littrow in Wien übernehmen, der sich gleichfalls schon längst mit erfolgreichen Studien auf dem Felde der Geschichte der Astronomie beschäftigt hat, wie u. A. die schöne Abhandlung im Archiv. Thl. XXXIV. S. 249. zeigt. Die Geschichte der Physik endlich ist in die Hände des Herrn Professor Jolly in München gelegt, von dem sich gleichfalls Ausgezeichnetes auf diesem Gebiete erwarten lässt. Wir glauben daher, dass ganz die richtigen Männer für diese grosse Arbeit gewählt worden sind, und begrüssen das ganze Unterneh-

---

*) M. s. z. B. Archiv. Thl. II. S. 200. 423. 427. III. S. 284. XXVII. S. 125.

men mit der grössten Freude, weshalb wir auch unseren Lesern über dasselbe hier besondere Nachricht zu geben nicht verfehlen zu dürfen geglaubt haben. Von sehr grossen Schwierigkeiten ist diese wichtige Unternehmung keineswegs frei, welche nach unserer Meinung hauptsächlich darin liegen, dass die Mathematik und Physik im eigentlichen Sinne Weltwissenschaften sind, auf deren Gebiete sich jederzeit fast alle Culturvölker an allen wichtigen Entdeckungen selbst, oder wenigstens an deren weiteren Vervollkommnung und Entwickelung, betheiligt haben, so dass es gewiss nicht leicht sein wird, sich auf den engen Kreis nur eines Landes, — wenn auch nur so viel wie möglich, — zu beschränken. Indess sind diese Schwierigkeiten nicht unüberwindbar, und wenn sie glücklich überwunden worden sind, ist das Verdienst der unmittelbar bei dem Unternehmen Betheiligten und des hohen Monarchen, dessen regem Sinn für die Wissenschaften dasselbe seine Entstehung verdankt, desto grösser. G.

Arithmetik.

Théorie générale de l'élimination. Par le chevalier François Faà de Bruno, Docteur ès science de la faculté de Paris, Capitaine honoraire de l'état major Sarde, Professeur libre à l'université de Turin. Paris. 1859. 8°.

Wir bedauern recht sehr, dass wir dieses wichtige und ausgezeichnete Werk, welches uns erst jetzt genauer bekannt geworden ist, nicht schon früher unseren Lesern haben zur Beachtung empfehlen können, indem uns kein ähnliches Werk bekannt ist, in welchem die vielen Arbeiten, welche die Theorie der Elimination den neueren Mathematikern verdankt, in einer so vollständigen systematischen Zusammenstellung beisammen anzutreffen wären. Alle hierher gehörenden Untersuchungen von Euler, Bezout, Cramer, Cauchy, Lagrange, Liouville, Jacobi, Sylvester, Betti, Brioschi, Borchardt, Cayley, Schläfli u. A. findet man hier mit oftmals eigener Begründung, und mit eigenen Untersuchungen vermehrt, zu einem Ganzen vereinigt, eine Arbeit, für welche der Herr Verfasser den lebhaftesten Dank verdient, da wohl jeder Analyst schon die Erfahrung an sich selbst gemacht haben wird, wie viele Schwierigkeit es in mehrfacher Beziehung hat, sich mit allen diesen Untersuchungen, namentlich den neueren, aus den verschiedenen mathematischen Journalen, in denen sie sich vorzugsweise zerstreut finden, be-

kannt zu machen. Hier müssen wir uns mit der folgenden Angabe des Hauptinhalts begnügen: **Première Partie.** Théorie de l'élimination entre deux équations. Chap. I. Sur les fonctions symétriques des racines et sur leurs propriétés. — Chap. II. Elimination de la variable entre deux équations à une variable. — Chap. III. Propriétés et emploi de la résultante dans la recherche des racines communes. — **Deuxième Partie.** Théorie de l'élimination dans le cas de trois équations à deux variables. Chap. I. Recherche et propriétés des solutions communes à deux équations à deux variables. — Chap. II. Elimination des variables entre trois équations à deux variables. — **Troisième Partie.** Théorie générale de l'élimination. Chap. I. Propriétés relatives aux solutions communes. — Chap. II. Recherche et formation de la résultante. — Chap. III. Propriétés de la résultante. — Notes, welche verschiedene speciellere Theoreme von Borchardt, Cayley, Betti, u. s. w. betreffen.

Jedenfalls verdient Herr Faà de Bruno für die Herausgabe dieses Werkes besonderen Dank, da durch dasselbe einem wahren Bedürfnisse abgeholfen und entgegen gekommen wird.

Geometrie.

Prolusione ad un corso di Geometria superiore, letta dal Dottor Luigi Cremona, Professore ordinario di questa scienza nell'universita di Bologna. Novembre 1860. Milano 1861. 8.

In dieser Einleitung zu seinen Vorlesungen über neuere Geometrie an der Universität zu Bologna giebt Herr Professor Luigi Cremona in allgemeinen, aber scharf gezeichneten Zügen ein sehr anziehendes Bild von Tendenz, Inhalt und Methode dieser Wissenschaft, wobei er sich mit allen, dieselbe betreffenden Leistungen, namentlich auch mit den Arbeiten der deutschen Geometer Steiner, Möbius, Seydewitz *) u. A. vollkommen bekannt und vertraut zeigt, und namentlich auch durch die Wärme, mit welcher er das eifrige Studium der neuen Wissenschaft seinen Zuhörern empfiehlt, das Interesse des Lesers in der vielfachsten Weise erregt und in Anspruch nimmt. Wir bekennen, dass wir diese Schrift mit dem grössten Vergnügen gelesen, und

---

*) Archiv an vielen Stellen, s. Inhaltsverzeichniss S. 79 u. 80.

vielfache Belehrung aus derselben geschöpft haben; auch wüssten wir kaum eine andere Schrift zu nennen *), in welcher die Hauptpunkte, auf die es hier ankommt, mit derselben Deutlichkeit und Bestimmtheit hervorgehoben wären, in der überhaupt das Wesen der neueren Geometrie so scharf charakterisirt wäre, als in der vorliegenden, weshalb wir dieselbe unseren Lesern dringend zur Beachtung empfehlen, und dem Herrn Verfasser recht sehr für deren Publication danken.

Intorno ad una linea di quart' ordine. Nota di F. Siacci. (Estratta dal giornale arcadico. T. CLXVII. Maggio e Giugno 1860.) Roma 1861.

Die Linie des vierten Grades, welche der Herr Verfasser in dieser lesenswerthen Schrift einer genaueren Betrachtung unterzogen hat, wird durch die Gleichung

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$$

charakterisirt, die gewissermassen die Umkehrung der Gleichung der Ellipse ist. Es ist uns interessant gewesen, dass diese Curve eine so grosse Anzahl bemerkenswerther Eigenschaften hat, auch vielfach zu einfachen Constructionen Veranlassung giebt; und der Herr Verfasser hat sich jedenfalls durch diese mit Geschick und Sachkenntniss angestellte Untersuchung ein Verdienst erworben, insbesondere nach unserer Meinung auch um den mathematischen Unterricht. Denn die bis jetzt bekannten Curven sind schon so häufig, fast, möchten wir sagen, zum Ueberdruss untersucht und als Beispiele für die Zwecke des Unterrichts benutzt worden, dass es, wie jeder Lehrer gewiss schon gefühlt haben wird, höchst wünschenswerth ist, die Anzahl solcher Beispiele durch einige neue Curven, deren Betrachtung zu bemerkenswerthen Resultaten führt und in lehrreicher Weise angestellt werden kann, vermehrt zu sehen. Einen dankenswerthen Beitrag hierzu liefert jedenfalls die vorliegende Schrift, weshalb wir namentlich auch alle Lehrer auf dieselbe aufmerksam machen; und Anfängern die in Rede stehende Curve Behufs ihrer eigenen Uebung zur selbstständigen Untersuchung recht sehr empfehlen, welche wahrscheinlich noch zu weiteren interessanten Resultaten führen wird, wenn auch die Rectification, Cubatur, Complanation, die Bestimmung der Schwerpunkte u. s. w. in Angriff genommen wird, was in der vorliegen-

---

*) Dem Discours d'inauguration du cours de géométrie supérieure von Chasles steht dieselbe in würdigster Weise zur Seite.

den Schrift noch nicht geschehen ist. Auch dürfte zur Uebung in der Analysis neben obiger Curve nun wohl auch die Untersuchung der durch die Gleichung

$$\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{y^2}=1$$

charakterisirten Curve zu empfehlen sein. Wir wünschen der Schrift nochmals die Beachtung der Lehrer und Schüler.

Astronomie.

Grosse Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860. (M. s. Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 8.).

Es war zu erwarten, dass das preussische Unterrichts-Ministerium, welches allen Unternehmungen, von denen sich wirkliche Früchte für die Förderung der Wissenschaft mit Sicherheit hoffen lassen, jederzeit seine kräftige Unterstützung zu Theil werden zu lassen bereit ist, wie andere Regierungen, gleichfalls einen geschickten Astronomen zur Beobachtung der grossen Sonnenfinsterniss nach Spanien senden würde. Diese Erwartung ist in der erfreulichsten Weise in Erfüllung gegangen, und der preussische Unterrichts-Minister Herr von Bethmann-Hollweg Excellenz, verdient jedenfalls den grössten Dank aller Freunde der Wissenschaft, dass er durch besonderes Rescript vom 14. Juli 1860 Herrn Doctor C. Bremiker in Berlin den Auftrag ertheilte, in Uebereinstimmung mit dem Director der Königlichen Sternwarte, Herrn Professor Encke, und unter dessen specieller Anweisung, sich den in Spanien versammelnden Astronomen anzuschliessen, um an der Beobachtung der grossen Sonnenfinsterniss am 18. Juli Theil zu nehmen. Die von dem Herrn Minister getroffene Wahl muss unter allen Bedingungen eine höchst glückliche genannt werden, da Herr Doctor Bremiker, als trefflicher Mathematiker längst bekannt und vielfach verdient, damit grosse Geschicklichkeit und Fertigkeit im Beobachten verbindet, und durch seine ausgebreiteten astronomischen und physikalischen Kenntnisse in der schönsten und vollkommensten Weise befähigt ist, — wenn wir so sagen dürfen, — in den ganzen Geist einer solchen Erscheinung, um deren Beobachtung es sich hier handelte, einzudringen und denjenigen Momenten, auf die es hier vorzugsweise ankam, seine volle Aufmerksamkeit zu widmen. In sehr zweckmässiger Weise hatte er mit Herrn Encke die Verabredung getroffen, zwar, wie es sich von selbst verstand, die astro-

nomischen Momente, insbesondere Zeit- und Breiten-Bestimmung, keineswegs ganz zu vernachlässigen, dieselben aber, wie es sonst wohl geschieht, nicht zur Hauptsache zu machen, sondern vielmehr vorzugsweise den Protuberanzen, deren Grösse, ihrer Zu- und Abnahme und den Positions-Winkeln seine Aufmerksamkeit zu widmen. Der von Herrn Doctor Bremiker der Berliner Akademie erstattete, in jeder Beziehung höchst interessante und wichtige Bericht über den Erfolg seiner ihm von Herrn von Bethmann-Hollweg anvertrauten Mission liegt unter dem Titel:

Bericht über die Beobachtung der Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860 von Dr. C. Bremiker in Berlin. (Auszug aus dem Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin für den November 1860.) Berlin. 1860.

uns jetzt vor, und wir erlauben uns, über die gewonnenen Resultate unseren Lesern im Folgenden einige Mittheilungen zu machen.

Herr Doctor Bremiker begab sich über Paris und Lyon nach Marseille, und gelangte von dort nach einer 36stündigen Fahrt mit einem Schiff der Messagerie impériale am 13. Juli nach Valencia, welches bereits innerhalb der Zone der totalen Verfinsterung lag. Von dort begab er sich nach Castellon de la Plana, dem Hauptorte der Provinz gleichen Namens, in einer sehr fruchtbaren Ebene, eine halbe Meile vom Mittelländischen Meere, und der Linie der centralen Verfinsterung sehr nahe gelegen. Hier traf er mit Herrn Lamont aus München zusammen, und beide treffliche Astronomen wählten zu dem Orte ihrer Beobachtungen in höchst zweckmässiger Weise einen 500 Schritte östlich von der Stadt nach dem Meere zu gelegenen Garten, wo die Instrumente sicher in einem Gartenhause untergebracht werden konnten, und der, mit hoher Mauer umgeben, Schutz gegen jede Störung gewährte. An Instrumenten stand Herrn Bremiker zu Gebote ein Fernrohr von Steinheil von $3^1/_2$ Fuss Fokallänge und 33 Linien Oeffnung, ein Spiegelsextant mit Quecksilberhorizont von Oertling, und ein Taschenchronometer von Tiede. Der 17te Juli und am 18ten die Zeit vor dem Anfange der Finsterniss ward zur Anstellung aller nothwendigen, im eigentlichen Sinne astronomischen Beobachtungen (natürlich hauptsächlich Zeit- und Breitenbestimmungen) benutzt, dann aber die ganze Aufmerksamkeit der prachtvollen Erscheinung selbst, vor Allem, wie sich von selbst versteht, der Corona und den Protuberanzen zugewandt, wobei alle Umstände den Beobachtungen in jeder Beziehung günstig waren, und die durch dieselben gewonnenen Resultate Zeit und Mühe

und die weite Reise vollkommen lohnten. Die höchst interessante Beschreibung der merkwürdigen Erscheinung in der trefflichen Schrift selbst nachzulesen, müssen wir unseren Lesern überlassen, und wollen denselben nun nur noch die wichtigsten Resultate vorführen, welche Herr Bremiker aus seinen schönen und überaus sorgfältigen Beobachtungen, die in jeder Beziehung für musterhaft gelten können, gezogen hat.

Was zuerst die Corona betrifft, so kann dieselbe durch eine Reflection in der Erdatmosphäre nicht erklärt werden, da bei einem Durchmesser des Kernschattens von 25 Meilen und einer Höhe der Atmosphäre von 10 Meilen sich ein dunkler Hof zeigen müsste, dessen Radius, der Tangente $=\frac{25}{20}$ entsprechend, eine scheinbare Grösse von 51 Grad hätte und dessen Mittelpunkt die schnelle Bewegung des Kernschattens theilte, so dass der Mond während der totalen Finsterniss den Durchmesser oder eine Sehne dieses dunkeln Hofes durchlaufen musste. An eine Beugung des Lichts kann in so grosser Entfernung vom Mondrande gar nicht gedacht werden, und **es findet daher die Corona nur ihre Erklärung in dem Vorhandensein einer Sonnenatmosphäre, welche das Licht des Centralkörpers reflectirt.**

Rücksichtlich der Protuberanzen bemerkt der Herr Verfasser auf S. 16., dass jeder Versuch, die Protuberanzen auf optische Erscheinungen zurückführen zu wollen, auf lauter Widersprüche führt, da nichts wahrgenommen wird, was mit Reflection, Refraction, Inflection oder Interferenz die geringste Aehnlichkeit hätte, abgesehen von den nach verschiedenen Richtungen vom Mondrande ausgehenden Strahlen, welche als Reflection von den Bergwänden oder anderen Unebenheiten des Mondrandes wohl ihre Erklärung finden mögen. **Die Protuberanzen sind daher nach dem Herrn Verfasser — mit Rücksicht auf die obige Erklärung der Corona und in unmittelbarer Verbindung mit derselben betrachtet — als Niederschläge in dem niederen Theile der Sonnenatmosphäre anzusehen, ähnlich unseren Wolken, welche bei geringerer Temperatur als der Centralkörper eine geringere Leuchtkraft besitzen, und die, da an dem Zusammenhange mit den Sonnenflecken nicht mehr gezweifelt werden kann, sich bei starker Blendung auf der Sonnenscheibe als schwarze Flecke projiciren.**

Dem Einwande, dass eine andere Veränderung in den Grössen-Verhältnissen als solche durch die Bewegung des Mondes

bedingt ist, beobachtet oder aus den Beobachtungen abgeleitet sei, ist kein besonderes Gewicht beizulegen, da die Beobachtung unregelmässiger Gestalten und ihrer Positionswinkel, verbunden mit der genauen Zeitangabe, grossen Unsicherheiten unterworfen ist, und die gefundenen Unterschiede in der Schwierigkeit und Hast der Beobachtung ihre Erklärung finden dürften *). Erst, wenn es gelungen sein wird, während der Dauer der totalen Verfinsterung von der ganzen Erscheinung, der Corona sowohl, als den Protuberanzen, eine Menge von Photographien, etwa von 5 zu 5 Secunden, zu nehmen, eine Methode der Beobachtung, worauf bei künftigen Finsternissen die Haupt-Aufmerksamkeit sich richten wird, kann über das Zutreffen der Grössen-Verhältnisse mit der relativen Bewegung des Mondes vor der Sonne ein endgültiges Urtheil gefällt werden.

Mit einer sehr lehrreichen, auf die Lambert'sche Formel gegründeten Betrachtung über die auffallende Helligkeit der Venus während der Finsterniss, welche auf das $\frac{8}{8}$fache der Helligkeit des Jupiters geschätzt wurde und mit ihrer Nähe zur unteren Conjunction nach photometrischen Grundsätzen nicht recht vereinbar schien, schliesst der Herr Verfasser seinen in jeder Beziehung höchst interessanten und lehrreichen Bericht.

So ist denn auch durch die Beobachtungen der nach Spanien gesandten preussischen Expedition in der unzweideutigsten und bestimmtesten Weise die Richtigkeit des schon von O. Struve sehr treffend als

„**Astronomischer Lehrsatz**"

bezeichneten Satzes **) bewiesen worden:

> dass die Corona und die Protuberanzen lediglich der Sonne und nicht dem Monde angehören,

und dass es also auch nach diesen schönen Beobachtungen mit der sogenannten optischen Theorie gar nichts ist. Jedenfalls gebührt dem preussischen Unterrichts-Ministerium und Herrn Doctor Bremiker unser und der Wissenschaft wärmster Dank.

Grunert.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft

---

*) Besonders wenn die Beobachtungen von ungeübten Beobachtern mit ganz mittelmässigen Instrumenten und unter dem Drucke vorgefasster Meinungen angestellt worden sind. G.

**) M. s. Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 11.

der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1860. Juli — December. Vergl. Literar. Ber. Nr. CXXXIX. S. 14.

S. 3. Herr kaiserl. Rath Kulik sprach über eine eigene Vorrichtung, um die Thurmuhren von allen atmosphärischen Einflüssen unabhängig zu machen und ihnen den Gang einer guten Pendeluhr zu verschaffen. Im Interesse des allgemeinen Besten wohl zu beachten. — S. 11. Herr Purkyně theilte wieder mehrere physiologisch-akustische Versuche mit, die wir auch in physikalischer Rücksicht für sehr interessant halten. — S. 18. Herr Pierre hielt einen demonstrativen Vortrag über die Entstehung des Netzhautbildes bei den zusammengesetzten Augen der Gliederthiere. — S. 34. Herr Purkyně über die Verwerthung der bisherigen Beobachtungen im Gebiete des subjectiven Sehens für Anatomie, Physiologie, Physik, Psychologie, Kunst und Gewerbe. — S. 54. Herr Kořistka besprach eine von General Kříz eingelangte, mit mehreren Abbildungen versehene Beschreibung des persischen Astrolabes. Wir haben schon im Liter. Ber. Nr. CXXXIX. S. 16. eine kurze Notiz über dieses altpersische Astrolab mitgetheilt, welches noch gegenwärtig von den persischen Gelehrten gebraucht wird. Von allgemeinem Interesse aus dem vorliegenden neueren Aufsatz dürfte die folgende Ableitung des Worts „Astrolab" bei den Persern sein. Während man bekanntlich gewöhnlich die Wurzel in den griechischen Worten *αστρον* und *λαμβανω* sucht, erzählen die persischen Mollah's, dass vor etwa 2000 Jahren ein persischer Herrscher Hurmuz einen Sohn Namens Lab gehabt, der sich viel mit Astronomie befasst haben soll. Eines Tages brachte man Jenem eine astronomische Arbeit seines Sohnes. „Man asteraha?" (wer hat dies geschrieben?) fragte Hurmuz arabisch. „Asteraha Lab" (Lab hat es geschrieben) lautete die Antwort, woraus Astrolab gebildet worden sein soll. — S. 55. In diesem Archiv. Thl. XXVII. S. 275. hat Herr Kořistka ein Instrument, Höhenwinkel durch Reflexion zu messen, beschrieben, welches er Reflexions-Hypsometer genannt hat. In den vorliegenden Sitzungsberichten giebt er eine kurze Notiz über ein von ihm construirtes Nivellir-Instrument sammt Stativ, welches auf Reisen, namentlich bei Höhenmessungen wie jenes frühere Instrument vortheilhaft gebraucht werden kann, aber vor diesem älteren Instrumente mehrere wesentliche Vorzüge hat. Als Stativ verwendet Herr K. ein System von hohlen Eisenblech-Röhren, deren Widerstand gegen Seitendruck und Torsion eine hinreichende und deren Leichtigkeit im Vergleich zu den massi-

ven Holzstativen eine so bedeutende ist, dass sich Herr K. für die Folge eine ausgebreitete Anwendung derselben bei Stativen verspricht. Künstler scheinen hierauf aufmerksam zu machen sein.

Anzeige und Bitte.

Als ich mit der Bearbeitung meiner Tafeln bestimmter Integrale beschäftigt war, habe ich an das mathematische Publicum die Bitte gerichtet, mir zur Erreichung möglichst grosser Vollständigkeit die hie und da erschienenen Monographieen über diese Functionen zusenden zu wollen; einige Journale haben diese Aufforderung damals aufgenommen. Vor der Herausgabe der Tafeln ist mir nichts zugekommen. Denjenigen aber, die mir später ihre werthvollen Abhandlungen zusendeten, statte ich hier nochmals meinen verbindlichsten Dank ab, so wie auch denen, die mir die Recensionen der genannten Arbeit zukommen zu lassen die Güte hatten.

Da ich nun durch die, meine Erwartungen in dieser Hinsicht sehr übertreffende Abnahme der „Tables d'Intégrales définies (publié par l'Académie Royale des sciences. Amsterdam), wodurch die Auflage fast erschöpft worden ist, zu einer neuen, gänzlich umgearbeiteten Ausgabe schreiten muss, zu der mir ausser der ersten Auflage noch einiges Material zu Gebote steht, so rufe ich noch einmal die freundliche Hilfe der Sachverständigen in zweifacher Rücksicht an und bitte sie:

1⁰ die betreffenden Abhandlungen, insoweit sie in den Tables u. s. w. S. 21, 22 nicht citirt und also nicht benutzt worden sind,

2⁰ die kritischen Recensionen, insofern die Herren Referenten sie mir schon zu übersenden noch nicht die Güte hatten, mir auf dem Wege des Buchhandels schicken zu wollen: erstens um bei der genannten zweiten Auflage möglichst grosse Vollständigkeit zu erzielen, und zweitens um von allen Winken, wo es angeht und erspriesslich scheinen möchte, einen nützlichen Gebrauch machen zu können.

Das meinem Unternehmen zu Theil gewordene grosse Interesse, und die, ich darf wohl sagen, überaus günstige Aufnahme desselben von Seiten der Academieen und wissenschaftlichen Journale ermuthigen mich zu diesem Schritte sowohl, als auch zu der nicht geringen Arbeit einer Umarbeitung dieses Werkes.

Deventer in den Niederlanden Februar 1861.

Dr. H. Bierens de Haan.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLII.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

J. R. Boyman, Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und höhere Bürgerschulen. 3. Thl.: Arithmetik. gr. 8°. geh. Cöln und Neuss. $22\frac{1}{2}$ Ngr.

H. G. Doerk, Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen. 2. Aufl. I. Bd.: Arithmetik und Algebra. 2. Thl.: Algebra. gr. 8°. geh. Berlin. 18 Ngr.

H. G. Doerk, Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen. II. Bd. I. Thl.: Planimetrie u. Trigonometrie. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Berlin. 21 Ngr.

D. Giffhorn, Leitfaden der elementaren Mathematik für Gymnasien, höhere Bürger- und Gewerbeschulen. 1. Abth.: Leitfaden der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. gr. 8°. geh. Braunschweig. 24 Ngr.

Arithmetik.

J. Fiedler, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauch für Gymnasien und höhere Bürgerschulen. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Leobschütz. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

J. P. Hirsch, Das metrische oder Decimal-System. Praktisch-theoretische Darstellung desselben unter Berücksichtigung aller europäischen Münz-, Maass- und Gewichts-Verhältnisse. 8°. geh. Berlin. 12 Ngr.

A. Mayr, Grundlegung der Theorie des Variations-Calculs. Lex.-8°. Würzburg. 24 Ngr.

Sm. Spitzer, Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. 1. Fortsetzung. Wien. 8°. 20 Ngr.

Geometrie.

F. W. Becker, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 2. Thl. 2. Abth.: Darstellende Geometrie. gr. 8°. geh. Oppenheim a. R. 1 Thlr.

H. Escher, Die mathematischen Verhältnisse der Kreislinie. gr. 8°. geh. Zürich. 4 Ngr.

C. P. A. Leroy, Die Stereometrie [Lehre vom Körperschnitte], enthaltend die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf die Schattenlehre, Linearperspective etc. Aus dem Franz. bearbeitet von C. F. Kauffmann. 2. Ausg. 2.—6. Lief. gr. 4°. Mit Atlas in Fol. geh. Stuttgart. à $\frac{3}{4}$ Thlr.

J. T. Sahling, Geometrische Constructions-Aufgaben. Gesammelt und bearbeitet als Handbuch f. d. Lehrer, zugleich als Hülfsbuch zur eigenen Ausbildung im Construiren. gr. 8°. geh. Kiel. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

G. Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Unter Mitwirkung des Verf. deutsch bearbeitet von W. Fiedler. Leipzig. 8°. Mit eingedr. Holzschn. 4 Thlr.

F. H. Schroeder, Elemente der Planimetrie und Stereome-

trie für den Unterricht an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. gr. 8⁰. geh. Hannover. ½ Thlr.

Mechanik.

G. Decher, Handbuch der rationellen Mechanik. 4. Bd.: Mechanik flüssiger Systeme. gr. 8⁰. geh. Augsburg. 2 Thlr.

Astronomie.

Annales de l'Observatoire impérial de Paris, publiées par U. J. Le Verrier. Observations. Tome XII. Paris. 4⁰. 13 Thlr. 10 Ngr. Band 3—11 erscheinen später.

Atlas des nördlichen gestirnten Himmels für den Anfang des Jahres 1855 entworfen auf der königl. Sternwarte zu Bonn. 6. Lief. qu. Imp.-Fol. Bonn. 3 Thlr.

J. Lamont, Annalen der königl. Sternwarte zu München. 12. Bd. [d. vollst. Sammlg. 27. Bd.] gr. 8⁰. geh. München. 1⅔ Thlr.

G. Rümker, Die totale Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860 beobachtet zu Castellon de la Plana. 4⁰. cart. Hamburg. 20 Ngr.

R. Wolff, Die Sonne und ihre Flecken. Vortrag. gr. 8⁰. geh. Zürich. 10 Ngr.

Physik.

Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben von Poggendorff. Jhrg. 1861., No. 1. gr. 8⁰. Leipz. Preis f. d. Jahrg. 9⅓ Thlr.

Babinet, Études et lectures sur les sciences d'observation et leurs applications pratiques. Tome VI. Paris. 12⁰. 25 Ngr.

Ch. Drion et Ém. Fernet, Traité de Physique élementaire, suivi de problèmes. Avec figures dans le texte. I. Abth. 18. Paris. 1 Thlr. 2 Ngr.

Allgemeine Encyklopädie der Physik. Bearbeit. v. C. W. Brix, G. Decher, F. C. O. v. Feilitzsch, F. Grashof, F. Harms etc. Herausg. v. Gst. Karsten. 8. Lief. Leipzig. 8⁰. Mit eingedr. Holzschn. u. Taf. 5 Thlr. 20 Ngr.

> Inhalt. 9. Bd.: Physiologische Optik von H. Helmholtz. p. 337—432. Mit eingedr. Holzschn. — 21. Bd.: Lehrb. der Meteorologie, bearb. von E. Erhard Schmid. XVI, p. 785—1009. Mit eingedr. Holzschn., 1 Tab. u. 21 Kpfrtaf. (Schl.) cplt. einzeln: 13 Thlr.

Th. Hopkins, On Winds and Storms: with an Essay on Weather and its Varieties. London. 8⁰. 3 Thlr.

M. F. Maury, The Physical Geography of the Sea, and its Meteorologie: being a reconstruction and enlargement of the Eighth Edition of „The Physical Geography of the Sea". London. 8⁰. 4 Thlr. 24 Ngr.

J. Müller, Lehrbuch der kosmischen Physik. 2. wesentl. verb. u. verm. Aufl. Mit 302 in den Text gedr. Holzschn. u. einem Atlas von 33 Stahlst.-Taf., zum Theil in Farbendr. (Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 3. Bd.) Braunschweig. 8⁰. XVII, 567 pp. 4 Thlr.

J. F. J. Schmidt, Beiträge zur physikalischen Geographie von Griechenland. I. 4⁰. Athen. 4 Thlr.

S. Subik, Physikalische Abhandlung über die Zusammensetzung fortschreitender und drehender Bewegungen und ihre Anwendung zur Erklärung der Aberration des Lichts, des Foucault-schen Pendelversuchs etc. gr. 8⁰. geh. Pesth. ½ Thlr.

Literarischer Bericht
CXLIII.

Am 5ten April 1861 starb in Breslau der ordentliche Professor der Mathematik an der dortigen Universität

Dr. Ferdinand Joachimsthal,

geboren 1818 zu Goldberg in Schlesien, ein Verlust für die Wissenschaft, den mit uns jeder Mathematiker tief empfinden wird.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Zehnter Jahrgang 1860.

Der neunte Jahrgang dieses Almanachs, auf dessen Wichtigkeit in literarischer Beziehung wir schon mehrmals aufmerksam gemacht haben, ist im Literar. Ber. Nr. CXXXVII. S. 4. von uns angezeigt worden. Der vorliegende zehnte Jahrgang enthält ausser den gewöhnlichen Mittheilungen wiederum einen sehr interessanten Vortrag des Präsidenten der Akademie Herrn Freiherrn von Baumgartner: Ueber Grundgesetze der Naturwissenschaft und ihre Geltung im praktischen Leben, der sich mit grösster Sachkenntniss über die verschiedensten Theile der Naturwissenschaft verbreitet; dann den Bericht des General-Sekretärs Herrn Dr. Anton Schrötter über die weitere höchst erfolgreiche Thätigkeit der Akademie in dem letzten Jahre im Allgemeinen, so wie dessen Bericht über die mathematisch-

naturwissenschaftliche Klasse insbesondere, worin sich auch eine interessante Beschreibung der für die Wissenschaften so wichtigen Weltumsegelung der Novara und Lebensbeschreibungen von Bordoni und Grailich befinden, in denen auch Verzeichnisse der Schriften dieser so verdienten Mathematiker und Physiker mitgetheilt werden.

Beitrag zur Feststellung des Verhältnisses von Keppler zu Wallenstein. Von Otto Struve, Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg. Gelesen am 8. April 1859. St. Petersburg. 1860. 4°.

In den astronomischen Nachrichten Nr. 1178. suchte der Herr Gymnasiallehrer Dr. Michael in Sagan aus einem in Sagan aufgefundenen Actenstücke nachzuweisen, dass Keppler nie eigentlich im Dienste Wallensteins gestanden habe, wie es von Breitschwert, dem Biographen Keppler's, behauptet wird. Dadurch ward Herr Otto Struve veranlasst, die in Pulkowa befindliche Sammlung Keppler'scher Manuscripte in Bezug auf diesen Gegenstand näher zu untersuchen.

Herr O. Struve erzählt zuerst in sehr interessanter Weise die Geschichte der Wanderungen dieser wichtigen und merkwürdigen Manuscripte, und theilt dann aus dem XVIIIten Bande derselben drei Briefe Wallenstein's an Keppler mit, die in vieler Beziehung, auch in allgemein historischer Rücksicht, z. B. in Betreff des Ursprungs des Misstrauens Wallenstein's gegen den König von Ungarn, den nachmaligen Kaiser Ferdinand III., höchst interessant sind. Durch diese Briefe und andere aus den gedachten Manuscripten gemachte Mittheilungen wird zwar im Allgemeinen die Ansicht des Dr. Michael, dass nämlich Keppler nicht geradezu in des Herzogs von Fridland Diensten gestanden habe, bestätigt, indem jedoch auf der anderen Seite aus diesen Actenstücken auch hervorgeht, dass zwischen Beiden enge Beziehungen stattgefunden haben müssen, welche zu gegenseitigen Leistungen verpflichteten. Dass Keppler's Leistungen, dem Herzog gegenüber, sich hauptsächlich auf die Astrologie bezogen, versteht sich von selbst, und aus dieser überaus lesenswerthen Abhandlung das Verhältniss Keppler's zu derselben näher kennen zu lernen, ist höchst interessant, weshalb wir unsere Leser dringend auf diese für die Geschichte der Mathematik, insbesondere der Astronomie, wichtige Schrift des geehrten Herrn Verfassers aufmerksam machen, und dieselbe deren Beachtung recht sehr empfehlen, in demuns hier leider der Raum zu weiteren Auszügen

fehlt. — Ein ganz besonderes Interesse verleiht der Herr Verfasser seiner so verdienstlichen Schrift noch dadurch, dass er in einem Anhange auf S. 13. — S. 36. zwei von Keppler für Wallenstein gestellte Prognostica vollständig mittheilt, von denen das kürzere sich zwar schon im ersten Bande der von Professor Frisch besorgten Ausgabe der Keppler'schen Werke befindet, hier aber verschiedener Varianten wegen, wie sich dieselben in den Pulkowaer Manuscripten finden, sehr zweckmässig von Neuem abgedruckt worden ist. Wir danken Herrn O. Struve recht sehr für diesen überaus werthvollen Beitrag zu der Geschichte unserer Wissenschaft. Grunert.

Arithmetik.

Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen und Antilogarithmen. Mit einer Sammlung von Tabellen und Formeln für wissenschaftliche, technische und Schulzwecke in neuer Anordnung von Dr. Fr. Lukas. Wien. Helf. 1860. 12°. 1 Thlr.

Diese kleinen fünfstelligen Tafeln sind auf sehr schönes und starkes Papier, und mit sehr deutlicher und scharfer Schrift gedruckt, überhaupt sehr elegant ausgestattet. Ausser den gewöhnlichen Tafeln der Logarithmen der Zahlen und der Winkelfunctionen enthalten sie auch die Antilogarithmen und noch eine grosse Anzahl anderer nützlicher Tafeln aus dem Gebiete der reinen Mathematik, der Physik, der Astronomie und Technik, im Ganzen 28 Tafeln, wie z. B. Tafeln für mittlere Refraction, Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit und umgekehrt, Vergleichung der Thermometerscalen nach Celsius, Réaumur und Fahrenheit, Reduction des Barometers auf 0° R., Psychrometertafeln nach August, Reduction der Aräometergrade nach Baumé auf das specifische Gewicht bei 15° R., Tafeln zum Höhenmessen mit dem Barometer nach Gauss, Aequivalente chemischer Grundstoffe, Ausdehnung einiger Körper durch die Wärme, Specifische Gewichte, Maasse und Gewichte, u. s. w. Zugleich ist ein bei anderer Gelegenheit (Literar. Bericht Nr. CXXXVIII. S. 13.) von uns ausgesprochener Wunsch in diesen Tafeln wenigstens theilweise erfüllt worden, indem Taf. V. auch die wirklichen numerischen Werthe der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten enthält. Diese Tafel schreitet aber leider nur von 15 zu 15 Minuten fort, was für den bequemen Gebrauch nicht ausreicht, welcher ein Fortschreiten durch die einzelnen Minuten fordert. Dann aber müssen solche Tafeln

nothwendig auch die Secanten und Cosecanten enthalten, weil diese Functionen $\sec = \frac{1}{\cos}$, $\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$ dienen, die häufig vorkommenden Divisionen durch den Cosinus und Sinus in die leichteren Multiplicationen resp. mit der Secante und der Cosecante zu verwandeln, was natürlich für den bequemen praktisen Gebrauch von grosser Wichtigkeit ist. Wir wünschen daher recht sehr, dass bei einer neuen Ausgabe seiner Tafeln der Herr Verfasser eine durch die einzelnen Minuten fortschreitende Tafel der wirklichen Werthe der Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten beifüge, welche in der Praxis in sehr vielen Fällen von dem vortheilhaftesten Gebrauch sein kann. Die trefflichen, namentlich sehr correcten Tafeln von Sherwin*) würden nur eine Verkürzung auf fünf Decimalstellen erfordern, um eine solche Tafel mit grösster Leichtigkeit construiren zu können. Wir wünschen dem hübschen Büchlein sorgfältige Beachtung. Leider scheint der Preis von 1 Thlr. zwar nicht an sich, aber im Verhältniss zu dem anderer Tafeln etwas hoch zu sein, und dürfte der zu wünschenden weiteren Verbreitung einigermassen hindernd entgegen treten.

Geometrie.

Des Apollonius von Perga sieben Bücher über die Kegelschnitte nebst dem durch Halley wiederhergestellten achten Buche. Deutsch bearbeitet von H. Balsam. Dabei ein Anhang, enthaltend: Die auf die Geometrie der Kegelschnitte bezüglichen Sätze aus Newton's „philosophiae naturalis principia mathematica.“ Mit 31 Figurentafeln. Berlin. G. Reimer. 1861. 8°.

Wir danken Herrn H. Balsam für diese sehr gute Uebersetzung oder vielmehr Bearbeitung, welche von der verdienstlichen Verlagshandlung auch äusserlich sehr gut ausgestattet worden ist, der vollständigen acht Bücher des apollonischen Meisterwerks

---

*) Das jetzt seltene Buch hat den Titel: Sherwin's Matematical Tables. The third edition. Carefully revised and corrected by William Gardiner. London 1742. 8., wobei wir bemerken, dass es darauf ankommt gerade diese Ausgabe zu benutzen, weil die neueren Ausgaben von Clark äusserst fehlerhaft gedruckt sind.

über die Kegelschnitte im Interesse der Wissenschaft recht sehr, und finden es auch ganz zweckmässig und angemessen, dass der Herr Bearbeiter sich nicht sclavisch dem Wortlaut des Originals angeschlossen, sondern sich einer freieren, der neueren Wissenschaft mehr anschliessenden Bearbeitung bedient hat. Ein gleiches Verfahren haben auch die früheren Bearbeiter, insbesondere Barrow in seiner sehr guten, unter dem Titel: Apollonii Conica: methodo nova illustrata et succincte demonstrata. Per Isaacum Barrow. Londini 1675. 4°. erschienenen Bearbeitung der vier ersten Bücher, welche bekanntlich allein noch im Original vorhanden sind, befolgt; und Barrow hat sich, wie schon der Zusatz „succincte demonstrata" auf dem Titel andeutet, noch viel grössere Freiheiten erlaubt, als der jetzige Herr Herausgeber. Die vier ersten Bücher sind, wie schon erwähnt im Original, die die drei folgenden in einer arabischen Uebersetzung vorhanden, und das achte ist von Halley nach der kurzen von Pappus gegebenen Anzeige wiederhergestellt. Die schönste lateinische Ausgabe aller acht Bücher, die vier ersten zugleich griechisch, hat Halley (Oxoniae 1710. Fol.) geliefert, und als eine neue Bearbeitung in deutscher Sprache dieser sehr schönen und seltenen lateinischen Ausgabe von Halley ist Herrn Balsams verdienstliches Werk zu betrachten. Mit Dank muss auch von denen, die Newton's „Principien" nicht besitzen, die Mittheilung der in diesem unsterblichen Werke des menschlichen Geistes enthaltenen Sätze über die Kegelschnitte aufgenommen werden, so wie auch das sehr vollständige Inhaltsverzeichniss des apollonischen Werks auf S. 328.—S. 354. die Uebersicht wesentlich erleichtert. Herausgeber und Verleger verdienen jedenfalls den wärmsten Dank für diese Bereicherung der deutschen mathematischen Literatur, die wir zur sorgfältigsten Beachtung dringend empfehlen.

Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado, sunto di una memoria letta dal Prof. L. Cremona all' Accad. delle Scienze dell' Instituto di Bologna ai 7 di Marzo 1861. Bologna 1861.

Wir zeigen diese kurze Analyse einer vor Kurzem in dem Institut zu Bologna gelesenen, wie es scheint, sehr interessanten Abhandlung des Herrn Professor Luigi Cremona über eine Curve, durch welche nur eine Fläche des zweiten Grades geht, die in den Schriften des genannten Instituts erscheinen wird, und auf die wir, so bald sie in unsere Hände gelangt, zurückkommen wer-

den, hier für jetzt nur an, um auf die betreffende Abhandlung selbst vorläufig aufmerksam zu machen.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. (S. Literar. Ber. Nr. CXXXVII. S. 13., wobei bemerkt wird, dass dort durch ein Versehen nicht angezeigt worden ist, dass die Hefte 17, 18, 20, 22 zu Thl. XXXVII., die Hefte 23, 24, 25 zu Thl. XXXVIII. gehören).

Band XXXVIII. 1859.

Nr. 26. Friesach: Astronomische und magnetische Beobachtungen in Amerika, angestellt in den Jahren 1857, 1858, 1859 S. 593. — Fritsch: Ueber die Störungen des täglichen Ganges einiger der wichtigsten meteorologischen Elemente an Gewittertagen (mit 1 Tafel). S. 633. — Allé: Ueber die Bahn der Nemausa. S. 749.

Nr. 27. Murmann: Ueber die Bahn der Europa (Fortsetzung). S. 821. — Strauch: Auszug aus der Abhandlung: „das umgekehrte Problem der Brennlinien.“ S. 861.

Nr. 28. Löwy: Ueber die Bahn der Eugenia. S. 1025.

Band XXXIX. 1860.

Nr. 1. Schmidt: Ein Beitrag zur Mechanik der Gase. S. 41. — Wüllerstorf-Urbair: Ueber das Verhalten und die Vertheilung der Winde auf der Oberfläche der Erde, so wie insbesondere über die Windverhältnisse am Cap Horn (mit 6 Tafeln). S. 105.

Nr. 4. Reitlinger: Ueber die Einwirkung der Elektricität auf Springbrunnen. S. 590.

Nr. 5. v. Littrow: Andeutungen über astronomische Beobachtungen bei totalen Sonnenfinsternissen. S. 625. — Derselbe: Physische Zusammenkünfte der Asteroiden im Jahre 1860. S. 635. — Knochenhauer: Ueber das elektrische Luftthermometer. S. 701.

Band XL. 1860.

Nr. 7. v. Littrow: Ueber das Mikrometer mit lichten Linien bei den Wiener Meridian-Instrumenten. S. 27. — v. Sonklar: Ueber die Aenderungen der Temperatur mit der Höhe.

S. 58. — **Pohl**: Ueber mikroskopische Probeobjecte, insbesondere Nobert's Testobject-Platte. S. 63.

Nr. 12. **Helmholtz** und v. **Piotrowski**: Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. S. 607.

Band XLI. 1860.

Nr. 13. **Löffler**: Beitrag zum Probleme der Brachystochrone. S. 53.

Nr. 14. **Hornstein**: Ueber die Helligkeitsmessungen bei kleinen Fixsternen. S. 261. — **Sonndorfer**: Ephemeriden für die Helligkeit der Asteroiden im Jahre 1860. S. 271. — **Odstrčil** und **Studnička**: Ueber elektrische Entladung und Induction. S. 302.

Nr. 16. **Reitlinger**: Zur Erklärung der Lichtenbergischen Figuren. S. 358. — **Kreil**: Beitrag zur Klimatologie von Central-Afrika. S. 377.

Nr. 17. v. **Lang**: Ueber das Gesetz der rationalen Verhältnisse der Tangenten tautozonaler Krystalle. S. 525. — **Niemtschik**: Ueber die directe Construction der schiefaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln. S. 535. — **Mach**: Ueber die Aenderung des Tones und der Farbe durch die Bewegung. S. 543.

Nr. 18. **Petzval**: Angström's experimentelle Untersuchungen über das Spectrum des elektrischen Funkens in Beziehung auf die Farben der Doppelsterne. S. 581.

Nr. 19. **Winckler**: Einige allgemeine Sätze zur Theorie der Reihen. S. 675. — **Petzval**: Ueber Professor A. **Müller**'s Discussionsmethode der algebraischen Flächen höherer Ordnungen. S. 735.

Nr. 20. **Reitlinger**: Zur Erklärung des Lullin'schen Versuches und einiger anderen Artunterschiede der positiven und negativen Elektricität. S. 759. — **Schrauf**: Bestimmung der optischen Constanten krystallisirter Körper. I. Reihe. S. 769.

Band XLII. 1860.

Nr. 21. **Dauber**: Ermittelung krystallographischer Constanten und deren Zuverlässigkeit. S. 19.

Nr. 22. **Schrauf**: Bestimmung der optischen Constanten krystallisirter Körper. II. Reihe. S. 107. — **Schönfeld**: Beobachtungen von veränderlichen Sternen. S. 146. — v. **Littrow**: Ueber Herrn M. Eble's graphische Methoden der Auflösung sphärischer Dreiecke mit besonderer Rücksicht auf sein neuestes „Stundenzeiger“ oder „Horoskop“ genanntes Instrument. S. 203.

Nr. 24. Mittheilung des Herrn **Buys Ballot**, Directors des

meteorologischen Instituts in Utrecht. S. 299. — Weiss: Ueber die Bahn der Ariadne. S. 371.

Nr. 25. und 26. Murmann: Ueber die Bahn der Europa (Fortsetzung). S. 432. — v. Waltenhofen: Ueber die Stromrichtung der Nebenschliessungen zusammengesetzter Ketten. S. 439.

Nr. 27. Hornstein: Elemente und Oppositions-Ephemeriden (1861) der Calliope. S. 519. — Reslhuber: Bericht über die im Jahre 1859 auf dem magnetischen Observatorium zu Kremsmünster beobachteten Störungen. S. 533. — Derselbe: Vorläufige Mittheilung über die Bewölkungsverhältnisse des Himmels.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4^{0}. (S. Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 20.)

Nr. 4. (Luglio e Agosto 1860). Sulla riduzione di un' integrale alle funzioni ellitiche. Nota del Prof. B. Tortolini (Continuazione e fine). p. 193. — Intorno alla moltiplicazione d'alcune forme quadratiche. Nota di Angelo Genocchi. p. 202. — Sopra la teorica dei numeri congrui. Nota di F. Woepcke. p. 206. — Sopra una trasformazione dell' integrale ellittico. Nota di F. Brioschi. p. 216. — Discorso commemorativo su Gustavo Pietro Lejeune Dirichlet pronunciato da E. E. Kummer. Traduzione dal tedesco di Felice Casorati. p. 221.

Rivista bibliographica. Sopra la propagazione delle onde piane di un gaz, di E. Betti. p. 232. — Sulle superficie di second' ordine omofocali, di L. Cremona. p. 241. — Lezioni di Meccanica rationale di O. F. Mossotti. La Statica dei sistemi di forma invariabile di F. Brioschi. — Elementi di Meccanica razionale di D. Chelini delle Scuole Pie. Articolo di Giovanni Novi. p. 245. — Sopra un teorema di Geometria. Nota di Alessandro Dorna. p. 252. — Intorno ad alcuni integrali definiti. Articolo di F. Brioschi. p. 254.

Académie des sciences de Paris.

Grand prix de mathématiques pour 1862.

Résumer, discuter et perfectionner en quelque point important les resultats obtenus jusqu'ici sur la théorie des courbes planes du quatrième ordre.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLIII.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

H. G. Doerk, Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen. II. Bd. 2. Thl.: Lehrbuch der Stereometrie, sphärischen Trigonometrie und analytischen Geometrie. gr. 8°. geh. Berlin. 24 Ngr.

L. Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch. 14. u. 15. Lief. gr. 8°. Berlin. à 20 Ngr.

Arithmetik.

Aloys Mayr, Grundlegung der Theorie des Variations-Calcüls. Würzburg. 8°. Mit eingedr. Holzschn. 24 Ngr.

G. Biddell Airy, On the Algebraical and Numerical Theory of Errors of Observations and the Combination of Observations. London. 8°. 2 Thlr. 18 Ngr.

W. Berkhan, Die Anwendung der Geometrie auf Arithmetik und Algebra, enthaltend die wichtigsten Lehrsätze der Arithmetik und Algebra durch geometrische Constructionen dargestellt, mit Hinweisung auf Wiegand's Lehrbuch der Arithmetik. gr. 8°. geh. Halle a. d. S. 24 Ngr.

Duhamel, Éléments de calcul infinitésimal. 2e édition. Tome II. Paris. 8°. Mit 1 Taf. Preis beider Bände 4 Thlr.

E. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. Lex.-8°. geh. Berlin. $1\frac{5}{6}$ Thlr.

C. J. Dn. Hill, Matheseos fundamenta nova analytica. Pars I.: Mathesin universalem, in usum praelectionum adornatam, comprehendens. Londini Gothorum. Greifswald. 4°. 2 Thlr. 10 Ngr.

E. Meissel, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten bearbeitet. gr. 8°. geh. Berlin. 1 Thlr. 25 Ngr.

J. B. Montag, Populäres Handbuch zur leichten und schnellen Selbsterlernung der Buchstabenrechnung und Algebra. Ein Commentar zu Meyer-Hirsch's Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Theoret. Theil. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Braunschweig. 27 Ngr.

F. Rummer, Die Buchstabenrechnung und Lehre von den Gleichungen. Mit einer Sammlung von Aufgaben. 1. Thl. 3. Aufl. gr. 8°. geh. Heidelberg. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

S. Spitzer, Ueber Münz- und Arbitragen-Rechnung. gr. 8°. Wien. geh. 1 Thlr. 4 Ngr.

A. Timmermans, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. 2e édit. Gand et Bruxelles. 8°. 3 Thlr. 5 Ngr.

F. Villicus, Vollständiges Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für Unter-Realschulen. 1. Thl. Für die 1. Klasse der Unterrealschule. gr. 8⁰. geh. Wien. $^1/_2$ Thlr.

A. Zillmer, Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Renten-Versicherungen, systemat. entwickelt. Berlin. 4⁰. 2 Thlr.

Geometrie.

Apollonius v. Perg , Sieben Bücher über Kegelschnitte nebst dem durch Halley wieder hergestellten achten Buche. Deutsch bearb. von H. Balsam. Dabei ein Anhang, enth.: Die auf Geometrie der Kegelschnitte bezüglichen Sätze aus Newton's „philosophiae naturalis principia mathematica." Mit 31 Figurentafeln. Berlin. 8⁰. 3 Thlr. 10 Ngr.

C. Fliedner, Lehrbuch der ebenen Geometrie in Verbindung mit einer Aufgabensammlung zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. gr. 8⁰. geh. Marburg. 25 Ngr.

C. Kehr, Praktische Geometrie für Volks- und gewerbliche Fortbildungsschulen. Auf das Princip der Anschauung gegründet, in heurist. Lehrform dargestellt. gr. 8⁰. geh. Gotha. 28 Ngr.

The Quadrature of the Circle. Correspondence between an eminent Mathematician and James Smith. 8⁰. London. Cloth. 10 s. 6 d.

C. R. M. Talbot, Sir Isaac Newton's Enumeration of Lines of the Third Order, Generation of Curves by Shadows, Organic Description of Curves, and Construction of Equations by Curves. Translated from the Latin. With Notes and Examples. London. 8⁰. Mit 14 Taf. und 66 Holzschn. 4 Thlr. 6 Ngr.

F. Wolff, Die beschreibende Geometrie, die geometrische Zeichenkunst und die Perspektive. 3. Aufl. gr. 8⁰. Mit Atlas in gr. 4⁰. geh. Berlin. $3^2/_3$ Thlr.

Trigonometrie.

K. E. Zetzsche, Die Elemente der ebenen Trigonometrie. gr. 8⁰. geh. Altenburg. 16 Ngr.

Mechanik.

G. Decher, Handbuch der rationellen Mechanik. 4. Bd. Mechanik flüssiger Systeme. Mit 2 Steintaf. Augsburg. 8⁰. 2 Thlr.

C. Holtzmann, Lehrbuch der theoretischen Mechanik. gr. 8⁰. geh. Stuttgart. 2 Thlr. 6 Ngr.

Gst. Schmidt, Die Gesetze und die Kräfte der relativen Bewegung in der Ebene. Vorgetragen am ausserordentlichen Maschinenbaucurs an der k. k. Montan-Lehranstalt in Pribram 1859/60. Mit Holzschn. Wien. 8⁰. 16 Ngr.

Sturm, Cours de mécanique de l'École polytechnique, publié d'après le voeu de l'auteur par E. Prouhet. Tome I. In-8. Paris. les 2 vols. 12 fr.

Praktische Mechanik.

Perpetuum Mobile: or, Search for Self-motive Power during the 17th, 18th, and 19th Centuries, illustrated from various authentic Sources in Papers, Essays, Letters, Paragraphs, and numerous Patent Specifications, with an Introductory Essay by H. Dircks. London. 8⁰. 4 Thlr. 6 Ngr.

Astronomie.

Annales de l'Observatoire impérial de Paris, publiées par U. J. Le Verrier. Observations. Tome XIII. Paris. 4⁰.

Atlas des nördlichen gestirnten Himmels für den Anfang des Jahres 1855, entworfen auf der Königl. Sternwarte zu Bonn. [Von F. Argelander.] 6. Lief. Bonn. Fol. 4 lithogr. Taf. 3 Thlr.

F. Braun, Le monde céleste en tableaux transparents; atlas in-4. de 30 pl. représentant les constellations des étoiles; accompagné d'une carte transparente du ciel et d'un texte explicatif. Bruxelles.. 8 Thlr.

C. Bruhns, Astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwickelung dargestellt. Lex.-8⁰. geh. Leipzig. 1⅓ Thlr.

Handatlas der Erde und des Himmels. Neu redig. Ausgabe. 55—57. Lief. Imp.-Fol. à 10 Ngr. — Volks-Ausgabe. Imp.-Fol. 21—25. Lief. à 8 Ngr. Weimar.

H. Hoek, Recherches astronomiques de l'observatoire d'Utrecht. 1. Liv. De l'influence des mouvements de la terre sur les phénomènes fondamenteaux de l'optique dont se sert l'astronomie. gr. 4⁰. Mit 2 gelith. uitsl. platen. La Haye. 2 fr. 50 c.

J. H. Mädler, Die Fixsternwelt. 2. Aufl. des Werkes: Ueber die Fixsterne im Allgemeinen und die Doppelsterne insbesondere, ergänzt durch einen Nachtrag der neuesten Erforschungen auf diesem Gebiete, nebst 3 Tab. und 1 Sternkarte. Berlin. 8⁰. 22½ Ngr.

G. D. E. Meyer, Ueber die totale Sonnenfinst. am 18. Juli 1860. 4⁰. Kiel. 12 Ngr.

Publications de l'observatoire d'Athènes. IIᵉ Série, tome 1.: Beiträge zur physikalischen Geographie von Griechenland von J. F. Jul. Schmidt. 3 Hfte. Athen. 4⁰. 4 Thlr.

M. Riedig, Sternkarten in 20 Blättern nach Bode's Uranographie in kleinerem Maassstabe dargestellt. 2. Aufl. qu. gr. 4⁰. geh. Leipzig. 15 Ngr.

G. Rümker, Die totale Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860. Beobacht. zu Castellon de la Plana. Hamb. 4⁰. Mit 1 Chromolith. 20 Ngr.

Nautik.

C. Bremiker, Annuaire nautique ou éphémérides et tables complètes pour l'an 1863 pour déterminer la longitude, la latitude et le temps dans la navigation etc. gr. 8⁰. geh. Berlin. 15 Ngr.

C. Bremiker, Nautisches Jahrbuch od. vollst. Ephemeriden

u. Tafeln f. d. Jahr 1863 zur Bestimmung der Länge, Breite u. Zeit zur See, nach astronom. Beobachtungen. gr. 8°. geh. Berlin. 15 Ngr.

F. J. Stamkart, De regeling van kompassen aan boord van ijzeren en houten schepen. gr. 8°. Met 5 gelith. platen. Amsterdam. 5 fr.

Physik.

J. K. Baehr, Der dynamische Kreis. Die natürliche Reihenfolge der Elemente und zusammengesetzten Körper als Resultat der Beobacht. ihrer dynam. Wirksamk. 2. Lief. gr. 4°. Dresden. $3^1/_2$ Thlr.

Gi. Capelli, Osservazioni Meteorologiche eseguite nella R. Specola astronomica di Milano negli anni 1858—59. Milano. 4°. 6 Thlr. 20 Ngr.

C. Sb. Cornelius, Die Theorie des Sehens und räumlichen Vorstellens. Vom physikalischen, physiologisch. u. psychologisch. Standpunkte aus betrachtet. Mit 191 Holzschn. Halle. 8°. 4 Thlr.

Ch. Drion et M. Fernet, Traité de physique élémentaire, suivi de problèmes. 1. Partie. In-12. Avec figures dans le texte. Paris. 4 fr.

Allgemeine Encyclopädie der Physik. Bearb. von Brix etc. 9. Lief. Lex.-8°. geh. Leipzig. 2 Thlr. 20 Ngr.

K. Kreil, Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus. 7. Bd. Jahrg. 1855. Imp.-4°. geh. Wien. 8 Thlr.

G. Lamé, Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. Paris. 8°. Mit in den Text gedr. Holzschn. 2 Thlr. 5 Ngr.

G. Landgrebe, Grundzüge der physikalischen Erdkunde. 1. Bd.: Geologie. 2 Thle. Leipzig. 8°. 4 Thlr. 15 Ngr.

L. Matthiessen, Ueber die Anordnung der Elektricität auf isolirten Leitern von gegebener Form und die Methoden der Messung der Bindungscoefficienten mit dem elektrischen Verstärkungs-Apparate. Eine experimentelle Untersuchung. Jever. 4°. Mit einer Steintafel. 15 Ngr.

F. J. Pisko, Die Fluorescenz des Lichtes. Mit inden Text aufgenommenen Holzschn. Wien. 8°. 24 Ngr.

Repertorium für Meteorologie, herausgegeben von der kaiserl. geographisch. Gesellsch. zu St. Petersburg. Redig. v. L. F. Kaemtz. II. Bd. 1. Hft. gr. 4°. Dorpat u. Leipzig. Preis für den vollständ. Band 7 Thlr.

P. Riess, Ueb. die elektr. Ringfiguren. gr. 8°. Berlin. 12 Ngr.

C. Sainte-Claire Deville, Recherches sur les principaux phénomènes de météorologie et de physique terrestre aux Antilles. Tome Ier, comprenant: 1° Observations sur le tremblement de terre du 8 février 1843; 2° Tableaux météorologiques. Paris. 4°. Mit Karte. 5 Thlr.

Ph. Spiller, Neue Theorie der Elektricität u. des Magnetismus in ihren Beziehungen auf Schall, Licht und Wärme. 3. Aufl. gr. 8°. geh. Berlin. 5 Ngr.

Vermischte Schriften.

Barrow. — The Mathematical Works of Isaac Barrow, edited for Trinity College by W. Whewell. Cambridge. 8°. 6 Thlr.

Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturw. Classe. 19. Bd. gr. 4°. Wien. geh. $16^2/_3$ Thlr.

Literarischer Bericht
CXLIV.

Arithmetik.

A History of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century. By I. Todhunter, M. A. Fellow and principal mathematical Lecturer of St. John's College, Cambridge. Cambridge and London. 1861. 8º.

Dieses grosse, 532 Seiten umfassende Werk, auf welches wir einen Jeden, der an den neueren Fortschritten der Variationsrechnung Theil nimmt, aufmerksam machen, enthält sehr vollständig die Geschichte dieser Wissenschaft im neunzehnten Jahrhundert. Aber es ist dies nicht eine blosse Geschichte, sondern der gelehrte, mit der gesammten betreffenden Literatur in der vollständigsten Weise vertraute Herr Verfasser liefert uns in diesem Werke sehr ausführliche Auszüge aus allen neueren wichtigeren einzelnen Abhandlungen und grösseren Werken über die genannte Wissenschaft, wobei namentlich auch die bekannten Arbeiten deutscher Gelehrten die sorgfältigste und eingehendste Beachtung gefunden haben, so dass in der That dieses Werk eine ganze Bibliothek von Schriften über die Variationsrechnung fast zu ersetzen im Stande ist, und daher dringend zur Beachtung empfohlen werden muss. Der Herr Verfasser selbst betrachtet sein Werk in gewisser Rücksicht als eine Fortsetzung des im Jahre 1810 gleichfalls in Cambridge erschienenen Buchs: **A Treatise on Isoperimetrical Problems and the Calculus of Variations. By Robert Woodhouse, A. M., F. R. S., Fellow of Caius College, Cambridge**, welches uns bisher unbekannt geblieben und nicht zu Gesicht gekommen ist. Auszüge können wir natürlich

hier nicht geben, führen jedoch im Folgenden die Ueberschriften dei einzelnen Kapitel an, um unsere Leser zu einem Urtheil über die grosse Vollständigkeit des Werkes wenigstens einigermaassen in den Stand zu setzen: I. Lagrange, Lacroix. II. Dirksen, Ohm. III. Gauss. IV. Poisson. V. Ostrogradsky. VI. Delaunay. VII. Sarrus. VIII. Cauchy. IX. Legendre, Brunacci, Jacobi. X. Commentators on Jacobi. (Delaunay, Bertrand, Mainardi, Brioschi, Eisenlohr, Spitzer, Hesse, Clebsch). XI. On Jacobi's Memoir. (Bertrand, Bonnet, Heine, zwei Beispiele). XII. Miscellaneous Memoirs. (Gräffe, Minding, Goldschmidt, Pagani, Björling, Bertrand, Schellbach, Spitzer, Giesel, Löffler, Lindeloef). XIII. Systematic Treatises. (Strauch, Jellett, Stegmann). XIV. Minor Treatises. (Brunacci, Gergonne, Verdam, Verhulst, Bordoni, Momsen, Bruun, Björling, Schläfli, u. s. w., u. s. w.) XV. Miscellaneous Articles. XVI. Miscellaneous Articles. XVII. Conditions of Integrability.

Es ist dies ein Werk von sehr grosser mathematischer Gelehrsamkeit und Belesenheit, und um so dankenswerther aufzunehmen, weil es bisher unsers Wissens kein Werk giebt, in welchem man alles hierher Gehörende nur annähernd mit so grosser Vollständigkeit beisammen finden dürfte, wie in dem vorliegenden, höchst schätzbaren und mit besonderem Dank aufzunehmenden Buche. Mögen die obigen kurzen Bemerkungen hinreichen, um die so wohl verdiente Aufmerksamkeit auf dasselbe im reichsten Maasse zu lenken!

Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Mit besonderer Berücksichtigung für den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. C. Bremiker. Berlin. Nicolaische Verlagsbuchhandlung. 1860. 8°. 1 Thlr. 7½ Sgr.

Herr Dr. Bremiker, schon so vielfach verdient durch die Herausgabe trefflicher logarithmisch-trigonometrischer Tafeln und andere mathematische und nautische Arbeiten, hat bereits im Jahre 1852 eine sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel unter dem Titel:

Logarithmorum VI decimalium nova Tabula Berolinensis et numerorum vulgarium ab 1 usque 100000 et functionum trigonometricarum ad decades minutorum secundorum, auctore Carolo Bremiker, Dr. Ph. Berolini. 1852. 8°.

herausgegeben, welche von uns im Literar. Ber. Nr. LXXVII. S. 963.

angezeigt und, wie sie es so sehr verdiente, dringend zur Beachtung empfohlen worden ist. In der lehrreichen Vorrede zu der vorliegenden neuen Ausgabe solcher Tafeln setzt der Herr Verfasser deutlich aus einander, dass man bei den meisten Anwendungen der Logarithmen mit sechsstelligen Tafeln vollständig ausreicht, worin wir ihm durchaus beistimmen. Sämmtliche Rechnungen, welche den Zweck haben, aus gemessenen Stücken andere irgendwie damit zusammenhängende zu bestimmen, geben ein fehlerhaftes Resultat, weil die durch Beobachtungen oder Versuche gewonnenen Data fehlerhaft sind, und dieser Fehler ist selbst bei den genauesten und mit den vorzüglichsten Instrumenten angestellten Messungen mindestens noch fünfmal grösser, als derjenige, welcher durch die vernachlässigte siebente Decimalstelle in der Rechnung sich anhäufen kann. Der aus den fehlerhaft gegebenen Stücken in das Rechnungsresultat übergehende Fehler kann daher weder erheblich vermehrt, noch vermindert werden, man mag die siebente Decimalstelle mitnehmen oder ganz fortlassen, und dies ist der Grund, warum man zum gewöhnlichen Gebrauche auf dem Tische des Astronomen und Physikers nur noch die sechsstellige Tafel antrifft.

Ueberlegt man nun aber dies, so ist es in der That schwer zu begreifen, weshalb erfahrungsmässig auf den höheren Lehranstalten die Schüler immer noch so vielfach mit den grossen siebenstelligen Tafeln gequält werden, und warum man nicht schon längst zu den so äusserst bequemen sechsstelligen gegriffen hat, wenn man mit fünfstelligen sich nicht begnügen zu dürfen glaubte. Wir wünschen dringend die Einführung sechsstelliger Tafeln auf den Schulen, wie wir dies schon oft genug in diesen Berichten ausgesprochen haben, und sind daher der Meinung, dass der Herr Verfasser und die Verlagshandlung sich durch die Herausgabe dieser auf gutes Papier mit sehr scharfen und deutlichen, den Augen sehr wohlthuenden Ziffern gedruckten sechsstelligen Tafeln ein sehr wesentliches Verdienst um die Schulen erworben haben, welches die letzteren nur durch recht vielen Gebrauch einigermaassen lohnen mögen! Die allgemeine Einrichtung ist überall höchst zweckmässig, zwar keineswegs ganz übereinstimmend mit der bisher meistens üblichen, aber doch nicht bedeutend davon abweichend, was bei einem Buche dieser Art und zu diesem Zwecke nur vollkommen gebilligt werden kann; aber einen sehr wesentlichen Vorzug vor dem alten V e g a i s c h e n Handbuche hat der Herr Verfasser seinen Tafeln dadurch gesichert, dass in der trigonometrischen Tafel die Winkel durchgängig von 10 zu 10 Secunden, in den ersten vier Graden noch ausserdem von Secunde zu Secunde, fortschreiten, ein Vorzug vor den älteren Tafeln, der so

wichtig ist, dass nicht oft und nicht dringend genug zur Empfehlung dieser neuen Tafeln auf denselben hingewiesen werden kann. Die Einleitung enthält alles den Gebrauch der Tafeln Betreffende in der deutlichsten und vollständigsten Weise, und den Schluss des sehr verdienstlichen, jedweder Empfehlung würdigen Buchs macht eine sehr vollständige Tafel der Maasse und Gewichte, welche auch zugleich sehr dankenswerthe Nachweisungen über die Dimensionen der Erde, die Längen der verschiedenen Breitengrade in geographischen Meilen und Kilometern, die Längen der Grade der Parallelkreise unter verschiedenen Breiten in denselben Maassen, die Flächenräume der von zwei um einen Grad von einander abstehenden Meridianen und Parallelkreisen eingeschlossenen Gradabtheilung, und ausserdem noch eine Tafel häufig in Gebrauch kommender constanter Logarithmen enthält.

Möchte es uns gelungen sein, durch das Vorstehende die Aufmerksamkeit aller Mathematiker und Physiker, namentlich aber und zunächst der Schulen auf dieses in allen Beziehungen höchst empfehlenswerthe Buch zu lenken und dieselben zu dessen vielfachem Gebrauche zu veranlassen!

Mit Rücksicht auf unsere Anzeige der ausgezeichneten Schrön-schen Logarithmen-Tafeln im Literar. Bericht Nr. CXLI. S. 2. bemerken wir, dass uns jetzt durch besondere Güte auch die Ansicht eines auf meergrünes Papier gedruckten Exemplars dieser schönen Tafeln verstattet worden ist, und können es uns nicht versagen, nachträglich unsere Leser noch besonders auf diese Exemplare aufmerksam zu machen, da wir die Farbe des zu denselben verwandten Papiers den Augen überaus wohlthuend gefunden haben, und daher der thätigen Verlagshandlung von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig unsern besonderen Dank sagen, dass sie die Erwerbung solcher Exemplare möglich gemacht hat, in gleicher Weise, wie dies in England bei einigen Logarithmen-Tafeln der Fall ist.

Astronomie.

Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin, ausgeführt im Jahre 1858 durch galvanische Signale. Von Professor Dr. C. A. F. Peters, Director der Königlichen Sternwarte in Altona u. s. w. Altona 1861. 4°.

Wir haben hier ein in jeder Beziehung ausgezeichnetes Werk vor uns, welches die Leser des Archivs keineswegs allein nach der auf dem Titel genannten speciellen astronomischen Operation: „die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin durch galvanische Signale“, welcher es zunächst gewidmet ist, zu beurtheilen haben. Vielmehr ist dieses 267 Seiten in 4° umfassende Werk als die vortrefflichste und ausführlichste Anleitung zur Ausführung von Längenbestimmungen durch galvanische Signale, welche wir gegenwärtig besitzen, erläutert durch die Längenbestimmung zwischen den beiden auf dem Titel genannten Städten, zu betrachten, und wird, aus diesem allgemeinen wissenschaftlichen Gesichtspunkte betrachtet, zu allen Zeiten eine wichtige Stelle in der astronomisch-mathematischen Literatur einnehmen. So vielen Werth wir auch auf das bei der in Rede stehenden besonderen Längenbestimmung, welche unzweifelhaft zu den genauesten, auf dem Wege der telegraphischen Verbindungen gewonnenen Längenbestimmungen gehört, die wir gegenwärtig besitzen, erhaltene Resultat legen: so ist doch für uns und unsere Zeitschrift die oben hervorgehobene allgemein wissenschaftliche Seite des trefflichen Buchs zunächst bei Weitem die wichtigste, und wird, wie schon gesagt, demselben jederzeit einen wichtigen Platz in der Literatur sichern. Wir sagen daher dem Herrn Verfasser im Namen der Wissenschaft für seine ausgezeichnete Schrift, von der wir mit der vielfachsten Belehrung genaue Kenntniss genommen haben, den wärmsten Dank, und machen alle unsere Leser, die sich für den in derselben mit so grossem Fleiss und so grosser Sachkenntniss behandelten Gegenstand interessiren, ganz besonders aber alle diejenigen, welche selbst Längenbestimmungen auf telegraphischem Wege zu machen beabsichtigen, dringend auf dieses ausgezeichnete Werk aufmerksam, indem wir der Meinung sind, dass namentlich Keiner der Letzteren dasselbe bei seinen Arbeiten künftig wird entbehren können. Dass ein solches Werk eines Auszugs an diesem Orte nicht fähig ist, welcher immer nur ein sehr unvollständiges Bild von demselben geben würde, versteht sich von selbst, weshalb wir uns darauf beschränken müssen, hier nur kurz zu erwähnen, dass das Werk eine genaue Beschreibung der gebrauchten Instrumente und Apparate, eine sehr sorgfältige Anleitung zu deren Gebrauch und Berichtigung, so wie natürlich eine sehr eingehende Darstellung der sämmtlichen angewandten Berechnungsmethoden enthält, in welchen Beziehungen der Herr Verfasser für uns durchaus nichts zu wünschen übrig gelassen hat. Ueber die sogenannten Personal-Differenzen, welche natürlich bei Längenbestimmungen von der grössten Wichtigkeit sind, finden sich viele

sehr wichtige und interessante Bemerkungen, auf welche wir noch besonders hinweisen, eben so wie auf den Anhang, welcher eine sehr interessante „Beschreibung nebst Abbildung des auf der Altonaer Sternwarte aufgestellten Registrir-Apparats (von Krille) für Durchgangsbeobachtungen, nebst Vergleichung einiger an demselben bestimmten Personaldifferenzen mit solchen, die auf gewöhnliche Weise gefunden sind“ liefert. — Möge das in so vielen Beziehungen wichtige und interessante Werk der Aufmerksamkeit unserer Leser nochmals recht dringend empfohlen sein!

Nautik.

Ueber Ebbe und Fluth in der Rhede von Triest. Von F. Schaub, Director der k. k. Marine-Sternwarte in Triest. (Mit zwei Tafeln I. und II.) Separatabdruck aus den Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft. IV. Jahrg. 1. Heft. Stück 78. Wien 1860. 8°.

Die Aenderungen der Wasserhöhe durch die Ebbe und Fluth sind in der ganzen Ausdehnung des adriatischen Golfs zwar nur gering, eine genauere Kenntniss derselben ist jedoch sowohl von wissenschaftlichem Interesse, als auch für die Schifffahrt und viele damit zusammenhängende Einrichtungen von Wichtigkeit. Deshalb sind die regelmässigen Beobachtungen, welche gegenwärtig darüber an einem selbstregistrirenden Fluthmesser auf dem Molo Sartorio in der Rhede von Triest angestellt werden, von denen wir schon Thl. XXXI. S. 115. und S. 485. unseren Lesern nähere Nachricht geben zu können die Freude hatten, von grossem Interesse. Die ersten sehr verdienstlichen Resultate aus diesen Beobachtungen theilt Herr Director Schaub jetzt in der vorliegenden Abhandlung mit in zwei Tabellen auf S. 6. und S. 7., denen noch zwei graphische Darstellungen auf zwei besonderen lithographirten Tafeln beigefügt sind. Wir müssen einen Jeden, der sich für diese Gegenstände interessirt, auf die lehrreiche Schrift selbst verweisen, und wollen nur bemerken, dass die Hafenzeit, nämlich die Zeit, um welche an den Neu- und Vollmondstagen das Hochwasser später eintritt als die Mondsculmination, die in Triest bis jetzt gleich $10^h\,30^m$ angenommen wurde (m. s. S. 3.), aus diesen neueren Beobachtungen sich gleich $9^h\,30^m$ ergeben hat (m. s. S. 7.).

Vermischte Schriften.

Monatsbericht der Königlich Preussischen Akade-

mie der Wissenschaften zu Berlin. Siehe Literar. Ber. Nr. CXXXIX. S. 12.

Juni 1860. Dove: Ueber Flüssigkeiten, welche die Polarisationsebene des Lichts drehen. S. 292—293. — Borchardt: Ueber eine Interpolationsformel für eine Art symmetrischer Functionen und über deren Anwendung. S. 293. (Blosse Mittheilung des Titels einer gelesenen Abhandlung.) — Dove: Ueber Compensation gleichzeitig an verschiedenen Orten herabfallender Regenmengen. S. 304—314.

Juli 1860. Kummer: Ueber atmosphärische Strahlenbrechung. S. 405—420. (Wir können uns nicht versagen, so sehr es uns auch an Raum gebricht, Zweck und Inhalt dieser interessanten Abhandlung mit den eigenen Worten des Herrn Verfassers kurz anzugeben: „Die atmosphärische Strahlenbrechung ist bisher fast ausschliesslich nur unter Zugrundelegung der Grössenverhältnisse, welche für unsere Erde zufällig Statt haben, für den praktischen Gebrauch der Astronomie und Geodäsie bearbeitet worden. Man hat darum eine Reihe sehr interessanter Erscheinungen, welche die Theorie darbietet, wenn sie von einem allgemeinern, mehr mathematischen Gesichtspunkte aus betrachtet wird, wie es scheint, ganz unbeachtet gelassen. Eine kurze Entwickelung dieser Erscheinungen, welche ich hier geben will, wird vielleicht auch darum von Interesse sein, weil dieselben, wenn sie gleich auf unserer Erde nicht eintreten, doch auf den grösseren Himmelskörpern, wie z. B. dem Jupiter, wirklich Statt haben müssen, selbst wenn die Stärke der Atmosphäre eines solchen Himmelskörpers bedeutend geringer sein sollte, als die der Erdatmosphäre.“ Wir machen die Leser des Archivs recht sehr auf den Inhalt dieser interessanten Abhandlung aufmerksam.) — Weierstrass: Zur Theorie der elliptischen Functionen. S. 466. (Blosse Mittheilung des Titels einer gelesenen Abhandlung.) — Kummer: Ueber allgemeine, unendlich dünne geradlinige Strahlenbündel. S. 469—474. (Interessante Mittheilungen, welche an die Vorlegung dreier aus Fäden verfertigter Modelle der allgemeinen, unendlich dünnen, geradlinigen Strahlenbündel geknüpft wurden, mit Rücksicht auf die aus dem 57sten Bande des Crelle'schen Journals bekannte Abhandlung über solche Strahlenbündel.) — Magnus: Ueber die Leitung der Wärme durch die Gase. S. 485—489.

August 1860. Dove: Ueber einen besonderen Farbenkreisel des Herrn Lohmeier in Hamburg. S. 491. — Paalzow: Ueber die Richtung und die Art der Entladung des Haupt- und des Nebenstromes der Leydener Batterie, mitgetheilt von Herrn Mag-

nus. S. 497—500. — Encke: Berichte über die totale Sonnenfinsterniss. S. 501—502.

September, October 1860. Riess: Ueber die Verschiedenheit der Priestley'schen Ringe. S. 517. — Clebsch: Ueber eine symbolische Darstellungsweise algebraischer Formen, mitgetheilt von Herrn Borchardt. S. 536—540.

November 1860. Dove: Vorlegung von 13 Isothermcharten in der Polarprojection. S. 588. — Encke: Ueber den Gang bei den Störungsrechnungen der neueren Zeit. S. 593—594. — Dove: Ueber die periodischen Aenderungen des Druckes der Atmosphäre. (Mit 2 Tafeln.) S. 644—692. — Bremiker: Bericht über die Beobachtung der Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860. S. 693—709. (M. s. unsere ausführliche Besprechung dieses interessanten Berichts im Literar. Ber. Nr. CXLII. S. 5.) — Reuschle: Fortsetzung der Berechnung complexer Primfactoren, mit Bemerkungen von Herrn Kummer. S. 714—735. — Wiedemann: Ueber die Magnetisirung des Eisens und Stahles, mitgetheilt von Herrn Mitscherlich. S. 744—746.

December 1860. Steiner: Einige Folgerungen aus den Involutionssystemen und Involutionsnetzen. S. 834. (Blosse Mittheilung des Titels einer gelesenen Abhandlung.) — Du Bois Reymond: Ueber den secundären Widerstand, ein durch den Strom bewirktes Widerstandsphänomen an feuchten porösen Körpern. S. 846—906.

Januar 1861. Encke: Ueber eine wichtige Arbeit des Herrn Axel Möller, Observator an der Sternwarte von Lund. S. 141—148. (Herr A. Möller hat nämlich bei der Berechnung des Faye'schen Cometen gefunden, dass auch bei diesem Cometen, wie bei dem Encke'schen, eine Hypothese — etwa wie die der Bewegung in einem widerstehenden Mittel — unumgänglich nothwendig war, um den Zweck der Vereinigung der Beobachtungen zu erfüllen; jedenfalls eine wichtige Entdeckung, durch welche die Wahrscheinlichkeit jener Encke'schen Hypothese sehr erhöhet wird.) — Magnus: Ueber die Temperatur der aus kochenden Salzlösungen und gemischten Flüssigkeiten entweichenden Dämpfe. S. 157—167. — Dove: Ueber das Klima von Preussen. S. 169.

Februar 1861. Magnus: Ueber den Durchgang der Wärmestrahlen durch die Gase. S. 246—260. — Riess: Ueber die elektrischen Ringfiguren. S. 262—263. — Dove: Ueber Phosphorescenz durch Bestrahlung von polarisirtem Licht. S. 272.

März 1861. Hagen: Ueber Wasserwellen bei constanter und

endlicher Tiefe. S. 348. (Titel-Mittheilung.) — Poggendorff: Ueber die Wärmewirkung elektrischer Funken. S. 349—357.

April 1861. Quincke: Ueber die Bewegung materieller Theilchen durch strömende Elektricität, mitgetheilt von Herrn Magnus. S. 409—422. — Rüdorff: Ueber das Gefrieren des Wassers aus Salzlösungen, mitgetheilt von Herrn Magnus. S. 427—434. — Aronhold: Algebraische Reduction des Integrals $\int F(x,y)\partial x$, wo $F(x,y)$ eine beliebige rationale Function von x, y bedeutet, und zwischen diesen Grössen eine Gleichung dritten Grades von der allgemeinsten Form besteht, auf die Grundform der elliptischen Transcendenten, mit einigen einleitenden Bemerkungen vorgelegt von Herrn Weierstrass. S. 462—468.

Sitzungsberichte der königlichen Akademie der Wissenschaften zu München. (Vergl. Literar. Bericht Nr. CXLI. S. 17.)

Die drei ersten Hefte dieser neuen Sitzungsberichte einer der ersten deutschen Akademieen der Wissenschaften sind a. a. O. von uns angezeigt worden. Die drei folgenden, uns jetzt vorliegenden Hefte enthalten wiederum viele sehr wichtige Abhandlungen, die aber sämmtlich weniger in das Gebiet unserer Zeitschrift gehören, welche vorzugsweise nur der Mathematik und Physik gewidmet ist, so dass wir uns diesmal grösstentheils mit der folgenden nur kurzen Angabe der Titel der diesen Wissenschaften verwandten Abhandlungen begnügen müssen:

1860. Heft IV. Schönbein: Fortsetzung der Beiträge zur näheren Kenntniss des Sauerstoffs. S. 370. — A. Wagner: Betrachtungen über den gegenwärtigen Standpunkt der Theorie der Erdbildung nach ihrer geschichtlichen Entwicklung in den letzten fünfzig Jahren. S. 375. — Jolly: Ueber das specifische Gewicht des flüssigen Ammoniaks. S. 463.

1860. Heft V. Erdmann: Der Gasprüfer, ein Instrument zur Werthbestimmung des Leuchtgases (mit einer Tafel). S. 577. — Wittstein: Beobachtungen und Betrachtungen über die Farbe des Wassers. S. 603. — Harless: Zur inneren Mechanik der Muskelzuckung und Beschreibung des Atwood'schen Myographion (nicht eigentlich hierher gehörend, aber allgemein interessant). S. 625. — Pfaff: Untersuchungen über die thermischen Verhältnisse der Krystalle. S. 655. — Steinheil: Nachträgliches über ein Fernrohr mit Objectiv nach Gauss. S. 663. Herr Steinheil giebt in diesem kurzen Aufsatze die interessante Nachricht, dass es

ihm gelungen ist, ein Fernrohr nach diesen Principien von 57''' Oeffnung und 57'' Brennweite zu construiren, welches sich durch ungewöhnliche Schärfe und Farblosigkeit des Bildes auszeichnet, so dass durch dieses Instrument der thatsächliche Beweis geliefert ist, dass die Gauss'sche Construction vollkommenere Refractoren als alle bisherigen Constructionen liefert, wobei es aber wesentlich ist, dass die Fassung des Objectivs so construirt ist, dass sie eine Verstellung der Linsen durch Schrauben in allen Richtungen zulässt. Nur dadurch ist es möglich, alle Fehler, die in dem Bilde eines Objectivs vorkommen können, nachträglich zu heben, und zwar so streng, als das Auge sie noch zu erkennen vermag; zugleich giebt diese Einrichtung den Vortheil, dass die Abweichungen des Oculars und selbst subjective Fehler des Auges aufgehoben werden können. Herr St. glaubt, durch diese Instrumente die Dioptrik für grosse Dimensionen um einen wesentlichen Schritt gefördert zu haben.

1861. Heft I. Schönbein: Beiträge zur näheren Kenntniss des Sauerstoffs. S. 22. — Harless: Ueber die Leistung, Ermüdung und Erholung der Muskeln. S. 43. — Seidel: Ueber das Werk der Brüder Schlagintweit. (Betrifft das namentlich auch in physikalischer Rücksicht wichtige Werk, welches die Gebrüder Hermann und Robert von Schlagintweit über die mit ihrem verstorbenen Bruder Adolph unternommene Reise nach Indien und Hochasien erscheinen lassen: Results of a scientific Mission to India and High Asia etc. by H. A. and R. de Sch. Vol. I. Leipzig. Brockhaus. 1861.) S. 95.

1861. Heft II. Dieses Heft enthält mehrere interessante Aufsätze, aber keinen unmittelbar in den Kreis unserer Zeitschrift gehörenden. Allgemein interessant sind aber zwei Abhandlungen von Nägeli: Ueber die Verdunstung an der durch Korksubstanz geschützten Oberfläche von lebenden und todten Pflanzentheilen. S. 238. und: Ueber die Wirkung des Frostes auf die Pflanzenzellen. S. 264.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4⁰. (S. Literar. Ber. Nr. CXLIII. S. 8.)

Nr. 5. (Settembre e Ottobre 1860.) Sulle coniche, e sulle superficie di secondo ordine congiunte. Memoria del D. Luigi Cremona. pag. 257. — Discorso Commemorativo su Gustavo Pietro Lejeune Dirichlet pronunciato da E. E. Kummer. (Continuazione e

fine.) Traduzione dal Tedesco di Felice Casorati. pag. 283. — La Teorica delle funzioni ellittiche. Monografia del Prof. Enrico Betti. Parte seconda. p. 298. — Sur la courbe parallèle à l'ellipse par M. A. Cayley. pag. 311.

Rivista bibliographica. Sulla Curva logociclica del Sig. Booth. Articolo del Prof. B. Tortolini. pag. 317. — Pubblicazioni recenti. pag. 324. (Hier finden sich u. A. folgende in Deutschland weniger bekannte Schriften angezeigt:

Carlo Maria Piuma: Nota sulla determinazione della parte algebrica nell' integrazione in funzione finita esplicita. Genova 1860. 4°.

D. Luigi Cremona: Memoria sulle superficie gobbe del terz'-ordine. Milano 1861. 4°. (Estratta dall' Instituto Lombardo Vol. II.)

Bjerknes: Ueber die geometrische Repräsentation der Gleichungen zwischen zwei veränderlichen reellen oder complexen Grössen. Christiania 1859. (Universitäts-Programm für das zweite Halbjahr 1859.)

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz.

Die Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften zu Görlitz hat folgende Preisaufgabe gestellt:

> Lebensbeschreibung des Ehrenfried Walther von Tschirnhaus auf Kiesslingswalde und Würdigung seiner Verdienste.

Einlieferungstermin: 31ste Januar 1863. Preis 50 Thlr. Die Abhandlungen sind versiegelt und mit einem Motto versehen an den Sekretair der Gesellschaft einzusenden. Zugleich haben die Verfasser ihren Namen in einem versiegelten Zettel beizufügen, der mit dem gleichen Motto zu bezeichnen ist. Auch darf die Abhandlung nicht von des Verfassers Hand geschrieben sein.

Aufforderung.

In diesem Jahre werden die deutschen Naturforscher und Aerzte sich in der alten echt deutschen Stadt Speier, jenseits des deutschen Rheinstroms, in deren herrlichem Dome so viele deutsche Kaiser in deutscher Erde ruhen, zum 36sten Male um die gewöhnliche, hinreichend bekannte Zeit *) versammeln. Wie wir aus zuverlässiger Quelle vernehmen, wird von allen Seiten — von Stadt und Regierung — Alles geschehen, um den Theilnehmern an der Versammlung dieselbe so angenehm und lehrreich wie möglich zu machen, worin ja Speier in der schönsten, für alle Zeiten unvergesslichen Weise im Jahre 1858 das nachbarliche Carlsruhe vorangegangen ist. Wie gern hätten wir unter den Geschäftsführern der Versammlung den trefflichen Schwerd, auf dessen Besitz Speier mit Recht stolz ist, gesehen! jedoch hat das vorgerückte Alter des verehrten Mannes, wie wir hören, diesen unseren Wunsch leider nicht in Erfüllung gehen lassen; gewiss aber wird er, so wie der Wissenschaft, auch dieser Versammlung als Mitglied zur besonderen Zierde gereichen. Wenn es auch unzweifelhaft ist, dass diese Versammlung in einem der schönsten Gaue des deutschen Vaterlands von einer gewiss sehr grossen Anzahl trefflicher Männer aus Süd und Nord besucht werden wird: so macht es uns doch besondere Freude, einem mehrfach gegen uns ausgesprochenen Wunsche nachzukommen, indem wir unsere weit verbreitete Zeitschrift benutzen, zunächst an alle Physiker, Astronomen und Mathematiker die Aufforderung zu richten, bei dieser vielversprechenden Versammlung deutscher Männer, die in der jetzigen Zeit nicht bloss von grosser wissenschaftlicher Wichtigkeit, sondern zugleich von besonderer politischer Bedeutung ist, sich in recht grosser Zahl einzufinden, damit auch recht zahlreiche Sectionen für „Physik" und für „Mathematik und Astronomie" sich bilden können.

Sollten die erwählten hochachtbaren beiden Geschäftsführer uns über die Versammlung vielleicht einige nähere Mittheilungen zeitig genug zugehen zu lassen die Güte haben, so würden wir dieselben gern in unserm nächsten Literarischen Berichte zu weiterer Kenntniss bringen.

Greifswald im Juli 1861. Grunert.

---

*) Nach §. 9. der Statuten (entworfen am 18. September 1822 in Leipzig) fangen die Versammlungen jedesmal mit dem 18. September an und dauern mehrere Tage.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLIV.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

L. Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch. 16. Lief. gr. 8⁰. geh. Berlin. 20 Ngr.

Arithmetik.

H. Fischer, V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen dargestellt. gr. 8⁰. geh. Halle a. d. S. 1 Thlr.

H. B. Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. gr. 8⁰. geh. 5. Aufl. Hamburg. $1^1/_3$ Thlr.

H. C. E. Martus, Maxima und Minima. Ein geometrisches und algebraisches Uebungsbuch für die Schüler höherer Lehranstalten. gr. 8⁰. geh. Berlin. 16 Ngr.

H. Schwager, Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauch für den Unterricht an Real-, Gewerbe- und Handelsschulen. 8⁰. geh. Würzburg. 18 Ngr.

Geometrie.

Euklid's acht geometrische Bücher, aus dem Griech. übersetzt von J. F. Lorenz. Auf's Neue herausgegeben mit einem Anhange von E. W. Hartwig. gr. 8⁰. geh. Halle a. d. S. 20 Ngr.

Astronomie.

J. J. Baeyer, Ueber die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mittel-europäischen Gradmessung nebst einer Uebersichtskarte. gr. 8⁰. geh. Berlin. 20 Ngr.

G. Grote, Platon's Lehre von der Rotation der Erde und die Auslegung derselben durch Aristoteles. Aus dem Engl. übersetzt von J. Holzamer. Lex. 8⁰. geh. Prag. 8 Ngr.

A. Guillemin, Causeries astronomiques. Les mondes, voyage pittoresque dans l'univers visible. gr. in-18. Paris. 3 fr.

Handatlas der Erde und des Himmels. Neu redig. Volksausgabe. 26.—29. Lief. Imp.-Fol. Weimar. à 8 Ngr.

J. H. v. Maedler, Ueber totale Sonnenfinsternisse mit besonderer Berücksichtigung der Finsterniss vom 18. Juli 1860. gr. 4⁰. geh. Jena. $4^2/_3$ Thlr.

C. A. F. Peters, Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin, ausgeführt im Jahre 1858 durch galvanische Signale. gr. 4⁰. geh. Hamburg. $2^2/_3$ Thlr.

E. Wetzel, Wandkarte für den Unterricht in der mathematischen Geographie. 9 Blätt., lithogr. u. color. Imp.-Fol. Mit Text in gr. 8°. Berlin. 3⅓ Thlr.

Nautik.

S. M. Saxby, The projection and calculation of the sphere, for young sea officers; being a complete initiation into nautical astronomy. Post 8°. London. Cloth. 5 s.

Physik.

H. Burmeister, Das Klima der argentinischen Republik. Nach dreijähr. Beobacht. während einer Reise durch die La Plata-Staaten geschildert und mit numerischen Angaben der gefundenen Werthe belegt. gr. 4°. geh. Halle a. d. S. 2 Thlr.

H. W. Dove, Das Gesetz der Stürme in seiner Beziehung zu den allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Berlin. 1 Thlr.

A. W. Fils, Barometer-Höhen-Messungen in dem Herzogthum Sachsen-Meiningen, ausgeführt in den Jahren 1855 bis 1859. gr. 8°. geh. Meiningen. 24 Ngr.

S. Giles, The brewers meteorological and statistical guide. 8°. London. Cloth. 21 s.

C. Graef, Physikalische Generalkarte. I. Vertheilung der Luftströmungen, der Hydrometeore. Hydrographie der Erde. II. Isothermen der Erde. Verbreitung der Vulcane, der wichtigsten Bäume und Strauchgewächse, der wichtigsten Kulturgewächse. Kpfrst. und Color. Imp.-Fol. Weimar. à 10 Ngr.

W. G. Hankel, Elektrische Untersuchungen. 5. Abhandl. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. I. Thl. Lex.-8°. geh. Leipzig. 16 Ngr.

P. A. Kesselmeyer, Ueber den Ursprung der Meteorsteine. — Versuch eines Quellenverzeichnisses zur Literatur über Meteoriten. Von O. Buchner. gr. 4°. geh. Frankfurt a. M. 3⅓ Thlr.

E. Matzenauer, Erdmagnetismus und Nordlicht. Ein Versuch, ihren Zusammenhang mit Zugrundelegung der P. T. Meissnerschen Wärmelehre zu erklären. gr. 8°. Innsbruck. geh. 12 Ngr.

M. A. F. Prestel, Die thermische Windrose für Nordwest-Deutschland. gr. 4°. geh. Jena. 1⅔ Thlr.

G. Shepherd, The Climate of England: its meteorological character explained and the changes of future years revealed. 4°. London. Cloth. 8 s. 6 d.

R. J. G. Wood, Common Objects of the Microscope. With Illustrations by Tuffen West, printed in colours by Evans. 12. London. Cloth. 3 s. 6 d.









